АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

Как известно из курса геометрии, плоскость в пространстве задается уравнением $ax + by + cz + d = 0$. При этом неравенства $ax + by + cz + d \geq 0$ и $ax + by + cz + d \leq 0$ определяют полупространства, на которые эта плоскость разбивает пространство. Для того, чтобы определить, какому из двух полупространств принадлежит точка $A(x, y, z)$, достаточно подставить ее координаты в левую часть уравнения плоскости и найти знак получившегося значения.

Поменяв знаки у чисел a, b, c, d, второе неравенство всегда можно свести к первому.

Покажем, как с помощью таких неравенств в пространстве можно задавать выпуклые многогранники.

Действительно, пусть грани выпуклого многогранника лежат в плоскостях, задаваемых уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_nx + b_ny + c_nz + d_n = 0.$$

Тогда сам многогранник является пересечением соответствующих полупространств и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n \geq 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многогранник.

Например, неравенства

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1,$$

которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1, \end{cases}$$

определяют единичный куб в пространстве (рис. 1).

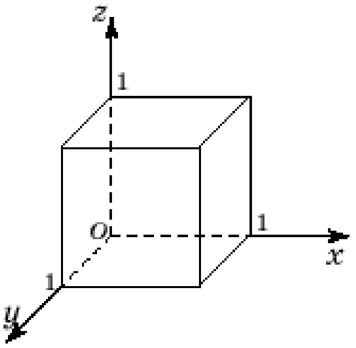

Рис. 1

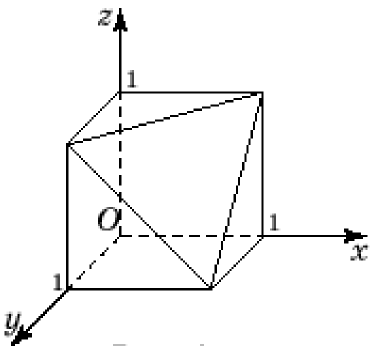

Рис. 2

Если к этим неравенствам добавить еще одно неравенство

$$x + y + z \leq 2,$$

то соответствующий многогранник получается из куба отсечением пирамиды (рис. 2).

Легко видеть, что неравенство $|x|+|y|+|z| \leq a$ задает в пространстве октаэдр.

Упражнения.

1. Изобразите многогранник, состоящий из точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x+y|+|z| \leq 1$, $|x-y|-|z| \leq 1$или неравенствам $|x-y|+|z| \leq 1$, $|x+y|-|z| \leq 1$.

2. Докажите, что точки с координатами (0, ±φ, ± 1), (± 1, 0, ±φ), (±φ , ±1, 0), где $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, являются вершинами икосаэдра.

3. Докажите, что точки с координатами (0, ±Φ, ±φ), (±φ , 0, ±Φ), (±Φ , ±φ , 0), (± 1, ± 1, ±1), где $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, являются вершинами додекаэдра.

4. При каком значении a неравенства

$$a|x| + |y| \leq 1,\ a|y| + |z| \leq 1,\ a|z| + |x| \leq 1$$

задают додекаэдр?

5. При каком значении a неравенства

$$(1-a)|x| + |y| \leq 1,\ (1-a)|y| + |z| \leq 1,\ (1-a)|z| + |x| \leq 1,\ |x|+|y|+|z| \leq 1+a$$

задают икосаэдр?

Ярким примером применения многогранников является ее использование в теории оптимального управления.

Выпуклые многогранники можно трактовать аналитически – с помощью системы линейных неравенств. Линейная функция, рассматриваемая на таком выпуклом многограннике, достигает своего наибольшего (наименьшего) значения в одной из его вершин, либо на некотором ребре, либо на некоторой грани. В любом случае существует вершина (хотя бы одна), в которой принимается это наибольшее (наименьшее) значение. Найти это наибольшее (наименьшее) значение можно алгебраически, найдя значения линейной функции во всех вершинах многогранника и выбрав из них наибольшее (наименьшее).

