АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ

Существует несколько способов аналитического задания кривых на плоскости.

I. Задание кривой уравнением в декартовых координатах.

В качестве примера найдем уравнения задающие параболу, эллипс и гиперболу.

Парабола. Напомним, что параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой *d* и данной точки *F*. Прямая *d* называется директрисой, а точка *F* - фокусом параболы.

Выведем уравнение, задающее параболу на координатной плоскости. Обозначим точку пересечения оси параболы с ее директрисой через *G*. Длину отрезка *FG* обозначим через $2a$ (рис. 1).

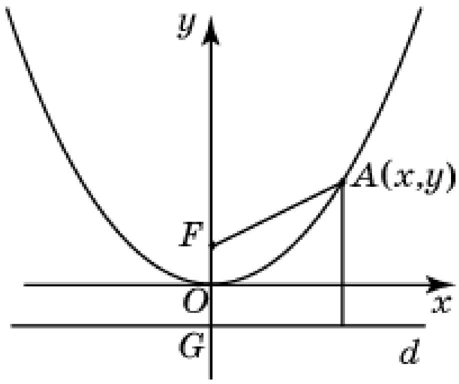

Рис. 1

Введем систему координат, считая началом координат *O* середину отрезка *FG*, осью абсцисс – прямую, параллельную директрисе и проходящую через начало координат, осью ординат - ось параболы. Тогда фокус *F* будет иметь координаты $(0, a)$.

Пусть $A(x, y)$ - точка плоскости. Расстояния от нее до фокуса и директрисы равны соответственно $\sqrt{x^2+(y-a)^2}$ и $|y+a|$. Точка *A* принадлежит параболе в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$\sqrt{x^2+(y-a)^2} = y+a.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат и приведя подобные члены, будем иметь равенство

$$4ay = x^2,$$

которое и будет искомым уравнением параболы.

Эллипс. Напомним, что эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть величина постоянная. Точки F_1, F_2 называются фокусами эллипса.

Выведем уравнение эллипса на координатной плоскости. Пусть F_1, F_2 - фокусы эллипса. Длину отрезка F_1F_2 обозначим через $2c$. Введем систему координат, считая началом координат *O* середину отрезка F_1F_2, осью абсцисс - прямую F_1F_2, осью ординат - прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную оси абсцисс (рис. 2). Фокусы эллипса будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

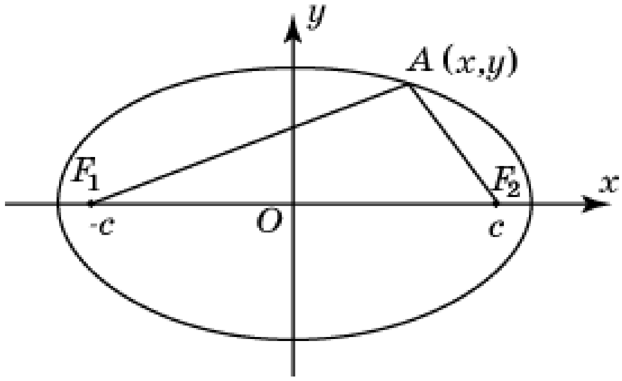

Рис. 2

Пусть $A(x, y)$ - точка плоскости. Расстояния от нее до фокусов равны соответственно $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Точка A принадлежит эллипсу в том и только том случае, когда выполняется равенство

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a,$$

где a – некоторое фиксированное число ($a > 2c$).

Перенесем второе слагаемое левой части этого равенства в правую часть и возведем обе части полученного равенства в квадрат. Будем иметь

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2.$$

Приведем подобные члены

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + xc.$$

Еще раз возведем в квадрат и приведем подобные члены

$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2 = a^4 - a^2c^2.$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$ и разделим обе части равенства на a^2b^2. Получим равенство

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

которое и будет искомым уравнением эллипса.

Гипербола. Напомним, что гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1, F_2 есть фиксированное число, взятое со знаком "+" или "–". Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы.

Выведем уравнение гиперболы. Введем систему координат, считая осью Ox прямую, проходящую через фокусы, а осью Oy прямую, перпендикулярную оси Ox, и делящую отрезок F_1F_2 пополам. Пусть фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ (рис.3).

