ТЕОРЕМЫ МЕНЕЛАЯ И ЧЕВЫ

Рассмотрим общие теоремы, позволяющие устанавливать, в каком случае три точки, лежащие на сторонах треугольника или их продолжениях, принадлежат одной прямой (теорема Менелая), а также, в каком случае три прямые, проходящие через вершины треугольника и противоположные им стороны треугольника, пересекаются в одной точке (теорема Чевы).

Начнем с теоремы Менелая, доказанной древнегреческим математиком и астрономом Менелаем Александрийским, жившим в I веке до нашей эры.

Теорема (Менелая). Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \quad (*)$$

Доказательство (Необходимость). Предположим, что точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой a (рис. 1).

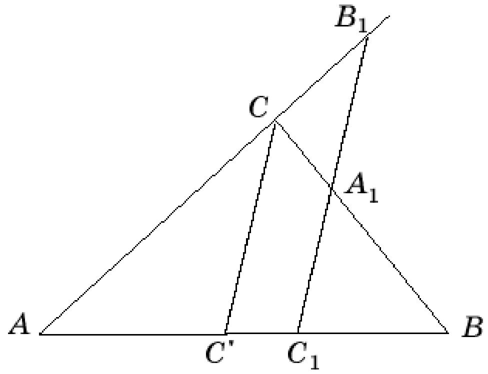

Рис. 1

Через вершину C треугольника ABC проведем прямую, параллельную a и обозначим через C' точку ее пересечения с AB. Из подобия треугольников $AC'C$ и AC_1B следует выполнимость равенства

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{C'C_1}{AC_1}.$$

Аналогично, из подобия треугольников $BC'C$ и BC_1A_1следует выполнимость равенства

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BC_1}{C_1C'}.$$

Перемножая эти равенства, получим равенство

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC_1}{AC_1},$$

из которого следует требуемое равенство.

Приведем еще один способ доказательства необходимости. Предположим, что точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой a. Из вершин треугольника ABC опустим на эту прямую перпендикуляры AA', BB', CC' (рис. 2).

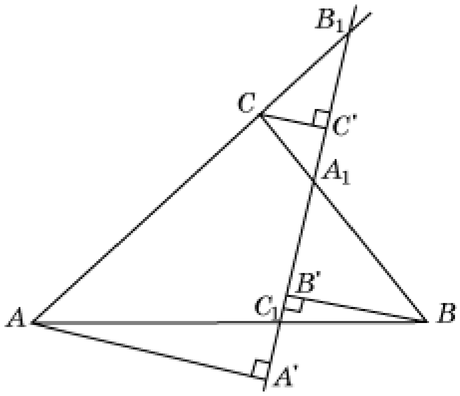

Рис. 2

Из подобия треугольников AC_1A' и BC_1B' следует равенство $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AA'}{BB'}$. Аналогично, из подобия треугольников BA_1B' и CA_1C', B_1CC' и B_1AA' следуют равенства $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BB'}{CC'}, \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CC'}{AA'}$. Перемножая все три эти равенства, получим требуемое равенство (*).

Достаточность. Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1и B_1, для которых выполняется равенство (*). Прямая A_1B_1пересекает прямую AB в точке C'. По доказанному, выполняется равенство

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Учитывая равенство (*), получаем равенство

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC_1}{C_1B},$$

из которого следует совпадение точек C' и C_1. Значит, точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой.

Пример 1. Точка C_1 – середина стороны AB треугольника ABC (рис. 3). Точка B_1 лежит на продолжении стороны AC и $AC = CB_1$. В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC?

Решение. По условию, $\frac{AC_1}{C_1B}=1, \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{1}{2}$. Используя теорему Менелая, находим $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{2}{1}$.

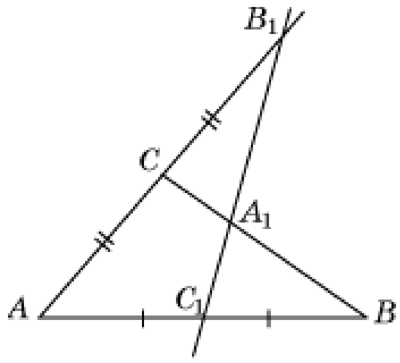

Рис. 3

Пример 2. Докажем, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке, называемой центроидом тетраэдра, и делятся в ней в отношении 3:1, считая от вершин.

