## НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.
## МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Понятие натурального числа является исходным понятием арифметики. Аксиомы натуральных чисел были сформулированы итальянским математиком Д. Пеано:

**1.** Для каждого натурального числа $n$ существует только одно, следующее за ним натуральное число, обозначаемое $n'$.

**2.** Единица, обозначаемая 1, является натуральным числом, причем она не следует ни за каким натуральным числом.

**3.** Ни одно натуральное число не следует за двумя различными натуральными числами.

**4.** Если множество $A$ содержит единицу и вместе с каждым числом $n$ содержит следующее за ним натуральное число $n'$, то $A$ содержит все натуральные числа.

Используя эти аксиомы, для натуральных чисел определяются операции сложения, умножения, деления, отношение порядка и др. В частности, по определению полагается $n + 1 = n'$.

Четвертую аксиому Пеано называют аксиомой математической индукции и именно на ней основан **метод математической индукции**, состоящий в следующем.

Предположим, что нам требуется проверить истинность некоторого утверждения $P(n)$, зависящего от натурального $n$, для всех натуральных чисел $n$. Для этого сначала проверяется истинность утверждения $P(1)$. Затем доказывается, что из истинности утверждения $P(n)$ следует истинность утверждения $P(n+1)$. Тогда из этого следует, что утверждение $P(n)$ истинно для всех натуральных чисел $n$.

Действительно, обозначим через $A$ множество натуральных чисел $n$, для которых истинно утверждение $P(n)$. Тогда единица принадлежит $A$ и из того, что $n$ принадлежит $A$ следует, что $n+1$ принадлежит $A$. Из аксиомы индукции вытекает, что $A$ содержит все натуральные числа, т.е. утверждение $P(n)$ справедливо для всех натуральных чисел.

Приведем пример использования метода математической индукции.

**Пример 1.** Докажите, что для любого натурального $n$ имеет место равенство: $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

**Доказательство.** Непосредственная проверка показывает, что данное равенство верно для $n = 1$.

Предположим, что оно верно для $n$ и докажем, что оно верно для $n + 1$.

Имеем $1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Что и требовалось доказать.

Следующие примеры предлагаем для самостоятельного доказательства.

**Пример 2.** Докажите, что для любого натурального $n$ имеет место равенство: $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

**Пример 3.** Докажите, что для любого натурального $n$ имеет место равенство: $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (n-1)n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

**Пример 4.** Докажите, что для любого натурального $n$ имеет место равенство: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**Пример 5.** Докажите, что для любого натурального $n$ имеет место равенство: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Используя метод математической индукции, докажем следующую теорему.

**Теорема.** Всякое непустое конечное подмножество множества натуральных чисел имеет наибольший и наименьший элементы.

**Доказательство.** Проведем индукцию по числу элементов множества $A$. Если множество $A$ состоит из одного элемента, то этот элемент будет наибольшим и наименьшим. Предположим, что любое подмножество натуральных чисел, состоящее из $n$ элементов, имеет наибольший и наименьший элемент. Возьмем произвольное подмножество $A$ из $n + 1$ элементов. Удалим из $A$ какой-нибудь элемент $m$. Получим множество $A'$, состоящее из $n$ элементов. По предположению, в нем имеются наибольший элемент $b$ и наименьший элемент $a$. Если $b > m$, то $b$ является наибольшим элементом множества $A$. Если же $b < m$, то наибольшим элементом является $m$. Аналогичным образом находится наименьший элемент множества $A$. Таким образом, множество $A$ имеет наибольший и наименьший элементы. Что и завершает доказательство.

**Следствие.** Всякое непустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

**Доказательство.** Пусть $B$ – непустое подмножество натуральных чисел. Рассмотрим какой-нибудь его элемент $b$. Подмножество $A$ множества $B$, состоящее из элементов, не превосходящих $b$, не пусто и конечно. Следовательно, оно имеет наименьший элемент $a$. Этот элемент и будет наименьшим элементом множества $B$.

В некоторых случаях оказывается удобным пользоваться несколько видоизмененным методом математической индукции, начинающимся не с единицы, а с некоторого натурального числа $m$. А именно.

Если утверждение $P(n)$, зависящее от натурального $n$, истинно для $n = m$, и из того, что оно истинно для $n \geq m$ следует, что оно истинно для $n + 1$, то утверждение $P(n)$ истинно для всех $n \geq m$.

Действительно, возьмем в качестве множества $A$ множество натуральных чисел от 1 до $m$ и натуральных чисел $n \geq m$, для которых истинно утверждение $P(n)$. Тогда $A$ будет содержать все натуральные числа и, значит, утверждение $P(n)$ истинно для всех $n \geq m$.

Приведем пример использования такого метода математической индукции.

