ИЗМЕРЕНИЕ ДВУГРАННЫХ И МНОГОГРАННЫХ УГЛОВ

Двугранные и многогранные углы входят в новые стандарты по математике как базового, так и профильного уровня обучения в старших классов. Однако задачам на вычисление этих углов обычно не уделяется должного внимание. В то же время решение таких задач способствует выработке необходимых вычислительных навыков, повторяет различные планиметрические формулы и соотношения, развивает пространственные представления учащихся.

Здесь мы рассмотрим вопрос об измерении двугранных и многогранных углов. Предлагаемый материал и задачи могут быть использованы на профильном уровне при изучении темы «Правильные многогранники», при проведении элективных курсов, подготовке учащихся к решению олимпиадных задач и задач вступительных экзаменов по математике в вузы.

Начнем с двугранных углов. Двугранный угол является пространственным аналогом угла на плоскости. Напомним, что углом на плоскости называется фигура, образованная двумя лучами этой плоскости с общей вершиной и частью плоскости, ограниченной этими лучами. Будем считать аналогом точки на плоскости прямую в пространстве и аналогом луча на плоскости полуплоскость в пространстве. Тогда, по этой аналогии, двугранным углом в пространстве называют фигуру (рис. 1), образованную двумя полуплоскостями, с общей ограничивающей их прямой, и частью пространства, ограниченной этими полуплоскостями. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

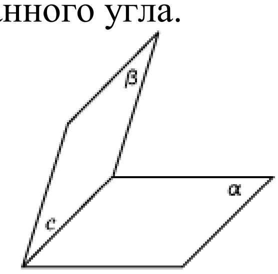


Рис. 1

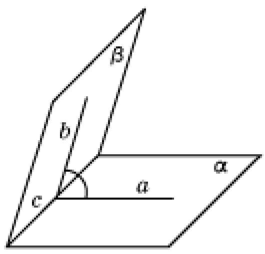


Рис. 2

Линейным углом двугранного угла называется угол, полученный в результате пересечения данного двугранного угла и какой-нибудь плоскости, перпендикулярной его ребру (рис. 2).

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

В школьном курсе геометрии доказывается, что величина линейного угла не зависит от выбора плоскости, перпендикулярной его ребру.

Найдем двугранные углы правильных многогранников.

Ясно, что двугранные углы $\varphi_{куб}$ куба (рис. 3) равны 90°. Рассмотрим правильный тетраэдр *ABCD* с ребром 1 (рис. 4). Из вершин

A и *D* опустим перпендикуляры *AE* и *DE* на ребро *BC*. Для нахождения двугранного угла $\varphi_{тет} = \angle AED$ воспользуемся теоремой косинусов, примененной к треугольнику *ADE*, в котором $AD = 1$, $AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Имеем равенство $1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2\frac{3}{4}\cos\varphi_{тет}$. Откуда $\cos\varphi_{тет} = \frac{1}{3}$, $\varphi_{тет} \approx 70°30'$.

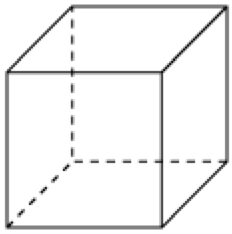


Рис. 3

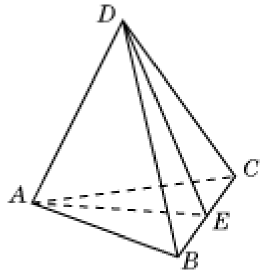


Рис. 4

Вычислим косинус двугранного угла октаэдра с ребром 1. Для этого из вершин *E* и *F* (рис. 5) опустим перпендикуляры *EG* и *FG* на ребро *BC*. $EG = FG = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Четырехугольник *AECF* – квадрат со стороной 1 и, следовательно, $EF = \sqrt{2}$. По теореме косинусов имеем $2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2\frac{3}{4}\cos\varphi_{окт}$. Откуда $\cos\varphi_{окт} = -\frac{1}{3}$, $\varphi_{окт} \approx 109°30'$.

