ЧТО ТАКОЕ АБСОЛЮТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Геометрию Евклида можно подразделить на две части. Одна часть включает в себя понятия, свойства и теоремы, определение и доказательство которых не использует аксиому параллельных. Она называется *абсолютной геометрией*.

Этот термин был введен венгерским математиком Я.Бойяи в 30-х годах XIX века. Другую часть геометрии Евклида, использующую аксиому параллельных, для удобства будем называть относительной геометрией.

В школьных учебниках геометрии по-разному решается вопрос о соотношении абсолютной и относительной геометрии. Так в учебниках Л.С.Атанасяна и др. [1], А.В.Погорелова [2] аксиома параллельных вводится с самого начала изучения геометрии.

В учебнике А.П.Киселева под редакцией Н.А.Глаголева [3] сначала излагается абсолютная геометрия, рассматриваются понятия и доказываются свойства и теоремы, не использующие аксиому параллельных, и только после этого вводится аксиома параллельных. Аналогичный метод изложения используется в учебнике геометрии И.М.Смирновой, В.А.Смирнова [4], где аксиома параллельных вводится в начале 8-го класса, а до этого, в 7-м классе, излагается абсолютная геометрия.

Такое разделение школьного курса геометрии на абсолютную и относительную позволяет сформировать более четкие представления о роли аксиомы параллельных о том, какие понятия, свойства и теоремы зависят от нее, а какие нет, закладывает основу дальнейшего знакомства со сферической геометрией, с неевклидовыми геометриями Лобачевского и Римана.

Здесь мы укажем некоторые свойства и теоремы школьного курса геометрии, доказательство которых в учебниках [1] и [2] использует аксиому параллельных, но на самом деле они относятся к абсолютной геометрии.

Теорема. Внешний угол произвольного треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним.

В учебниках [1] и [2] эта теорема является следствием теоремы о сумме углов треугольника и, значит, использует аксиому параллельных. В действительности она может быть доказана без использования этой аксиомы. А именно, пусть ABC - произвольный треугольник. Рассмотрим, например, внешний угол BCD, и докажем, что он больше внутреннего угла ABC. Для этого через вершину A и середину E стороны BC проведем прямую и отложим на ней отрезок EF, равный AE. Треугольники ABE и FCE равны по первому признаку равенства треугольников ($BE = EC$, $AE = FE$, $\angle AEB = \angle FEC$). Следовательно, $\angle ABC = \angle BCF$. Но угол BCF составляет только часть угла BCD. Значит, $\angle BCD > \angle ABC$.

Следствие 1. Если в треугольнике имеется прямой или тупой угол, то остальные два угла этого треугольника – острые.

Действительно, в этом случае внешний угол, например, к тупому углу будет острым и он больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним.

Следствие 2. Через точку, не принадлежащую прямой, проходит не более одной прямой, перпендикулярной данной.

Действительно, если бы имелось две прямые, перпендикулярные данной, то они образовывали бы треугольник с двумя прямыми углами, а это невозможно.

Следствие 3. Если точка D лежит внутри треугольника ABC, то угол ADB меньше угла C.

Действительно, продолжим AD до пересечения с BC в точке E. Тогда $\angle ADB > \angle AEB > \angle C$.

Теорема (Соотношение между сторонами и углами треугольника). В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC. Докажем, что угол C больше угла B. Для этого отложим на луче AB отрезок AD, равный стороне AC. Треугольник ACD - равнобедренный. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Угол 1 составляет часть угла C. Поэтому $\angle 1 < \angle C$. С другой стороны, угол 2 является внешним углом треугольника BCD. Поэтому $\angle 2 > \angle B$. Следовательно, имеем $\angle C > \angle 1 = \angle 2 > \angle B$.

Следствие 1. В произвольном треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Докажем, что если в треугольнике ABC угол C больше угла B, то и сторона AB больше стороны AC. Действительно, эти стороны не могут быть равны, так как в этом случае треугольник ABC был бы равнобедренным и, следовательно, угол C равнялся бы углу B. Сторона AB не может быть меньше стороны AC, так как в этом случае, по доказанному, угол C был бы меньше угла B. Остается только, что сторона AB больше стороны AC.