Доказательство. Действительно, пусть $ABCD$ – тетраэдр, A_2, D_2 – центроиды соответствующих граней, A_1 – середина BC, O – точка пересечения AA_2 и DD_2 (рис. 4).

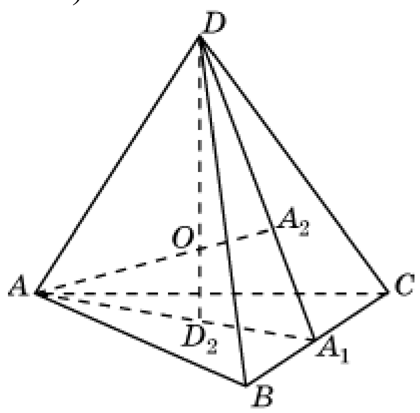

Рис. 4

Применим теорему Менелая к треугольнику A_1DD_2 и прямой AA_2. Имеем

$$\frac{A_1A_2}{A_2D}\cdot\frac{DO}{OD_2}\cdot\frac{D_2A}{AA_1}=1.$$

Так как A_2 – точка пересечения медиан треугольника BCD, то $\frac{A_1A_2}{A_2D}=\frac{1}{2}$.

Так как D_2 – точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\frac{D_2A}{AA_1}=\frac{2}{3}$.

Поэтому $\frac{DO}{OD_2}=\frac{3}{1}$.

Заметим, что в таком же отношении делят отрезок DD_2 прямые BB_2 и CC_2. Следовательно, они также проходят через точку O и делятся в ней в отношении 3:1, считая от вершин.

Задача 1. Докажите, что если прямая пересекает стороны A_1A_2, …, A_nA_1 замкнутой ломаной $A_1\ldots A_n$ или их продолжения в точках B_1, …, B_n, соответственно, то имеет место равенство $\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\ldots\cdot\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=1$.

Задача 2. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1, лежащие на ребрах AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$, принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1.$

Рассмотрим теперь теорему, опубликованную в 1678 году итальянским математиком и инженером Джованни Чевой.

Теорема (Чевы). Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \quad (*)$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O (рис. 5).

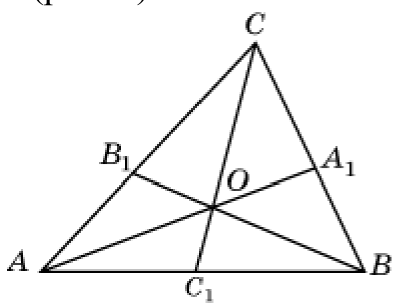

Рис. 5

Применим теорему Менелая к треугольнику BCC_1 и прямой AA_1. получим равенство $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CO}{OC_1}\cdot\frac{C_1A}{AB}=1.$ Аналогично, применяя теорему Менелая к треугольнику ACC_1 и прямой BB_1, получим равенство $\frac{C_1O}{OC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AB}{BC_1}=1.$ Перемножая эти два равенства, получим требуемое равенство.

Предложим еще один способ доказательства теоремы Чевы, использующий понятие площади. Предположим, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O (рис. 6).

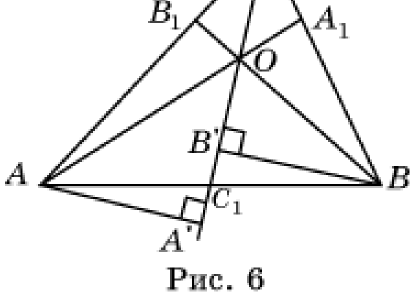

Рис. 6

Опустим из вершин A и B треугольника ABC перпендикуляры AA', BB' на прямую CC_1. Треугольники AC_1A' и BC_1B' подобны и, следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AA'}{BB'}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}.$$

Аналогичным образом показывается, что

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{BOA}}{S_{COA}} \text{ и } \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{COB}}{S_{AOB}}.$$

Перемножая полученные равенства, будем иметь

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Достаточность. Пусть для точек A_1, B_1, C_1, взятых на соответствующих сторонах треугольника ABC выполняется равенство (*). Обозначим точку пересечения прямых AA_1 и BB_1через O и точку пересечения прямых CO и AB через C'. Тогда, на основании доказанного, имеет место равенство

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Учитывая равенство (*), получим равенство

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC_1}{C_1B},$$

из которого следует совпадение точек C' и C_1и, значит, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Заметим, что из этой теоремы непосредственно следует, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Воспользуемся теоремой Чевы для установления еще одной замечательной точки треугольника.