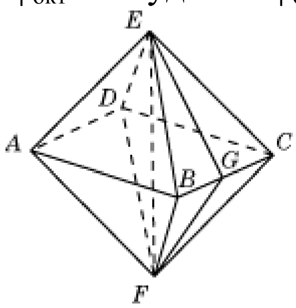


Рис. 5

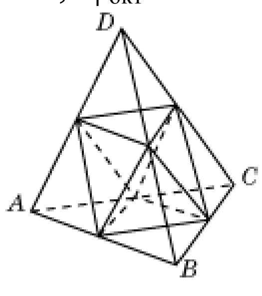


Рис. 6

Заметим, что двугранные углы тетраэдра и октаэдра в сумме составляют 180°. Этот факт можно вывести и не вычисляя двугранных углов, а используя то, что середины ребер правильного тетраэдра являются вершинами октаэдра (рис. 6).

Вычислим косинус двугранного угла икосаэдра с ребром 1. Для этого из *A* и *C* опустим перпендикуляры *AG* и *CG* на ребро *BF* (рис. 7). $AG = CG = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *AC* является диагональю правильного пятиугольника *ABCDE* с ребром 1 и, следовательно, $AC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. По теореме косинусов, имеем $\frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2\frac{3}{4}\cos\varphi_{ико}$. Откуда $\cos\varphi_{ико} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\varphi_{ико} \approx 138°11'$.

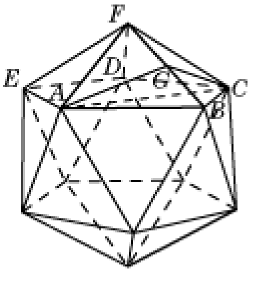


Рис. 7

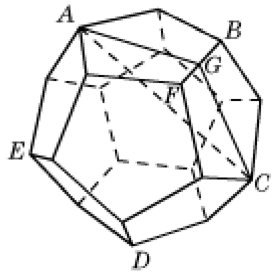


Рис. 8

Вычислим косинус двугранного угла додекаэдра с ребром 1. Для этого из вершин *A* и *C* опустим перпендикуляры *AG* и *CG* на ребро *BF* (рис. 8). $AG = CG = \sqrt{AF^2 - FG^2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+5}}{2}$. *AC* является диагональю правильного пятиугольника *ABCDE* с ребром $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Поэтому, $AC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$. По теореме косинусов, имеем $\frac{6\sqrt{5}+14}{4} = \frac{2\sqrt{5}+5}{4} + \frac{2\sqrt{5}+5}{4} - 2\frac{2\sqrt{5}+5}{4}\cos\varphi_{дод}$. Откуда $\cos\varphi_{дод} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\varphi_{дод} \approx 116°34'$.

Из приведенных вычислений, в частности следует, что из равных правильных многогранников, отличных от куба, нельзя составить пространственный паркет (заполнить все пространство). Действительно, если бы, такое заполнение пространства существовало, то сумма двугранных углов правильных многогранников с общим ребром должна была быть равна 360°. Следовательно, величина двугранного угла правильного многогранника могла бы быть получена делением 360° на натуральное число. Непосредственно видно, что из правильных многогранников этим свойством обладает только куб.

Пространственный паркет можно составить используя тетраэдр и октаэдр. Для этого сначала нужно к двум противоположным граням октаэдра приставить тетраэдры (рис. 9). В результате получим параллелепипед, гранями которого являются ромбы. А уже затем из этих параллелепипедов составить пространственный паркет.

