КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

В последнее время интерес к комбинаторике в школьном курсе математики заметно возрос. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей включены в новые стандарты по математике для основной и профильной школ. Формирование комбинаторных представлений и развитие комбинаторного мышления школьников входит в число основных целей обучения математике.

Однако обычно, когда говорят об элементах комбинаторики, имеют в виду задачи алгебраического содержания. Здесь мы рассмотрим комбинаторные задачи по геометрии, решением которых можно заниматься, начиная с седьмого и по одиннадцатый класс.

1. Точки и прямые на плоскости

Одной из первых аксиом геометрии, относящейся к взаимному расположению точек и прямых на плоскости, является аксиома о том, что через любые две точки плоскости проходит единственная прямая. Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием сложности.

1.1. Сколько прямых проходит через различные пары из трех точек, не лежащих на одной прямой?

Ответ: 3.

1.2. Сколько прямых проходит через различные пары из четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

Ответ: 6.

1.3. Сколько прямых проходит через различные пары из пяти точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

Ответ: 10.

1.4. Сколько прямых проходит через различные пары из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? Укажите способ построения таких точек.

Решение. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Для построения таких точек достаточно отметить их на окружности.

Выясним, сколько прямых проходит через точку A_1 и оставшиеся точки. Так как число оставшихся точек равно $n - 1$ и через каждую из них и точку A_1 проходит одна прямая, то искомое число прямых будет равно $n - 1$. Заметим, что рассуждения, проведенные для точки A_1, справедливы для любой точки. Поскольку всего точек n и через каждую из них проходит $n - 1$ прямая, то число посчитанных прямых будет равно $n(n - 1)$. Конечно, этот ответ, который могут дать учащиеся, не является верным. Например, при $n = 3$ получаем $n(n-1) = 6$, а число прямых на самом деле равно 3. Хорошо, если учащиеся сами догадаются, что при указанном выше подсчете мы каждую прямую посчитали дважды и поэтому число прямых, проходящих через различные пары из n данных точек, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Приведем еще одно решение этой задачи. Выясним, на сколько увеличивается число прямых при добавлении новой точки к данным. Через две точки проходит одна прямая. Если к данным точкам добавляется третья точка, то к этой прямой добавляется две прямые, проходящие через третью точку и одну из двух данных. Аналогично, если добавить n-ю точку A_n к данным $n-1$ точкам A_1, …, A_{n-1}, то к числу прямых, проходящих через различные пары из точек A_1, …, A_{n-1}, добавятся $n-1$ прямых, проходящих через точку A_n и одну из точек. Таким образом, общее число прямых равно сумме $1 + 2 + \ldots + n - 1$. Эта сумма равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

Полученная формула числа прямых имеет большое значение, в дальнейшем будет появляться при решении различных комбинаторных задач. Поскольку каждая прямая однозначно задается двумя точками, мы, по существу, вычислили, сколько различных пар можно составить из n элементов. При этом не имеет значение, какие это элементы. Число таких пар называется числом сочетаний из n элементов по два и обозначается C_n^2. Например, если в классе 20 учеников, то число различных пар, которые можно образовать из учеников этого класса, равно $C_{20}^2 = 190$.

Следующая серия задач связана с числом попарных пересечений прямых на плоскости. Из сформулированной выше аксиомы непосредственно следует, что две прямые могут иметь не более одной общей точки.

Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием сложности.

1.5. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь три прямые?

Ответ: 3.

1.6. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь четыре прямые?

Ответ: 6.

1.7. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь пять прямых?

Ответ: 10.

1.8. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых? Укажите способ построения таких прямых.

Решение. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая прямая пересекается с каждой, и при этом никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Пример построения попарно пересекающихся прямых показан на рисунке 1.

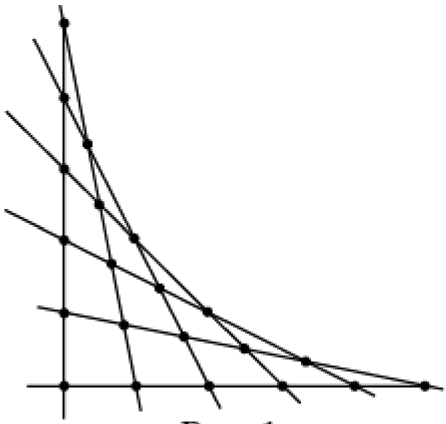

Рис. 1

В этом случае каждая прямая имеет $n - 1$ точку пересечения с остальными прямыми, и мы находимся в ситуации, аналогичной ситуации задачи 1.4. Так как всего прямых n, и на каждой прямой $n - 1$ точка, то их общее число будет равно $n(n - 1)$. При этом, поскольку каждую точку мы подсчитали дважды, число точек пересечения будет равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Можно было бы рассуждать и короче. Действительно, для того, чтобы подсчитать количество точек пересечения, достаточно подсчитать, количество пар прямых, которые можно образовать из данных n прямых. Как мы знаем, это число равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Обратим внимание на то, что формулировка и решение задачи 1.8 похожи на формулировку и решение задачи 1.4.

