Аналитическое задание фигур на плоскости. Задачи оптимизации

Окружность с центром в точке $A_0(x_0,y_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2.$$

Круг, ограниченный этой окружностью, задается неравенством

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2.$$

Прямая на плоскости задается уравнением

$$ax + by + c = 0.$$

Рассмотрим вопрос об аналитическом задании других фигур и начнем с полуплоскости.

Пусть прямая задана уравнением $ax + by + c = 0$ и проходит через точку $A_0(x_0,\ y_0)$. Ее вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты $(a,\ b)$ и определяет полуплоскость (рис. 1).

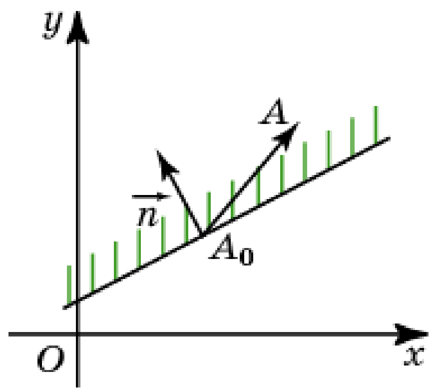

Рис. 1

Точка $A(x,\ y)$ принадлежит этой полуплоскости в случае, если угол между векторами $\vec{n}$ и $\overrightarrow{A_0A}$ не превосходит 90°, т.е. в случае, если скалярное произведение этих векторов больше или равно нулю, т.е. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_0A}$ $= a(x-x_0)+b(y-y_0)\geq 0$. При этом $-ax_0-by_0=c$. Следовательно, точка $A(x,\ y)$ принадлежит этой полуплоскости, если выполняется неравенство $ax+by+c\geq 0$.

Аналогично, точка $A(x,\ y)$ принадлежит другой полуплоскости, по отношению к данной прямой, если выполняется неравенство $ax + by + c \leq 0$.

Для того чтобы определить, какой из двух полуплоскостей принадлежит точка $A(x,\ y)$, достаточно подставить ее координаты в левую часть уравнения прямой и найти знак получившегося значения.

Покажем, как с помощью неравенств можно задавать выпуклые многоугольники.

Действительно, пусть стороны выпуклого многоугольника лежат на прямых, задаваемых уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$.................,$$

$$a_nx + b_ny + c_n = 0.$$

Тогда сам многоугольник является пересечением соответствующих полуплоскостей и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0, \\ \text{.......................,} \\ a_nx + b_ny + c_n \geq 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многоугольник.

Например, неравенства $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 1$, $y \leq 1$, которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

определяют единичный квадрат (рис. 2).

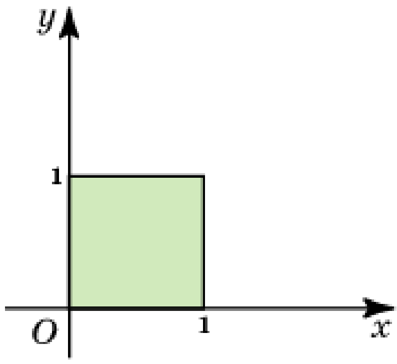

Рис. 2

Если к этим неравенствам добавить еще одно неравенство

$$x + y - \frac{1}{2} \geq 0,$$

то соответствующий многоугольник получается из квадрата отсечением треугольника (рис. 3).

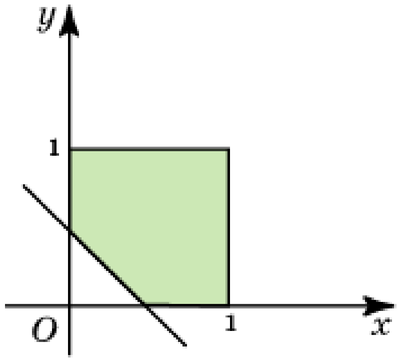

Рис. 3

Пример. Найдите неравенства, задающие треугольник с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$.

Решение. Легко видеть, что уравнения прямых AB, BC и AC имеют вид: $x + y - 1 = 0$, $y - 1 = 0$ и $x - 1 = 0$ соответственно. Подставляя координаты точки C вместо x и y в левой части первого уравнения, получим $1 > 0$. Следовательно, точка C принадлежит полуплоскости $x + y - 1 \geq 0$. Аналогично, точка B принадлежит полуплоскости $x \leq 1$, а точка A – полуплоскости $y \leq 1$. Таким образом, треугольник ABC задается системой неравенств

$$\begin{cases} x + y \geq 1, \\ x \leq 1, \\ y \leq 1. \end{cases}$$

Задачи оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются так называемые задачи оптимизации.

Среди них:

– транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

– задача о диете, т.е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

– задача составления оптимального плана производства;

– задача рационального использования посевных площадей и т.д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л.В. Канторовичем (1912-1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи.

Задача. Пусть на три завода $З_1$, $З_2$, $З_3$, требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность в сырье каждого вида для данных заводов указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода - в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т.е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья (в т) на складе		Потребность в сырье (в т) на заводе		
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$
20	25	10	15	20

Таблица 2

Склад	Расстояние (в км) от склада до завода		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
$С_1$	5	7	10
$С_2$	3	4	6

Для решения этой задачи в первую очередь проанализируем ее условие и переведем его на язык математики, т.е. составим ***математическую модель***. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$ на заводы $З_1$, $З_2$, обозначим через x и y соответственно. Тогда на третий завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y$ тонн сырья, а со второго склада на заводы нужно будет перевезти соответственно $10 - x$, $15 - y$, $x + y$ тонн сырья. Запишем эти данные в виде таблицы 3.