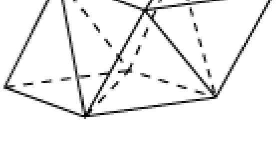


Рис. 9

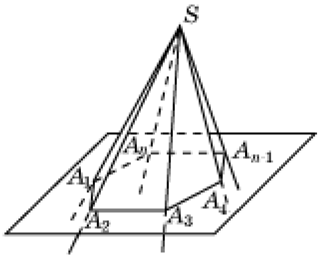


Рис. 10

Перейдем теперь к многогранным углам. Многогранный угол является пространственным аналогом многоугольника. Напомним, что многоугольником на плоскости называется фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью. Будем считать аналогом точки на плоскости луч в пространстве и аналогом отрезка на плоскости плоский угол в пространстве. Тогда аналогом простой замкнутой ломаной на плоскости является поверхность, образованная конечным набором плоских углов A_1SA_2, A_2SA_3, …, $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 с общей вершиной S (рис. 10), в которых соседние углы не имеют общий точек, кроме точек общего луча, а несоседние углы не имеют общих точек, кроме общей вершины. Фигура, образованная указанной поверхностью и одной из двух частей пространства, ею ограниченных, называется многогранным углом. Общая вершина S называется вершиной многогранного угла. Лучи SA_1, …, SA_n называются ребрами многогранного угла, а сами плоские углы A_1SA_2, A_2SA_3, …, $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 – гранями многогранного угла. Многогранный угол обозначается буквами $SA_1…A_n$, указывающими вершину и точки на его ребрах. В зависимости от числа граней многогранные углы бывают трехгранными, четырехгранными, пятигранными (рис. 11) и т. д.

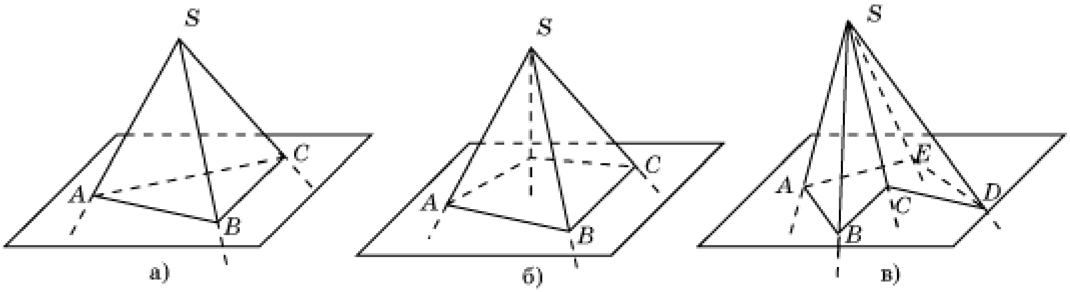


Рис. 11

Рассмотрим вопрос об измерении многогранных углов. Поскольку градусная величина развернутого двугранного угла измеряется градусной величиной соответствующего линейного угла и равна 180°, то будем считать, что градусная величина всего пространства, которое состоит из двух развернутых двугранных углов, равна 360°. Величина многогранного угла, выраженная в градусах, показывает какую часть пространства занимает данный многогранный угол. Например, трехгранный угол куба занимает одну восьмую часть пространства и, значит, его градусная величина равна $\frac{1}{8}360°=45°$. Трехгранный угол в правильной n-угольной призме равен половине двугранного угла при боковом ребре. Учитывая, что этот двугранный угол равен $\frac{180°(n-2)}{n}$, получаем, что трехгранный угол призмы равен $\frac{90°(n-2)}{n}$.

В школьном курсе геометрии доказывается, что для выпуклого n-угольника имеет место следующая формула для суммы его углов

$$\Sigma_n = 180°(n-2).$$

Здесь мы получим пространственный аналог этой формулы для выпуклых многогранных углов.

Начнем с трехгранного угла. Опишем около его вершины S единичную сферу и обозначим точки пересечения ребер трехгранного угла с этой сферой A, B, C (рис. 12).