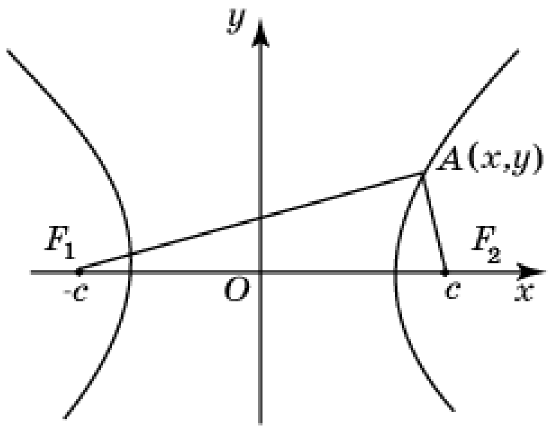

Рис. 3

Точка $A(x,\ y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда выполняется равенство AF_1 - AF_2 = $\pm 2a$, где a – некоторое фиксированное число, $0 < a < c$.

Перепишем это равенство в координатной форме

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

Перенесем второй корень в правую часть и возведем обе части равенства в квадрат. Получим

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, будем иметь равенство

$$xc-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2.}$$

Еще раз возводя в квадрат и обозначая $b^2=c^2-a^2$, получим

$$x^2b^2-y^2a^2=a^2b^2.$$

Разделив обе части на a^2b^2, окончательно получим уравнение гиперболы

$$(2)\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

II. Задание кривой уравнением в полярных координатах.

Наряду с декартовыми координатами на плоскости, во многих случаях более удобными оказываются так называемые ***полярные координаты***.

При указании места расположения какого-нибудь объекта удобнее определять не его декартовы координаты, а направление и расстояние до объекта. Именно так в повседневной жизни показывают дорогу в городе. Например**:** "Вы пройдете по этой улице около 100 м, свернете направо, пройдете еще 50 м и будете у цели". При астрономических наблюдениях также гораздо удобнее использование не декартовых, а полярных координат.

Дадим определение полярных координат на плоскости. Пусть на плоскости задана координатная прямая с выделенной точкой O и единичным отрезком OE. Эта прямая в данном случае будет называться ***полярной осью***. Точка O называется ***полюсом***.

Полярными координатами точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ), где r - расстояние от точки A до точки O, φ - угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, если φ > 0, и по часовой стрелке, если φ < 0 (рис. 4,а).

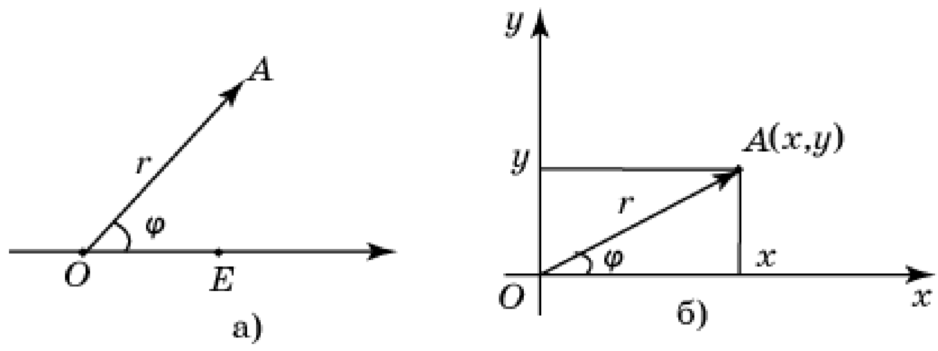

Рис. 4

При этом первая координата r называется ***полярным радиусом***, а вторая φ - ***полярным углом***. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полюс принимается начало координат и за полярную ось – ось Ox. В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x, y) можно сопоставить полярные координаты (r, φ) (рис. 4,б). При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Полярные координаты оказываются удобными для задания кривых на плоскости. Рассмотрим некоторые из таких кривых.

Окружность радиуса R и центром в точке O задается уравнением $r = R$.

Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от точки O на расстояние R. Все такие точки удовлетворяют равенству $r = R$. При этом, если угол φ увеличивается, соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол φ уменьшается, соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

Трилистник **–** кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\varphi$.

Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\varphi \geq 0$, решая которое находим область допустимых значений углов φ:

$$0^\circ \le \varphi \le 60^\circ;\ 120^\circ \le \varphi \le 180^\circ;\ 240^\circ \le \varphi \le 300^\circ.$$

Итак, пусть $0 \le \varphi \le 60^\circ$. Если угол φ изменяется от нуля до 30°, то $\sin 3\varphi$ изменяется от нуля до единицы и, следовательно, радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол изменяется от 30° до 60°, то радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла φ от 0° до 60° точка на плоскости описывает кривую, похожую на очертания лепестка, и возвращается в начало координат. Такие же лепестки получаются, когда угол изменяется в пределах от 120° до 180° и от 240° до 300° (рис. 5).

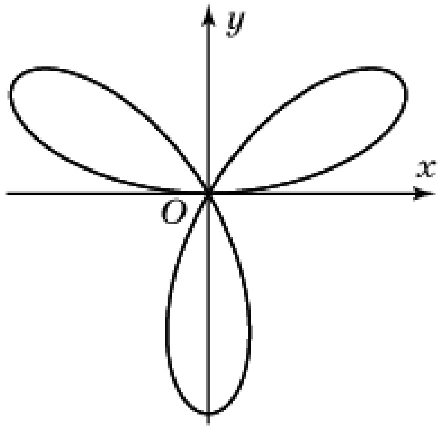

Рис. 5

Розы – семейство кривых, полярные уравнения которых имеют вид $r = a\sin(k\varphi)$, где a – положительное число, k – положительное рациональное число. Частным случаем роз является трилистник. Некоторые другие розы представлены на рисунках 6 а,б.

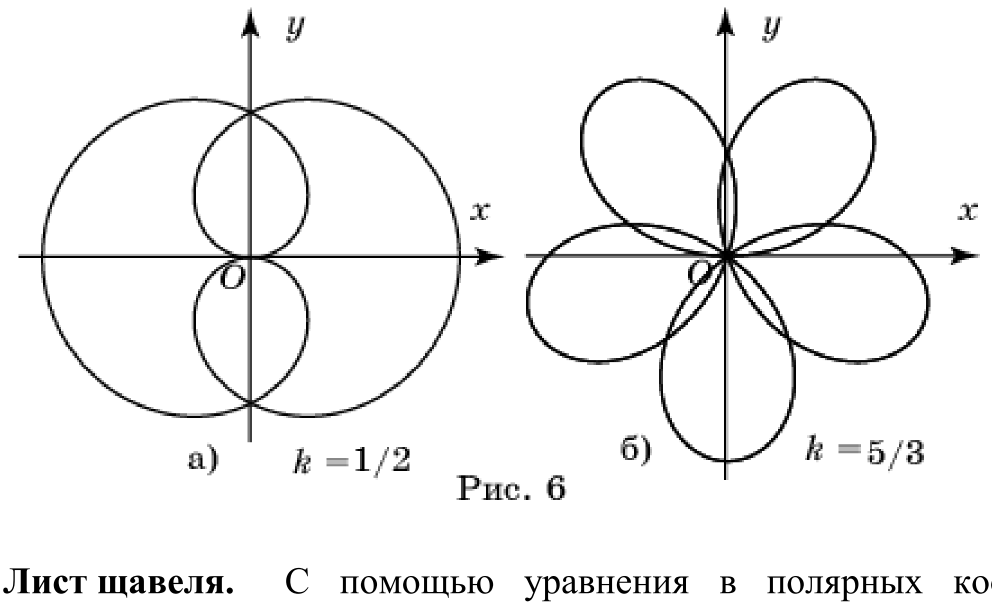

Рис. 6

Лист щавеля. С помощью уравнения в полярных координатах можно задавать самые различные формы цветов и листов. В качестве примера рассмотрим лист щавеля (рис. 7), задаваемого уравнением

$$r = 1 + \cos 3\varphi + \sin^2 3\varphi.$$

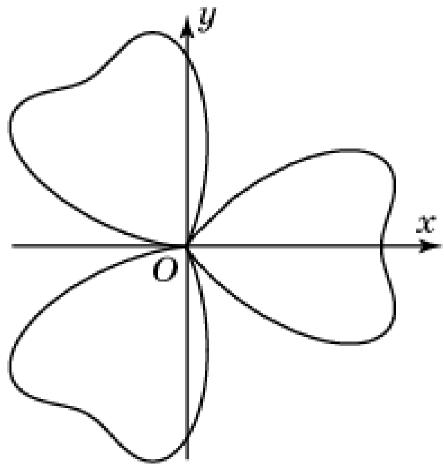

Рис. 7

Спираль Архимеда - кривая, задаваемая уравнением

$$r = a\,\varphi,$$

где a - некоторое фиксированное число.