Таблица 3

Склады	Количество сырья (в т), перевезенное на заводы		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
$С_1$	x	y	$20-x-y$
$С_2$	$10-x$	$15-y$	$x+y$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 10 - x \geq 0, \\ 15 - y \geq 0, \\ 20 - x - y \geq 0, \\ x + y \geq 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство является следствием двух первых и его можно отбросить. Оставшиеся неравенства определяют многоугольник *OABCD*, изображенный на рисунке 4. Назовем его ***многоугольником ограничений***.

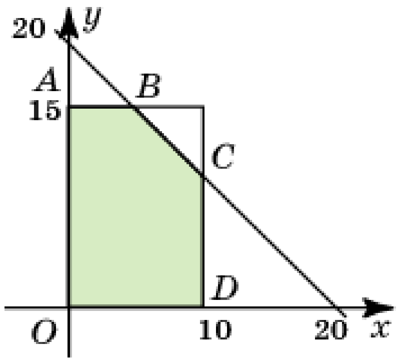

Рис. 4

Для нахождения общего числа тонно-километров умножаем расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты складываем. Общее число тонно-километров выражается формулой

$$5x + 7y + 10(20 - x - y) + 3(10 - x) +4(15 - y) + 6(x + y) = 290 - 2x - y.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 290 - 2x - y$ на многоугольнике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = 2x + y$. Тогда $F_{\min}= 290-f_{\max}$.

Воспользуемся тем, что свои наименьшее и наибольшее значения линейная функция достигает в вершинах многоугольника ограничений. Это свойство является основополагающим в задачах оптимизации.

Используя геометрические соображения, покажем, например, что линейная функция $ax + by$ (b>0) принимает свое наибольшее значение на многоугольнике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение c функции $ax + by$. Тогда уравнение $ax + by$ = с задает прямую на плоскости, которая характеризуется тем, что во всех ее точках данная линейная функция принимает значение c. В точках, расположенных выше этой прямой, она принимает значения, большие c, а в точках, расположенных ниже этой прямой, - значения, меньшие c. Если число c выбрать достаточно большим, то прямая $ax + by = c$ расположится выше многоугольника. Будем опускать эту прямую, уменьшая значения c, до тех пор, пока она не коснется многоугольника. Такое касание произойдет при некотором c_0 в какой-нибудь вершине многоугольника (рис. 74.2) или по какому-нибудь его ребру.

В точках касания линейная функция принимает значение c_0, и, поскольку все остальные точки многоугольника лежат ниже прямой, значения линейной функции в этих точках меньше c_0. Таким образом, c_0 - искомое наибольшее значение. Значит, для нахождения наибольшего значения линейной функции на многоугольнике достаточно вычислить значения функции в вершинах многоугольника и выбрать из них наибольшее. Найдем значения функции $f = 2x + y$ в вершинах многоугольника ограничений, учитывая, что вершины имеют координаты $O(0, 0)$, $A(0, 15)$, $B(5, 15)$, $C(10, 10)$, $D(10, 0)$:

$$f(O) = 0,\ f(A) = 15,\ f(B) = 25,\ f(C) = 30,\ f(D) = 20.$$

Таким образом, максимальное значение функции f достигается в точке $C(10,10)$ и равно 30. Следовательно, наименьшее значение функции F достигается в точке C и равно 290 - 30 = 260. В соответствии с этим наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей 4.

Таблица 4

Склад	Количество сырья (в т), перевезенное на заводы		
	$З_1$	$З_2$	$З_3$
$С_1$	10	10	0
$С_2$	0	5	20

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно двум и поэтому в процессе ее решения получился многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше двух и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n- мерного пространства с очень большим n. При решении таких задач используются электронно-вычислительные машины.

Упражнения

1. Нарисуйте многоугольник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} 0 \le x \le 8, \\ 0 \le y \le 8, \\ x + y \ge 12. \end{cases}$$

2. Две полуплоскости задаются неравенствами

$$a_1x + b_1y + c_1 \ \ge 0,\ a_2x + b_2y + c_2 \ge 0.$$

Как будет задаваться пересечение этих полуплоскостей?

3. Определите, какой полуплоскости $5x + 3y - 2 \ge 0$ или $5x + 3y - 2 \le 0$ принадлежат точки: а)A (1,0); б) B (0,1); в) C (0,0).

4. Какую фигуру задает следующая система неравенств

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 5? \end{cases}$$

5. Изобразите многоугольник, задаваемый неравенствами

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 5, \\ x + y - 6 \ge 0. \end{cases}$$

6. Изобразите кривую, задаваемую уравнением $|x|+|y|=1$.

7. Найдите неравенства, задающие треугольник с вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(4, 2)$.

8. Нарисуйте фигуру, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x+4y-48 \le 0, \\ 3x-4y \ge 0, \\ x \ge 4, y \ge 0; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 2x-y \ge 0, \\ x-y \ge 1, \\ x \le 7, y \ge 0. \end{cases}$$

9. Найдите наибольшее значение функции $F = x + y$ при условии

$$\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, \\ 5x+3y \le 15, \\ 2x+6y \le 12, \\ x \le 3, y \le 2. \end{cases}$$

10. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений

$$\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, \\ -2-2x-y \ge 0, \\ 2-x+y \ge 0, \\ 5-x-y \ge 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

11. Мастерская выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида - 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора первого вида мастерская получает 120 руб., а от реализации одного трансформатора второго вида - 100 руб. Сколько трансформаторов каждого вида нужно выпустить, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если мастерская располагает 480 кг железа и 300 кг проволоки?