Оказалось, что к данной задаче отыскания наибольшего (наименьшего) значения линейной функции на многограннике приводят многие практические задачи. Среди них:

транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

задача о диете, т.е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

задача составления оптимального плана производства;
задача рационального использования посевных площадей и т.д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л.В. Канторовичем (1912-1986).

В своей книге "Математические методы организации и планирования производства" он заложил основы того, что ныне называется математической экономикой. Методы, развитые Канторовичем положили начало новому направлению прикладной математики – линейному программированию, изучающему численные методы решения задач отыскания наибольших и наименьших значений линейных функций на выпуклых многогранниках.

За разработку этого направления в 1975 году Л.В. Канторович был удостоен Нобелевской премии.

В качестве примера рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи.

Задача. Пусть на четыре завода $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$ требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность данных заводов в сырье каждого вида указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода - в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья, (в т) на складе		Потребность в сырье, (в т) на заводе			
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
20	25	8	10	12	15

Таблица 2

Склад	Расстояние (в км) от склада до завода			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	5	6	4	10
$С_2$	3	7	3	7

Для решения этой задачи, в первую очередь, проанализируем ее условие и переведем его на язык математики, т. е. составим математическую модель. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$

на заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$, обозначим через *x*, *y* и *z* соответственно. Тогда на четвертый завод с этого склада нужно будет перевезти 20 - *x* – *y* - *z* сырья в тоннах, а со второго склада нужно будет перевезти соответственно 8 - *x*, 10 - *y*, 12 - *z*, *x* + *y* + *z* - 5 сырья в тоннах. Запишем эти данные в таблицу 3.

Таблица 3

Склад	Кол-во сырья (в т), перевезенное на заводы			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	x	y	z	$20–x–y - z$
$С_2$	$8 – x$	$10 - y$	$12 - z$	$x + y + z - 5$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0, \\ 8 - x \geq 0,\ 10 - y \geq 0,\ 12 - z \geq 0, \\ 20 - x - \ y - z \geq 0, \\ x + y + z - 5 \geq 0. \end{cases}$$

Эта система неравенств определяет некоторый многогранник. Для того чтобы его построить, изобразим сначала многогранник, определяемый первой и второй строкой данной системы. На рисунке 3 это параллелепипед $OABCO_1A_1B_1C_1$. Уравнение 20 - *x* - *y* - *z* = 0 определяет плоскость $D_1D_2D_3$, которая, пересекая параллелепипед, образует многоугольник $M_1M_2M_3C_1$. Уравнение *x* + *y* + *z* - 5 = 0 определяет плоскость, которая пересекает параллелепипед и образует в нем треугольник $E_1E_2E_3$. На многограннике $M_1M_2M_3C_1CBAE_1E_2E_3O_1$, где $M_1(8,10,2)$, $M_2(0,10,10)$, $M_3(0,8,12)$, $C_1(8,0,12)$, $C(8,0,0)$, $B(8,10,0)$, $A(0,10,0)$, $E_1(5,0,0)$, $E_2(0,5,0)$, $E_3(0,0,5)$, $O_1(0,0,12)$, выполняются все условия данной системы. Назовем его многогранником ограничений.

Для нахождения общего числа тонно-километров умножим расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты сложим. Общее число тонно-километров выражается формулой:
$5x + 6y + 4z + 10(20 - x - y - z) + 3(8 - x) + 7(10 - y) +$
$+ 3(12 - z) + 7(x + y + z - 5) = 295 - x - 4y - 2z.$

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F=295-x-4y-2z$ на многограннике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = x + 4y + 2z$. Тогда $F_{min} = 295 - f_{max}$.