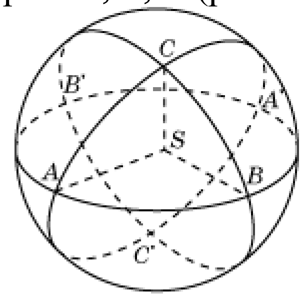


Рис. 12

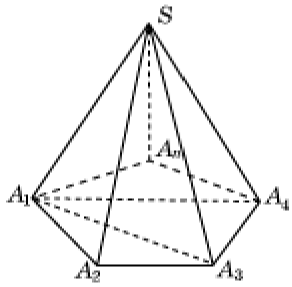


Рис. 13

Плоскости граней трехгранного угла разбивают эту сферу на шесть попарно равных сферических двуугольников, соответствующих двугранным углам данного трехгранного угла. Сферический треугольник ABC и симметричный ему сферический треугольник $A'B'C'$ являются пересечением трех двуугольников. Поэтому удвоенная сумма двугранных углов равна 360° плюс учетверенная величина трехгранного угла, или

$$(1) \quad \angle SA + \angle SB + \angle SC = 180° + 2\angle SABC.$$

Пусть теперь $SA_1...A_n$ – выпуклый n-гранный угол (рис. 13). Разбивая его на трехгранные углы, проведением диагоналей A_1A_3, ..., A_1A_{n-1} и применяя к ним полученную формулу, будем иметь

$$(2) \quad \angle SA_1 + \ldots + \angle SA_n = 180°\,(n-2) + 2\angle SA_1\ldots A_n,$$

Используя эти формулы, вычислим многогранные углы $\psi_{куб}$, $\psi_{тет}$, $\psi_{окт}$, $\psi_{ико}$, $\psi_{дод}$, правильных многогранников. Имеем

$$\psi_{куб} = 45°;\ \psi_{тет} = \frac{3}{2}\varphi_{тет} - 90° \approx 15°45';\ \psi_{окт} = 2\varphi_{окт} - 180° \approx 38°56';$$

$$\psi_{ико} = \frac{5}{2}\varphi_{ико} - 270° \approx 75°28';\ \psi_{дод} = \frac{3}{2}\varphi_{дод} - 90° \approx 84°51'.$$

Найдем двугранные и многогранные углы ромбододекаэдра – многогранника, гранями которого являются двенадцать ромбов (рис. 14).

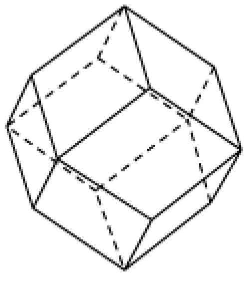


Рис. 14

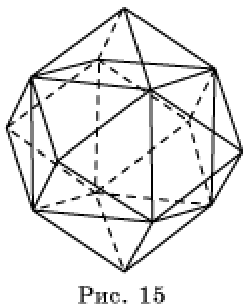


Рис. 15

Воспользуемся тем, что ромбододекаэдр может быть получен из двух равных кубов. А именно, разобьем один из двух кубов на правильные четырехугольные пирамиды, основаниями которых служат грани куба, а вершинами – центр куба. Поставим эти пирамиды основаниями на грани другого куба (рис. 15). Получим ромбододекаэдр.

Из этого построения, в частности следует, что равными ромбододекаэдрами можно заполнить все пространство (составить пространственный паркет). Для этого сначала заполним пространство равными кубами, закрашенными в черный и белый цвета в шахматном порядке. Затем белые кубы разобьем на правильные четырехугольные пирамиды и присоединим их к черным кубам. Получим искомое заполнение пространства ромбододекаэдрами. При этом в каждой вершине сходится или шесть равных четырехгранных углов, или четыре равных трехгранных углов ромбододекаэдров.

Таким образом, величина четырехгранного угла ромбододекаэдра равна 60°, а величина трехгранного угла ромбододекаэдра равна 90°.

Двугранные углы ромбододекаэдра находятся из приведенной выше формулы (3) и равны 120°.

Используя теорему Эйлера о числе вершин ребер и граней выпуклого многогранника (В–Р+Г=2), выведем формулу, связывающую суммы двугранных и многогранных углов выпуклого многогранника.