Следствие 2. Перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую, короче всякой наклонной, проведенной из этой точки к этой прямой.

Следствие 3. Из двух наклонных, проведенных из данной точки к данной прямой, больше та, проекция которой больше.

Действительно, пусть BC и BD - наклонные к прямой a, AB - перпендикуляр и $AD > AC$. Предположим, что точки C и D лежат по одну сторону от точки A. Тогда угол BCD тупой как внешний угол острого угла прямоугольного треугольника ABC. Угол BDC острый как угол прямоугольного треугольника ABD. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то в треугольнике BDC сторона BD будет больше стороны BC.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда точки C и D лежат по разные стороны от точки A.

Теорема (Неравенство треугольника). Каждая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других сторон.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Отложим на продолжении стороны AB отрезок BD, равный стороне BC (рис. 3). Треугольник BDC - равнобедренный. Поэтому $\angle 1=\angle 2$. Угол 2 составляет часть угла ACD. Следовательно, $\angle 2 < \angle ACD$. Таким образом, в треугольнике ACD угол C больше угла D. Воспользуемся тем, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Получим неравенство $AD > AC$. Но $AD=AB+BD=AB+BC$. Следовательно, имеем неравенство $AB+BC > AC$, означающее, что сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Вычитая из обеих частей этого неравенства BC, получим неравенство $AB > AC\text{-}BC$, означающее, что сторона треугольника больше разности двух других сторон.

Следствие. Если выполняется равенство $AC + CB = AB$, то точка C лежит на отрезке AB между точками A и B.

Действительно, если точка C не лежит на прямой AB, то будет выполняться неравенство $AC+BC>AC$. Если точка C лежит на прямой AB вне отрезка AB, то также будет выполняться это неравенство. Остается одна возможность - точка C лежит на отрезке AB между точками A и B.

Признаки равенства прямоугольных треугольников также относятся к абсолютной геометрии.

Теорема (Признак равенства прямоугольных треугольников). Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство аналогично доказательству третьего признака равенства треугольников. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ - два прямоугольных треугольника, в которых углы B и B_1 - прямые, $AC = A_1C_1$ и $AB = A_1B_1$. Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, а вершина C перешла бы в точку C_2, лежащую по другую сторону от точки C относительно прямой A_1B_1. Тогда треугольник $A_1B_1C_2$ будет равен треугольнику ABC. Так как углы $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1C_2$ - прямые, то точки C_1, B_1 и C_2 лежат на одной прямой. Из равенства сторон A_1C_1 и A_1C_2 следует, что треугольник $C_1A_1C_2$ - равнобедренный. Воспользуемся тем, что высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, является биссектрисой. Получим, что A_1B_1 - биссектриса и, значит, равны углы $C_1A_1B_1$ и $C_2A_1B_1$. Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1C_2$ равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Рассмотрим некоторые свойства окружности, относящиеся к абсолютной геометрии.

Теорема. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Доказательство. Пусть дана окружность с центром в точке O и радиусом R, AB – произвольная хорда, отличная от диаметра (рис. 6). Проведем отрезки OA и OB. В треугольнике AOB сторона AB меньше суммы двух других сторон, т.е. $AB < OA + OB = R + R = 2R$. Следовательно, хорда AB меньше диаметра.

Теорема. Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду пополам.

Доказательство. Пусть дана окружность с центром в точке O и диаметр AB перпендикулярен хорде CD. Если эта хорда проходит через центр O, то она является диаметром и делится в точке O пополам. Пусть хорда CD не проходит через центр O. Обозначим точку ее пересечения с диаметром AB через E. Треугольники OEC и OED равны по признаку равенства прямоугольных треугольников. Следовательно, $CE = ED$.

Теорема. Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к окружности. Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.

Доказательство. Пусть расстояние от центра O окружности до прямой a равно радиусу R окружности. Опустим из центра O перпендикуляр OA на эту прямую. Тогда $OA = R$. Для любой другой точки C на прямой a наклонная OC будет больше перпендикуляра OA и, следовательно, больше R. Таким образом, расстояние от любой точки прямой a, отличной от A, до центра O больше R. Значит, прямая a и окружность имеют одну общую точку A, т.е. прямая касается окружности.

Заметим, что в этом случае OA является радиусом и, следовательно, касательной к окружности является прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному в точку касания.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности.