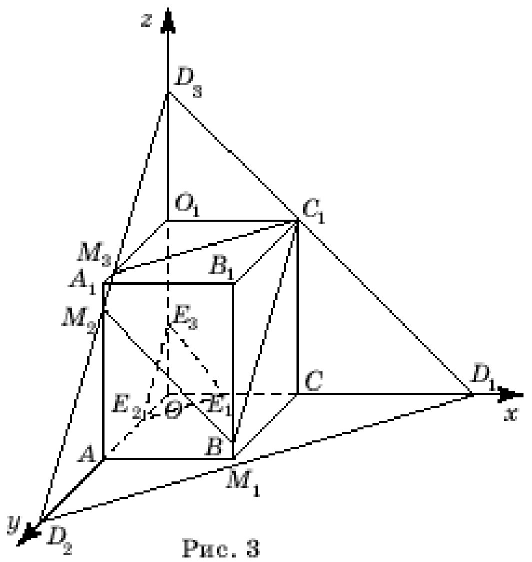

Рис. 3

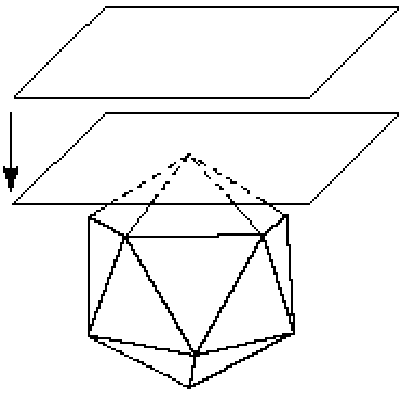

Рис. 4

Используя геометрические соображения, докажем, что линейная функция вида $ax + by + cz$ $(c > 0)$ принимает свое наибольшее значение на многограннике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение d функции $ax + by + cz$. Тогда уравнение $ax + by + cz = d$ задает плоскость в пространстве, которая характеризуется тем, что во всех ее точках данная линейная функция принимает значение d. В точках, расположенных выше этой плоскости, она принимает значения, большие d, а в точках, расположенных ниже этой плоскости - значения, меньшие d. Если число d выбрать достаточно большим, то плоскость $ax + by + cz = d$расположится выше многогранника. Будем опускать эту плоскость, уменьшая значения d, до тех пор, пока она не соприкоснется с многогранником. Такое касание произойдет при некотором d_0 - в какой-нибудь вершине многогранника (рис. 4), или по какому-нибудь его ребру, или по какой-нибудь его грани.

В точках касания линейная функция принимает значение d_0, и, поскольку все остальные точки многогранника лежат ниже плоскости, значения линейной функции в этих точках меньше d_0. Таким образом, d_0 - искомое наибольшее значение. Поэтому для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике, достаточно вычислить значения функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее. Вычислим значение функции $f = x + 4y + 2z$ в вершинах многогранника ограничений: $f(M_1) = 52$, $f(M_2) = 60$, $f(M_3) = 56$, $f(C_1) = 32$, $f(C) = 8$, $f(B) = 48$, $f(A) = 40$, $f(E_1) = 5$, $f(E_2) = 20$, $f(E_3) = 10$, $f(O_1) = 24$.

Легко видеть, что максимальное значение функции f равно 60. Тогда $F_{min} = 295 - 60 = 235$. Это значение функция F принимает в точке $M_2(0,10,10)$.

Таким образом, наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей 4.

Таблица 4

Склад	Кол-во сырья (в т), перевезенное на заводы			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	0	10	10	0
$С_2$	8	0	2	15

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно трем и поэтому в процессе ее решения получился многогранник. Если бы число независимых переменных равнялось двум, то получился бы многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше трех, и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n-мерного пространства и n-мерных многогранников с очень большим n. При решении таких задач используются компьютеры.

Таким образом, хотя пространственные свойства окружающего нас мира хорошо описываются геометрическим трехмерным пространством, потребности практической деятельности человека приводят к необходимости рассмотрения пространств большей размерности, которые изучаются в специальном разделе математики - многомерной геометрии.

Литература

1. Беляева Э.С., Монахов В.М. Экстремальные задачи. – М.: Просвещение, 1977.

2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.

3. Болтянский В.Г. Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1985.

4. Волков В.А. Элементы линейного программирования. – М.: Просвещение, 1975.

5. Смирнова И.М. В мире многогранников. - М.: Просвеще-ние, 1995.

6. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумам и минимумах. – М.: Наука, 1986.

7. Тихомиров В.М. 50 лет линейному программированию. – Квант, 1989, № 6, с. 9.

8. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Рассказы о прикладной математике. – М.: Наука, 1979.