Пусть n_1, ..., $n_в$ - количества ребер, сходящихся в вершинах данного многогранника. Тогда, суммируя соответствующие равенства по всем вершинам многогранника, и учитывая, что при этом каждый двугранный угол считается дважды, получим равенство

$$2\Sigma_2 = 180°(n_1 - 2) + ... + 180°(n_в - 2) + 2\Sigma,$$

где Σ_2, Σ - суммы двугранных и многогранных углов данного многогранника.

Заметим, что $n_1 + ... + n_в = 2Р$. Следовательно, будем иметь равенство

$$\Sigma_2 = 180°(Р - В) + \Sigma,$$

или, окончательно, используя соотношение Эйлера, В – Р + Г = 2, получаем

$$\Sigma_2 = 180°(Г - 2) + \Sigma.$$

Многогранные углы можно измерять и числами. Действительно, тремстам шестидесяти градусам всего пространства соответствует число 2π, равное половине площади единичной сферы. Поэтому численной величиной многогранного угла считают половину площади сферического многоугольника, высекаемого многогранным углом из единичной сферы с центром в вершине данного многогранного угла.

Например, численная величина трехгранного угла куба будет равна $\frac{\pi}{4}$.

Переходя от градусов к числам в формулах 1 и 2, связывающих двугранные углы трехгранного и многогранного углов, будем иметь

$$(3) \quad \angle SAB + \angle SB + \angle SC = \pi + 2\angle SABC.$$

$$(4) \quad \angle SA_1 + \ldots + \angle SA_n = \pi(n-2) + 2\angle SA_1 \ldots A_n.$$

Заменяя в этих формулах величины трехгранного и многогранного углов на площади сферических треугольника и многоугольника, соответственно, получим формулы для площадей сферического треугольника ABC и многоугольника $A_1 \ldots A_n$.

$$(5) \quad S(ABC) = \angle SA + \angle SB + \angle SC - \pi.$$

$$(6) \quad S(A_1 \ldots A_n) = \angle SA_1 + \ldots + \angle SA_n - \pi(n-2).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Чему равен трехгранный угол, образованный диагоналями граней куба, выходящими из одной вершины?

2. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка O – центр описанной сферы. Найдите трехгранный угол $OABC$ и двугранные углы OA, OB, OC.

3. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 1, сторона основания $\sqrt{2}$. Найдите трехгранный угол при вершине и двугранные углы при боковых ребрах этой пирамиды.

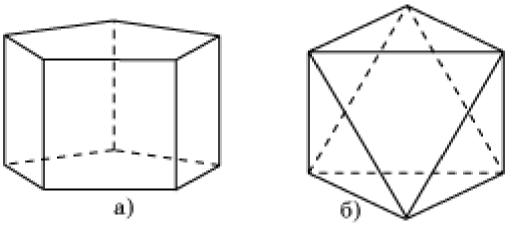
4. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 1, высота $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Найдите трехгранный угол при вершине и двугранные углы при боковых ребрах этой пирамиды.

5. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания и боковое ребро равно 1. Чему равны двугранные и трехгранные углы при основании?

6. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 2 см, высота 1 см. Чему равен многогранный угол при вершине этой пирамиды?

7. В правильной пятиугольной пирамиде сторона основания и боковое ребро равны 1. Чему равен пятигранный угол при вершине этой пирамиды?