Теорема. Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны.

Доказательство. Рассмотрим две касательные к окружности с центром в точке O, проведенные из точки A и касающиеся окружности в точках B и C. Треугольники AOB и AOC прямоугольные, $OB=OC$ и сторона AO общая. По признаку равенства прямоугольных треугольников они равны. Следовательно, $AB=AC$.

Теорема. В произвольный треугольник можно вписать окружность. Ее центром будет точка пересечения биссектрис этого треугольника.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и из его вершин A и B проведем биссектрисы a и b. Докажем, что точка O их пересечения является центром вписанной окружности. Для этого достаточно проверить, что равны перпендикуляры OD, OE и OF, опущенные из точки O на стороны треугольника ABC или, что то же самое, точка O одинаково удалена от сторон треугольника ABC. Действительно, т.к. точка O принадлежит биссектрисе a, то она одинаково удалена от сторон AB и AC. Так как точка O принадлежит биссектрисе b, то она одинаково удалена от сторон AB и BC. Значит, точка O одинаково удалена от всех сторон треугольника ABC. Окружность с центром в этой точке и радиусом $R = OD = OE = OF$ будет искомой вписанной окружностью.

Заметим, что утверждение о том, что около каждого треугольника можно описать окружность в абсолютной геометрии не выполняется. Более того, оно эквивалентно аксиоме параллельных.

Теорема. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ - четырехугольник, в который вписана окружность, касающаяся его сторон в точках M, N, P, Q. Докажем, что $AB + CD = BC + AD$. Действительно, из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки следуют равенства: $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$. Поэтому, $AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + QD + BN + NC = AD + BC$.

Обратно, пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняется равенство $AB + CD = BC + AD$. Покажем, что в него можно вписать окружность. Для этого достаточно проверить, что биссектрисы углов этого четырехугольника пересекаются в одной точке. Эта точка будет равноудалена от всех сторон четырехугольника и, следовательно, будет центром искомой вписанной окружности. Если в данном четырехугольнике выполняется равенство $AB=BC$, то все стороны четырехугольника равны. В этом случае биссектрисами его углов будут диагонали четырехугольника и, следовательно, биссектрисы углов пересекаются в одной точке – точке пересечения диагоналей. Пусть $AB \neq BC$. Предположим для определенности $AB > BC$. Из условия $AB + CD = BC + AD$ следует, что $AB – BC = AD – CD$. Возьмем на AB точку E так, что $BE=BC$. Тогда $AE = AB-BC$. Возьмем на AD точку F так, что $DF=DC$. Тогда $AF = AD – CD$. Следовательно, $AE=AF$.

Треугольники AEF, BCE, CDF – равнобедренные. Поэтому биссектрисы углов A, B, D являются серединными перпендикулярами к отрезкам EF, EC, CF. Следовательно, они пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около треугольника EFC. Эта точка будет равноудалена от всех сторон исходного четырехугольника, т.е. будет искомым центром вписанной окружности.

Теорема. Для любого n существуют правильные n-угольники, т.е. такие n-угольники, у которых равны все стороны и все углы.

Доказательство. Рассмотрим окружность с центром в точке O. Проведем какой-нибудь радиус OA_1 и будем откладывать от него лучи OA_2, …, OA_n так, чтобы углы OA_1A_2, …, OA_nA_1 равнялись $360^{\circ}/n$. Тогда треугольники OA_1A_2, …, OA_nA_1 равны по двум сторонам и углу между ними.

Следовательно, в многоугольнике $A_1 \ldots A_n$ равны все стороны и все углы, т.е. он правильный.

Теорема. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Доказательство. Пусть $A_1 \ldots A_n$ – правильный n-угольник. Проведем биссектрисы углов A_1 и A_2. Можно доказать, что они является осями симметрии данного многоугольника и пересекаются в некоторой точке O. Она и будет искомым центром вписанной окружности.

Эта же точка O будет центром описанной окружности и, следовательно, около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

Рассмотрим вопрос о построении касательной к окружности. Пусть дана окружность с центром в точке O и радиусом R. Точка A лежит вне окружности. Требуется построить касательную к окружности, проходящую через точку A.