Предположим, что $a > 0$, и построим график этой кривой. Если $\varphi = 0$, то $r = 0$. Это означает, что кривая проходит через начало координат. Поскольку радиус неотрицателен, отрицательным углам φ никакие точки на кривой не соответствуют. Посмотрим, как изменяется радиус при увеличении угла φ. В этом случае радиус r также будет увеличиваться. Например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $r = a\frac{\pi}{2}$; при $\varphi = \pi$ получаем $r = a\,\pi$, т.е. в два раза больше. При $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ значение радиуса r будет в три раза больше и т.д. Соединяя плавной кривой полученные точки, изобразим кривую, которая называется спиралью Архимеда в честь ученого, ее открывшего и изучившего (рис. 8).

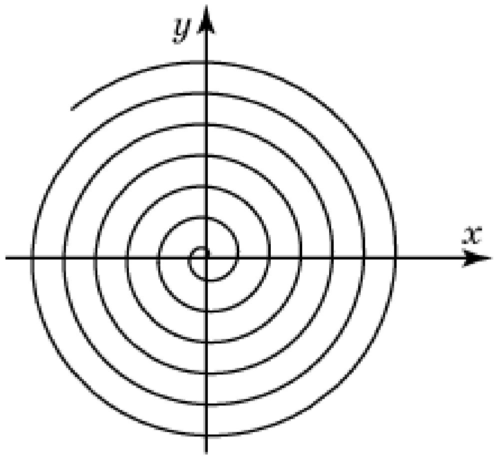

Рис. 8

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками. Каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π, т.е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

По спирали Архимеда идет звуковая дорожка на грампластинке. Туго свернутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной емкости. Одна из деталей швейной машины - механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку - имеет форму спирали Архимеда.

Логарифмическая спираль. Логарифмическая спираль задается уравнением в полярных координатах $r = a^{\varphi}$, где a - некоторое фиксированное положительное число, φ - угол, измеряемый в радианах (рис. 9).

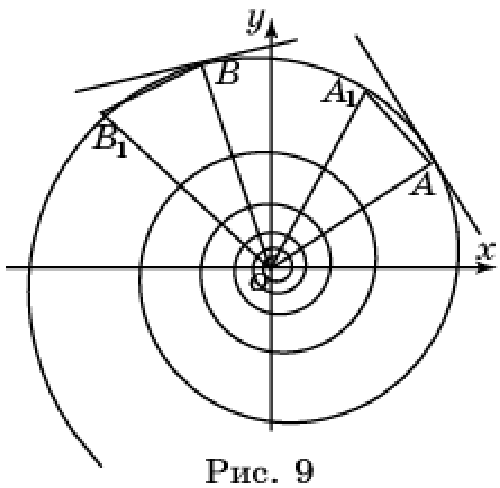

Рис. 9

В отличие от спирали Архимеда, логарифмическая спираль бесконечна в обе стороны, так как угол φ может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. При этом, если $a > 1$, то при увеличении угла радиус увеличивается, а если $0 < a < 1$, то при увеличении угла радиус уменьшается.

Одним из основных свойств логарифмической спирали является то, что в любой ее точке угол между касательной к ней и радиусом-вектором сохраняет постоянное значение.

Для доказательства этого воспользуемся тем, что касательную к кривой в точке A можно определить как предельное положение секущей AA_1 при A_1 стремящейся к A.

Пусть точки B, B_1 получены поворотом лучей OA и OA_1 на угол φ, (рис. 9). Тогда треугольники OAA_1 и OBB_1 подобны, и поэтому углы OAA_1 и OBB_1 равны. При A стремящейся к A_1 эти углы дадут углы между касательными и радиусами-векторами в точках A и B соответственно. Следовательно, угол между касательной и радиусом-вектором не зависит от положения точек на логарифмической спирали, т.е. сохраняет постоянное значение.