Действительно, переформулируем утверждения этих задач.

Утверждение 1.4. Число прямых, проходящих через различные пары из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Утверждение 1.8. Число точек попарных пересечений n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Мы видим, что если слово "прямая" в утверждении 1.4* заменить на слово "точка", слово "точка" – на слово "прямая", прохождение прямой через две точки заменить на пересечение двух прямых, и принадлежность трех точек прямой – на пересечение трех прямых в одной точке, то получим утверждение 1.8*. Это же относиться и к доказательствам этих утверждений. Одно получается из другого указанной выше заменой. Такая аналогия называется двойственностью между точками и прямыми.

Еще одной аксиомой, относящейся к взаимному расположению прямых на плоскости, является аксиома о том, что прямая разбивает плоскость на две части. При этом, если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой, а если точки принадлежат одной части, то отрезок, их соединяющий, не пересекается с прямой.

Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием сложности.

1.9. На сколько частей разбивают плоскость две пересекающиеся прямые?

Ответ: 4.

1.10. На сколько частей разбивают плоскость три прямые, пересекающиеся в одной точке?

Ответ. 6.

1.11. На сколько частей разбивают плоскость три попарно пересекающиеся прямые, не пересекающиеся в одной точке?

Ответ: 7.

1.12. На сколько частей разбивают плоскость четыре попарно пересекающиеся прямые, никакие три из которых не пересекающиеся в одной точке?

Ответ: 11.

1.13. На сколько частей разбивают плоскость n прямых, пересекающихся в одной точке?

Ответ. $2n$.

1.14. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекающиеся в одной точке?

Решение. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой прямой к данным. Это увеличение происходит за счет того, что какие-то части плоскости разбиваются новой прямой на меньшие части. Так, если имелось две пересекающиеся прямые, то при добавлении третьей прямой три из имеющихся четырех частей плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно $7 = 4 + 3$. Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой прямой, равно количеству частей новой прямой, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися прямыми. Каждая такая часть новой прямой разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Поскольку n-я прямая пересекается с n – 1 прямой, то она разбивается на n частей и поэтому число частей плоскости увеличивается на n. Таким образом, общее число частей, на которые n прямых разбивают плоскость, равно 4 + 3 + … + n.

Нахождение формулы для этой суммы может быть проведено чисто геометрическими методами. Укажем на один из них, позволяющий найти сумму 1 + 2 + … + n.

Рассмотрим квадрат (n + 1) x (n + 1). Число его клеток равно $(n + 1)^2$. Подсчитаем эти клетки по диагоналям. В первой диагонали имеется одна клетка. Во второй диагонали – 2. И так далее, в n-ой диагонали – n. Таким образом, общее число клеток в диагоналях, расположенных ниже (n + 1)– ой (большой) диагонали, равно 1 + 2 + … + n. Аналогично, общее число клеток в диагоналях, расположенных выше (n + 1)– ой (большой) диагонали, равно 1 + 2 + … + n. Поскольку в большой диагонали (n + 1) клеток, то общее число клеток в квадрате, подсчитанное по диагоналям равно 2(1 + 2 + … + n) + (n + 1). Следовательно, имеем равенство 2(1 + 2 + … + n) + (n + 1) = $(n + 1)^2$, из которого получаем

$$1+2+...+n=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}=\frac{(n+1)n}{2}.$$

Используя эту формулу, находим искомое число частей

$$4 + 3 +\ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}+1.$$

2. Окружности

Вместо прямых на плоскости можно рассмотреть окружности и выяснить количество их точек пересечения.

2.1. Какое наибольшее число точек пересечения могут иметь две окружности?

Учащиеся изображают в тетради две окружности и выясняют, что наибольшее число точек пересечения равно 2.

2.2. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь три окружности?

Решение аналогично предыдущему. Ответ: 6.

2.3. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь четыре окружности?