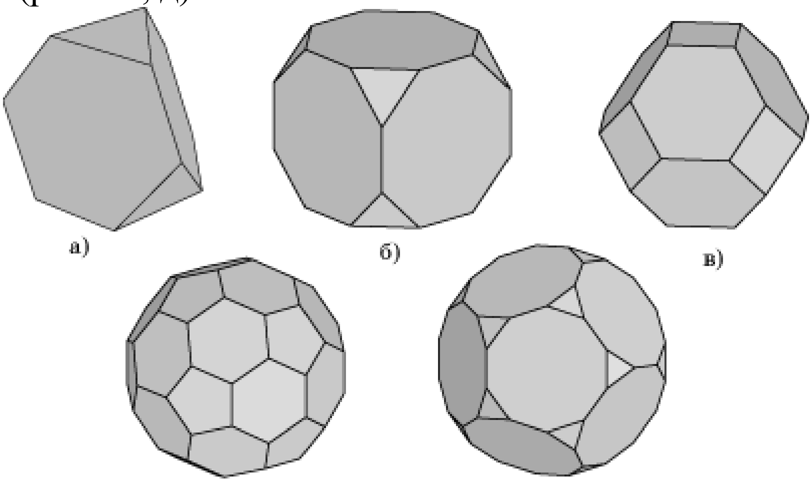
8. Найдите двугранные и многогранные углы: а) правильной пятиугольной призмы (рис. 16, а); б) правильной треугольной антипризмы (рис. 16, б).



а) б)

Рис. 16

9. Найдите двугранные и многогранные углы: а) усеченного тетраэдра (рис. 17, а); б) усеченного куба (рис. 17, б); в) усеченного октаэдра (рис. 17, в); г) усеченного икосаэдра (рис. 17, г); д) усеченного додекаэдра (рис. 17, д).

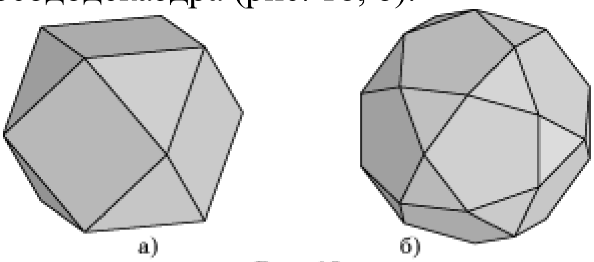


а) б) в)

г) Рис. 17 д)

10. Докажите, что из равных усеченных октаэдров можно составить пространственный паркет.

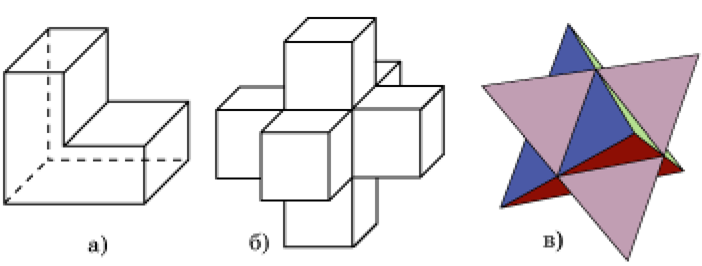
11. Найдите двугранные и многогранные углы: а) кубооктаэдра (рис. 18, а); б) икосододекаэдра (рис. 18, б).



а) б)

Рис. 18

12. Найдите величины невыпуклых многогранных углов многогранников, изображенных на рисунке 19, а-в.



а) б) в)

Рис. 19

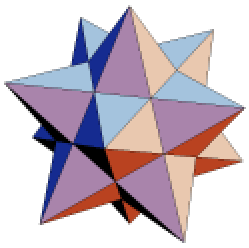


Рис. 20

13. Найдите двугранные и многогранные углы малого звездчатого додекаэдра (рис. 20), получающегося из додекаэдра продолжением его ребер.

14. Верна ли формула (2) для невыпуклых многогранных углов? Почему?

15. Найдите площадь части сферы с центром в вершине единичного куба и радиусом 1, заключенной внутри этого куба.

16. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 2 см, высота 1 см. Найдите площадь части сферы с центром в вершине пирамиды и радиусом 1 см, заключенной внутри пирамиды.

17. Чему равна площадь сферического треугольника на единичной сфере, все углы которого равны: а) 80°; б) 90°; в) 100°?

18. Выведите формулу площади сферического n-угольника на сфере радиуса R, все углы которого равны φ. В каких пределах может изменяться φ?