Именно это свойство логарифмической спирали используется в различных технических устройствах. Например, при изготовлении вращающихся ножей, что позволяет сохранять при вращении постоянный угол резания. В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины, благодаря чему напор воды используется с наибольшей производительностью.

Ночные бабочки, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полета и лучом света. Однако, если вместо луны они ориентируются на близко расположенный источник света, например, на пламя свечи, то инстинкт их подводит. Сохраняя постоянный угол между направлением полета и источником света, они двигаются по скручивающейся логарифмической спирали и попадают в пламя свечи.

III. Кривые, заданные параметрическими уравнениями

Рассмотрим вопрос о том, как траектория движения точки описывается с помощью уравнений. Поскольку положение точки на плоскости однозначно определяется ее координатами, то для задания движения точки достаточно задать зависимости ее координат x, y от времени t, т.е. задать функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

В этом случае для каждого момента времени t мы можем найти положение точки на плоскости.

Кривая на плоскости, описываемая точкой, координаты которой удовлетворяют этим уравнениям при изменении параметра t, называется **параметрически заданной кривой** на плоскости. Сами уравнения называются **параметрическими уравнениями**.

График функции $y=f(x)$ является частным случаем параметрически заданной кривой на плоскости. Параметрическими уравнениями в этом случае будут уравнения

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, то, переходя к декартовым координатам, ее можно задать и параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = r(t)\cos t, \\ y = r(t)\sin t. \end{cases}$$

Окружность. Окружность радиуса R с центром в начале координат можно рассматривать как параметрически заданную кривую на плоскости с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

При изменении параметра t от нуля до 2π точка на окружности делает один оборот против часовой стрелки, начиная и заканчивая в точке с координатами (R, 0). При дальнейшем увеличении параметра t точка будет многократно проходить по окружности в направлении против часовой стрелки.

Циклоида. Рассмотрим циклоиду – кривую, которая описывается точкой, закрепленной на окружности радиуса, катящейся по прямой (рис. 10).

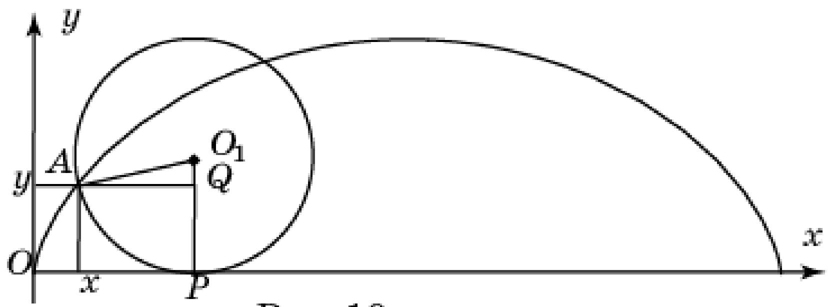

Рис. 10

Найдем параметрические уравнения циклоиды. Пусть окружность катится по оси Ox и в начальный момент времени касается начала координат. Предположим, что окружность повернулась на некоторый угол величины t. При этом точка касания O на окружности переместится в точку A. Поскольку дуга AP окружности при этом прокатилась по отрезку OP, то их длины равны, т.е. $AP = OP = Rt$. Для координат x, y точки A имеем

$$x = OP - AQ = Rt - R\sin t = R(t - \sin t),$$

$$y = O_1P - O_1Q = R - R\cos t = R(1 - \cos t)$$

и, таким образом, параметрическими уравнениями циклоиды являются уравнения

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$$

Удлиненная циклоида – траектория движения точки, закрепленной на продолжении радиуса окружности, катящейся по прямой (рис. 11,а).

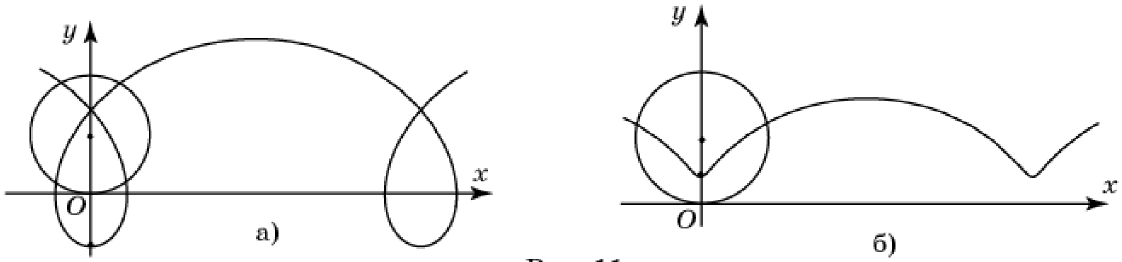

Рис. 11

Так же как и в случае с циклоидой, показывается, что параметрическими уравнениями удлиненной циклоиды являются