**Пример 6.** Докажите, что для любого $n \geq 4$ выполняется неравенство $n! > 2^n$.

**Доказательство.** При $n = 4$ имеем $4! = 24 > 2^4 = 16$.

Предположим, что для $n \geq 4$ выполняется неравенство $n! > 2^n$, и докажем выполнимость неравенства $(n + 1)! > 2^{n+1}$.

Имеем, $(n + 1)! = (n +1)n! > (n + 1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Следовательно, неравенство $n! > 2^n$ справедливо для любого $n \geq 4$.

**Пример 7.** Докажите, что для любого натурального $n > 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

Рассмотрим еще один вариант метода математической индукции.

Пусть $P(n)$ – утверждение, зависящее от натурального $n$. Если из того, что оно истинно для всех натуральных чисел $m < n$ следует, что оно истинно для $n$, то утверждение $P(n)$ истинно для всех натуральных $n$.

В самом деле, обозначим через $B$ подмножество натуральных чисел, для которых $P(n)$ ложно. Если это подмножество не пусто, то в нем имеется наименьший элемент $n$. Тогда для всех $m < n$ утверждение $P(m)$ истинно и, следовательно, по условию оно должно быть истинно для $n$. Противоречие. Следовательно, неверным было наше предположение о том, что $B$ не пусто и, значит, $B$ пусто, т.е. утверждение $P(n)$ истинно для всех натуральных $n$.

Приведем пример использования такого метода математической индукции.

**Пример 8.** Докажите, что любое натуральное число или равно единице, или является простым, или его можно представить в виде произведения простых чисел.

**Доказательство.** Предположим, что для всех чисел $m < n$ это выполняется. Рассмотрим число $n$. Оно или равно единице, или простое, или составное. В третьем случае оно представимо в виде произведения $n = n' \cdot n''$, где $n'$ и $n''$ – натуральные числа, большие единицы и меньшие $n$. По предположению индукции они или простые или представимы в виде произведения простых чисел. Следовательно, и $n$ будет представимо в виде произведения простых чисел.

Что и завершает доказательство.

**Пример 9.** Докажите, что любую карту на плоскости, образованную прямыми, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние области имели разный цвет.

**Пример 10.** На сколько частей разбивают плоскость $n$ попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

**Пример 11.** На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость $n$ окружностей?

**Пример 12.** Найдите ошибку в доказательстве следующего утверждения и приведите контрпример (журнал Квант, 2011, № 4).

Если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный.

Доказательство. Если треугольник разбит одним отрезком на два треугольника, то один из них не остроугольный.

Пусть треугольник разбит $n$ отрезками на треугольники. Проведем еще один отрезок, разбивающий один из этих треугольников на два.

Тогда имеем $n+1$ отрезок, и один из двух новых треугольников будет не остроугольным. Что и завершает доказательство.

**Неравенство Коши.** Для любого натурального $n$ и любых неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_n$ имеет место неравенство

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

означающее, что среднее арифметическое неотрицательных чисел больше или равно их среднего геометрического.

**Доказательство.** Заметим, что если хотя бы одно из чисел равно нулю, то неравенство очевидно. Предположим, что все числа больше нуля. Разделим обе части неравенства на $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n}$, и положим $x_i = \dfrac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}$, $1 \le i \le n$. Тогда неравенство Коши преобразуется в неравенство

$$(*)\ x_1 + \ldots + x_n \ge n,$$

в котором $x_1, \ldots, x_n > 0$ и $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$.

Если мы докажем, что для любого натурального $n$ и любых положительных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих равенству $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, выполняется неравенство (*), то подставляя $x_i = \dfrac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}$, $1 \le i \le n$, получим неравенство Коши.

Докажем неравенство (*) индукцией по $n$. Для $n = 1$ неравенство очевидно. Предположим, что неравенство верно для $n$ и докажем, что оно верно для $n + 1$, т.е.

$$x_1 + \ldots + x_{n+1} \ge n + 1.$$

Если все числа $x_1, \ldots, x_{n+1}$ равны 1, то неравенство очевидно. Предположим, что одно из них, например $x_{n+1}$, большее 1. Тогда найдется другое, например $x_n$, меньшее 1. В этом случае имеет место неравенство $(x_{n+1} - 1)(1 - x_n) > 0$, или

$$x_n + x_{n+1} > x_n x_{n+1} + 1.$$

По предположению индукции неравенство (*) верно для $n$. В частности, имеет место неравенство

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} \ge n.$$

Следовательно, имеем: $x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} > x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} + 1 \ge n + 1$. Что и требовалось доказать.

**Литература**


1. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. – М.: Просвещение, 1976 (http://www.mccme.ru/free-books).
2. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров, 1994 (http://www.mccme.ru/free-books).
3. Иванов О.А. Элементарная математика. – М.: МЦНМО, 2009.
4. Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М. О математической индукции. – М.: Наука, 1967 (http://www.mccme.ru/free-books).
5. Шень А. Математическая индукция. – М.: МЦНМО, 2004 (http://www.mccme.ru/free-books).