Обычное построение заключается в следующем. Соединяются точки A и O. С центром в середине C отрезка AO и радиусом CO проводится окружность. Она пересечет данную окружность в двух точках B' и B''. Проводя прямую через точку A и одну из этих точек, например B', получим касательную к окружности. Действительно, в треугольнике OAB', вписанном в окружность, угол $OB'A$ опирается на диаметр OA окружности и, следовательно, равен 90°. Поэтому прямая AB' перпендикулярна радиусу OB' и значит, является касательной.

Это построение использует свойство вписанного угла: вписанный в окружность угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу, которое доказывается с использованием аксиомы параллельных.

Таким образом, приведенное построение касательной к окружности использует аксиому параллельных. Из этого, однако не следует, что касательную к окружности нельзя построить без использования этой аксиомы. Приведем построение касательной, не использующее аксиому параллельных.

Пусть как и раньше дана окружность с центром в точке O и радиусом R. Точка A лежит вне окружности. Требуется построить касательную к окружности, проходящую через точку A.

С центром в точке O и радиусом $2R$ проведем окружность. С центром в точке A и радиусом AO также проведем окружность. Вторая окружность пересечет первую в двух точках C' и C''. Соединим одну из них, например C' с центром O. Точку пересечения $C'O$ с данной окружностью обозначим B'. Прямая AB' будет искомой касательной к окружности. Действительно, треугольник OAC' равнобедренный, B' середина OC'. Значит AB' – медиана равнобедренного треугольника и, следовательно, высота.

Приведенное построение касательной к окружности обобщается на случай эллипса.

Напомним, что эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная. Точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса. Касательной к эллипсу называется прямая, имеющая с эллипсом только одну общую точку.

Теорема. Пусть A - произвольная точка эллипса с фокусами F_1, F_2. Тогда касательной к эллипсу, проходящей через точку A является биссектриса угла смежного с углом F_1AF_2.

Доказательство. Докажем, что биссектриса a угла смежного с углом F_1AF_2 будет касательной к эллипсу. Обозначим $AF_1 + AF_2 = c$. Рассмотрим точку F' на прямой F_1A, для которой $AF' = AF_2$. Тогда прямая a будет серединным перпендикуляром к отрезку F_2F'. Для произвольной точки A' прямой a, отличной от A, имеем

$$A'F_2 = A'F' \text{ и } A'F_1 + A'F_2 = A'F_1 + A'F' > F_1F' = c.$$

Это означает, что точка A' не принадлежит эллипсу, и, следовательно, прямая a имеет только одну общую точку A с эллипсом, т.е. является касательной.

Доказанную теорему можно использовать для построения касательной к эллипсу, проходящей через заданную точку A'. А именно, с центром в точке A' и радиусом $A'F_2$ проведем окружность. С центром в точке F_1 и радиусом c проведем другую окружность и найдем ее точку пересечения F' с первой окружностью. Проведем биссектрису угла $F'A'F_2$. Она и будет искомой касательной к эллипсу.

В заключение приведем список некоторых утверждений относительной геометрии. Их нельзя доказать без использования аксиомы параллельных. Более того, они эквивалентны этой аксиоме.

1. Сумма углов треугольника равна 180°.

2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.

3. Через всякую точку, лежащую внутри угла, можно провести прямую, пересекающую обе его стороны.

4. Вписанный в окружность угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

5. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность.

6. Сторона вписанного в окружность правильного шестиугольника равна радиусу этой окружности.

7. Существует прямоугольник.

8. Существуют подобные, но не равные треугольники.

9. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

10. Геометрическое место точек, расположенных по одну сторону от прямой на одном и том же расстоянии от нее, есть прямая.

Литература.

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 7-9. Учебник для 7-9 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1990.
2. Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 7-11 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1991.
3. Киселев А.П. Геометрия. Учебник для 6-9 классов семилетней и средней школы. – М.: Учпедгиз, 1962.
4. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. Учебник для 7-9 классов средней школы. – М.: Просвещение, 2001, Мнемозина, 2005.
5. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть I. Учпедгиз, Москва, 1948.
6. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии. Часть I. ОГИЗ, Гостехиздат. Москва, Ленинград, 1948
7. Энциклопедия элементарной математики, книги IV,V. – М.: Физматгиз, Москва, 1961 - 1966.