$$\begin{cases} x = Rt - d\sin t, \\ y = R - d\cos t, \end{cases}$$

где d – расстояние от точки до центра окружности ($d > R$).

Если $d < R$, то кривая называется **укороченной циклоидой** (рис. 11,б).

Кардиоида – кривая, являющаяся траекторией движения точки, закрепленной на окружности, катящейся по окружности того же радиуса.

Обозначим через O центр неподвижной окружности радиуса a. В качестве полюса возьмем точку C на окружности, соответствующую начальному моменту времени. Пусть катящаяся окружность повернулась на угол t и точка C переместилась в точку C_1 (рис. 12).

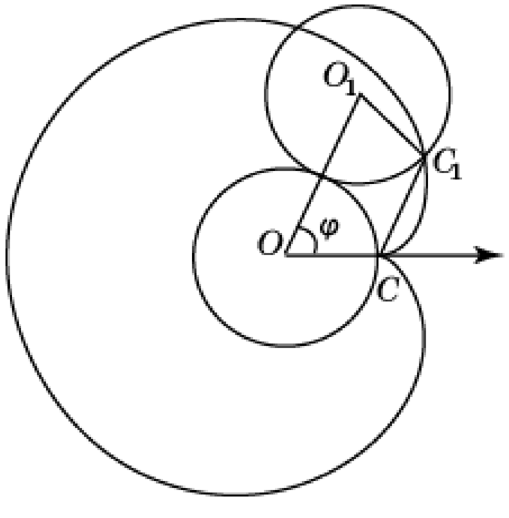

Рис. 12

Четырехугольник OCC_1O_1 является равнобедренной трапецией. Следовательно, полярный угол точки C_1 будет равен t и

$$OC_1 = 2a(1-\cos t).$$

Таким образом, уравнение кардиоиды будет иметь вид

$$r = 2a(1-\cos t).$$

Эпициклоиды. Рассмотрим теперь ситуацию, когда точка закреплена на окружности радиуса r, катящейся по окружности радиуса R. Получаемые кривые подразделяются на эпициклоиды и гипоциклоиды в зависимости от того, располагается ли катящаяся окружность с внешней или внутренней стороны. Выведем уравнения эпициклоиды.

Пусть центр O неподвижной окружности является началом координат и точка $A(0, R)$ соответствует начальному моменту времени. Предположим, что катящаяся с внешней стороны окружность повернулась на угол, равный t. При этом точка A переместилась в точку $A_1(x,y)$ (рис. 13).

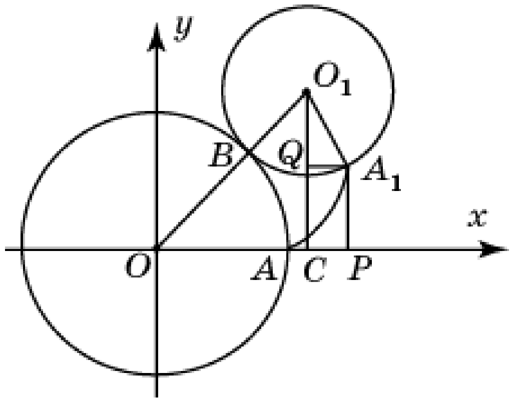

Рис. 13

Обозначим отношение $\frac{r}{R}$ через m. Из равенства длин дуг AB и A_1B следует, что угол AOB равен mt. Далее,

$$\angle A_1O_1C = \angle A_1O_1B - \angle CO_1O = t - (\frac{\pi}{2} - mt)$$

и, следовательно,

$$\sin\angle A_1O_1C = \sin(t - (\frac{\pi}{2} - mt)) = -\cos(t+mt),$$

$$\cos\angle A_1O_1C = \cos(t - (\frac{\pi}{2} - mt)) = \sin(t+mt).$$

Учитывая, что $x = OP - OC$, $y = O_1C - O_1Q$, получаем параметрические уравнения эпициклоиды

$$\begin{cases} x = (R + mR)\cos mt - mR\cos(t + mt), \\ y = (R + mR)\sin mt - mR\sin(t + mt). \end{cases}$$

В частности, если $m = 1$, параметрические уравнения кардиоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = 2R\cos t - R\cos 2t, \\ y = 2R\sin t - R\sin 2t. \end{cases}$$

Еще один частный случай эпициклоиды показан на рисунке 14.