Решение аналогично предыдущему. Ответ: 12.

2.4. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n окружностей? Укажите способ построения таких окружностей.

Решение. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая окружность пересекается с каждой, и при этом никакие три окружности не пересекаются в одной точке. В этом случае каждая окружность имеет $2(n - 1)$ точку пересечения с остальными окружностями. Число точек попарных пересечений будет равно $2 + 4 + 6 +\ldots+ 2(n - 1) = n(n - 1)$. Нетрудно доказать, что для любого $n > 1$ существует n попарно пересекающихся окружностей. Например, на рисунке 2 приведены пять попарно пересекающихся окружностей.

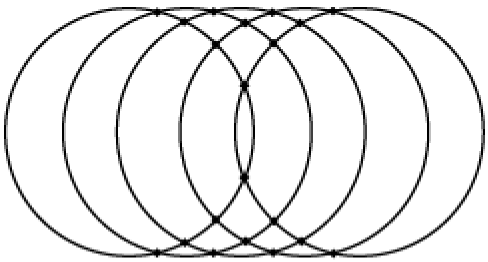

Рис. 2

Выясним теперь, на сколько частей окружности разбивают плоскость.

2.5. На сколько частей разбивают плоскость две пересекающиеся окружности?

Учащиеся изображают в тетради две пересекающиеся окружности и выясняют, что число частей плоскости равно 4.

2.6. На сколько частей разбивают плоскость три попарно пересекающиеся окружности, не пересекающиеся в одной точке?

Решение аналогично предыдущему. Ответ: 8.

2.7. На сколько частей разбивают плоскость четыре попарно пересекающиеся окружности, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Решение аналогично предыдущему. Ответ: 14.

2.8. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся окружностей, никакие три из которых не пересекающиеся в одной точке?

Решение. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой окружности к данным. Это увеличение происходит за счет того, что какие-то части плоскости разбиваются новой окружностью на меньшие части. Так, если имелось две пересекающиеся окружности, то при добавлении третьей окружности все четыре части плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно $8 = 4 + 4$. При добавлении четвертой окружности шесть частей плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно 14 = 8 + 6. Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой окружностью, равно количеству дуг новой окружности, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися окружностями. Каждая такая дуга новой окружности разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Поскольку n-я окружность пересекается с $n - 1$ окружностью, то она разбивается на $2(n - 1)$ дуг и поэтому число частей плоскости увеличивается на $2(n - 1)$. Таким образом, общее число частей, на которые n окружностей разбивают плоскость, равно $4 + 4 + 6 + \ldots + 2(n - 1) = 2(2 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = n(n - 1) + 2$.

3. Многоугольники

При изучении многоугольников и их общих свойств учащимся можно предложить следующие комбинаторные задачи.

3.1. Сколько диагоналей имеет четырехугольник?

Непосредственной проверкой убеждаемся, что число диагоналей равно 2.

3.2. Сколько диагоналей имеет пятиугольник?

Решение аналогично предыдущему. Число диагоналей равно 5.

3.3. Сколько диагоналей имеет шестиугольник?

Решение аналогично предыдущему. Число диагоналей равно 9.

3.4. Сколько диагоналей имеет n-угольник?

Решение. Зафиксируем какую-нибудь вершину n-угольника. Учитывая, что диагональю является отрезок, соединяющий не соседние вершины многоугольника, получаем, что через данную вершину проходит $n - 3$ диагонали. Поскольку общее число вершин равно n, через каждую из них проходит $n - 3$ диагонали, и при таком подсчете каждая диагональ считается дважды, получаем, что общее число диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

3.5. Может ли многоугольник иметь: а) 10 диагоналей; б) 20 диагоналей; в) 30 диагоналей.

Решение. По результатам задачи 3.4 шестиугольник имеет 9 диагоналей, семиугольник – 14; восьмиугольник – 20; девятиугольник – 27; десятиугольник 35. Ясно, что многоугольники с большим числом сторон имеют большее число диагоналей. Поэтому многоугольник может иметь 20 диагоналей и не может иметь 10 или 30 диагоналей.

3.6. Существуют ли многоугольники, у которых число диагоналей равно числу сторон?

Решение. Один из такой многоугольник был рассмотрен в задаче 3.2. Покажем, что многоугольников с другим числом сторон нет. Действительно, если число диагоналей n-угольника равно числу его сторон, то выполняется равенство $\frac{n(n-3)}{2}=n,$ из которого непосредственно следует, что n = 5.