Задача 3. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Чевы для тетраэдра в пространстве.

Пример 3. Докажем, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности пересекаются в одной точке, называемой **точкой Жергона**.

Доказательство. Пусть окружность касается сторон треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1,C_1 (рис. 7).

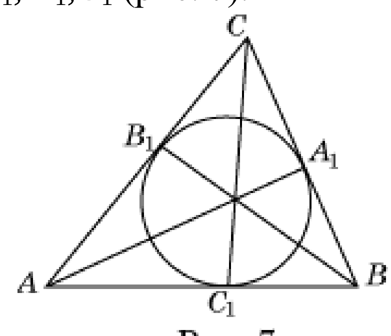

Рис. 7

Тогда $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. Следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

и, значит, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Задача 4. Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вневписанных окружностей, пересекаются в одной точке (**точка Нагеля**). Окружность называется вневписанной в треугольник, если она касается одной стороны этого треугольника и продолжений двух других его сторон.

Задача 5. Докажите следующую теорему.

Теорема (Ван-Обеля). Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 (рис. 5). Если отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O, то

$$\frac{CO}{OC_1}=\frac{CA_1}{A_1B}+\frac{CB_1}{B_1A}.$$

Задача 6. Используя теорему Ван-Обеля, выясните, в каком отношении делятся биссектрисы треугольника ABC ($AB = c$, $AC = b$, $BC = a$) точкой их пересечения.

Теорема Стюарта. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Точка D делит сторону AB на отрезки $AD = c'$, $DB = c''$ и $CD = d$. Тогда имеет место равенство $d^2c = a^2c' + b^2c'' - cc'c''$.

Доказательство. Пусть CE – высота треугольника ABC (рис. 8).

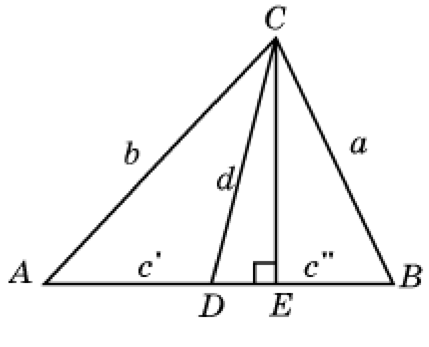

Рис. 8

По теореме косинусов, примененной к треугольникам ADC и BDC, имеем

$b^2 = (c')^2 + d^2 - 2c'DE$, $a^2 = (c'')^2 + d^2 - 2c''DE$.

Умножим первое равенство на c'', второе – на c' и сложим. Получим $b^2c'' + a^2c' = (c'+c'')c'c'' + d^2(c'+c'')$, из которого и следует требуемое равенство.

Пример 4. Используя теорему Стюарта, вычислим биссектрису $CC_1 = \beta_c$ треугольника по его сторонам $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Решение. Воспользуемся тем, что биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Обозначим $AC_1 = c'$, $BC_1 = c''$. Тогда $c' + c'' = c$ и $ac' = bc''$. Из этих двух уравнений находим c' и c''.

$$c' = \frac{bc}{a+b},\ c'' = \frac{ac}{a+b}.$$

Подставляя теперь эти выражения в равенство теоремы Стюарта, получим ($\beta_c)^2 c = a^2\frac{bc}{a+b} + b^2\frac{ac}{a+b} - c\frac{abc^2}{(a+b)^2}$. Откуда

$$\beta_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Задача 7. Вычислите медианы треугольника *ABC* по его сторонам *AB* $=c$, *AC* = b, *BC* = a.

Литература

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть I. Учпедгиз, Москва, 1948.

2. Ефремов Д. Новая геометрия треугольника. Одесса, 1902.

3. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии. Часть I. ОГИЗ, Гостехиздат. Москва, Ленинград, 1948.

4. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962.

5. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.

6. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.

7. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – Части I, II. – М.: Наука, 1986.