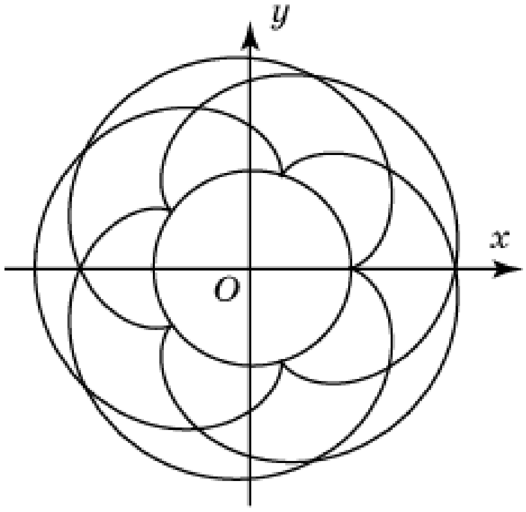

Рис. 14

Аналогичным образом показывается, что если окружность радиуса $r = mR$ катится по окружности радиуса R с внешней стороны, то точка, закрепленная на радиусе катящейся окружности на расстоянии h от центра, описывает кривую, задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = (R + mR)\cos mt - h\cos(t + mt), \\ y = (R + mR)\sin mt - h\sin(t + mt). \end{cases}$$

При этом, если $h < R$, то кривая называется **укороченной эпициклоидой**, а если $h > R$, то **удлиненной эпициклоидой**.

Гипоциклоиды. Так же как и для эпициклоиды показывается, что уравнения гипоциклоиды имеют вид

$$\begin{cases} x = (R - mR)\cos mt + mR\cos(t - mt), \\ y = (R - mR)\sin mt + mR\sin(t - mt). \end{cases}$$

В частности, параметрические уравнения астроиды (рис. 15) ($m = \frac{1}{4}$), имеют вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}R\cos\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{3t}{4}, \\[2ex] y = \dfrac{3}{4}R\sin\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{3t}{4}. \end{cases}$$

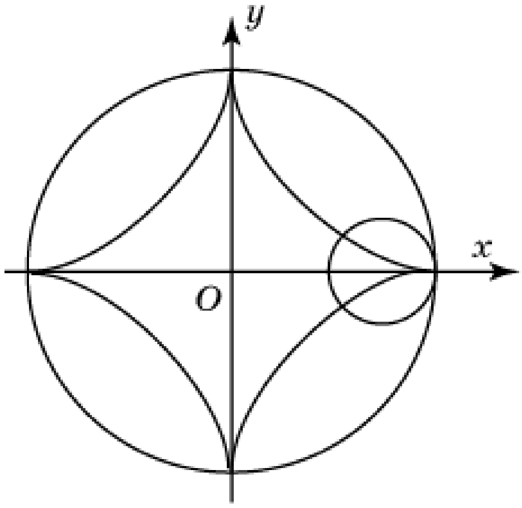

Рис. 15

Параметрические уравнения **кривой Штейнера** (рис. 16) ($m=\frac{1}{3}$), имеют вид

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}R\cos\frac{t}{3} + \frac{1}{3}\cos\frac{2t}{3}, \\ y = \frac{2}{3}R\sin\frac{t}{3} + \frac{1}{3}\sin\frac{2t}{3}. \end{cases}$$

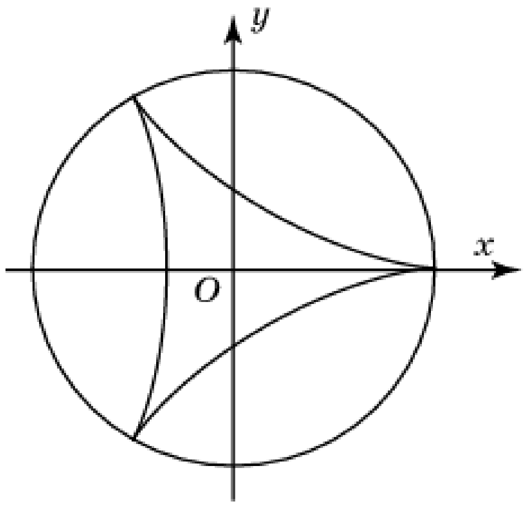

Рис. 16

Еще один частный случай гипоциклоиды показан на рисунке 17.

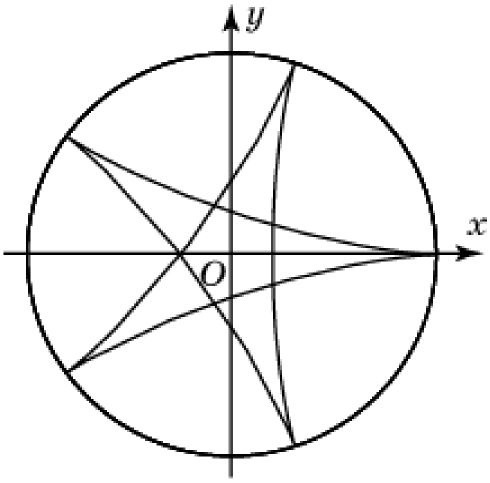

Рис. 17

Если окружность радиуса $r = mR$ катится по окружности радиуса R с внутренней стороны, то точка, закрепленная на радиусе катящейся окружности на расстоянии h от центра, описывает кривую, задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = (R - mR)\cos mt + h\cos(t - mt), \\ y = (R - mR)\sin mt - h\sin(t - mt). \end{cases}$$

При этом, если $h < R$, то кривая называется **укороченной гипоциклоидой**, а если $h > R$, то **удлиненной гипоциклоидой**.

Упражнения

1. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \sin 4\varphi$.

2. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \cos \varphi$.

3. Для параболы $x^2 = 4ay$ выберем в качестве полярной оси луч, идущий по оси Oy с началом в фокусе $F(0, a)$ параболы. Переходя от декартовых к полярным координатам, покажите, что парабола с выколотой вершиной задается уравнением

$$r = \frac{a}{1 - \cos\varphi}.$$

4. Докажите, что уравнение

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

задает эллипс, если $0 < \varepsilon < 1$, и гиперболу, если $\varepsilon > 1$.

5. Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\varphi$. Чему равно расстояние между соседними витками этой спирали?

6. Человек идет с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет траектория его движения относительно земли?

7. Нарисуйте **гиперболическую спираль**, задаваемую уравнением $r = \frac{a}{\varphi}$.

8. Нарисуйте **спираль Галилея,** которая задается уравнением $r = a\varphi^2$ ($a > 0$). Она вошла в историю математики в XVII веке в связи с задачей нахождения формы кривой, по которой двигается свободно падающая в области экватора точка, не обладающая начальной скоростью, сообщаемой ей вращением земного шара.

9. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = |\varphi|$.

10. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \sqrt{\varphi}$.

11. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \frac{a}{\varphi^2}$.

12. Найдите параметрические уравнения: а) спирали Архимеда; б) логарифмической спирали.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин В. Кардиоида //Квант. – 1977. № 12.
2. Березин В. Лемниската Бернулли //Квант. – 1977. № 1.
3. Берман Г.Н. Циклоида. – М.: Наука, 1975.
4. Бронштейн И. Эллипс. Гипербола. Парабола / Такая разная геометрия. Составитель А.А. Егоров. – М.: Бюро Квантум, 2001. - / Приложение к журналу "Квант" № 2/2001.
5. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. – 3-е изд. – М.: МЦНМО, 2000.
6. Маркушевич А.И. Замечательные кривые. – М.- Л.: Гос. изд. техн. – теор. лит., 1951. - / Популярные лекции по математике, выпуск 4.
7. Савелов А.А. Плоские кривые. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1960.
8. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Кривые. Курс по выбору. 9 класс. – М.: Мнемозина, 2007.
9. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2011.
10. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Компьютер помогает геометрии. – М.: Дрофа, 2003.