МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Многогранный угол является пространственным аналогом многоугольника. Напомним, что многоугольником на плоскости называется фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью. Будем считать аналогом точки на плоскости луч в пространстве и аналогом отрезка на плоскости плоский угол в пространстве. Тогда аналогом простой замкнутой ломаной на плоскости является поверхность, образованная конечным набором плоских углов A_1SA_2, A_2SA_3, …, $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 с общей вершиной S (рис. 1), в которых соседние углы не имеют общий точек, кроме точек общего луча, а несоседние углы не имеют общих точек, кроме общей вершины. Фигура, образованная указанной поверхностью и одной из двух частей пространства, ею ограниченных, называется **многогранным углом**. Общая вершина S называется **вершиной** многогранного угла. Лучи SA_1, …, SA_n называются **ребрами** многогранного угла, а сами плоские углы A_1SA_2, A_2SA_3, …, $A_{n-1}SA_n$, A_nSA_1 – **гранями** многогранного угла. Многогранный угол обозначается буквами $SA_1…A_n$, указывающими вершину и точки на его ребрах. В зависимости от числа граней многогранные углы называются трехгранными, четырехгранными, пятигранными (рис. 2) и т. д.

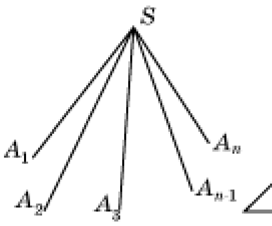

Рис. 1

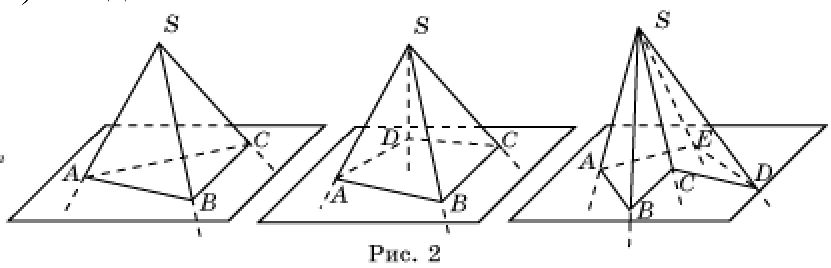

Рис. 2

Многогранный угол называется **выпуклым**, если он является выпуклой фигурой, т.е. вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок. На рисунке 2 трехгранный и четырехгранный углы выпуклые, а пятигранный угол – нет.

Рассмотрим некоторые свойства треугольников и аналогичные им свойства трехгранных углов.

Свойство 1 (Неравенство треугольника). Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Аналогичным свойством для трехгранных углов является следующее свойство.

Свойство 1'. Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Доказательство. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$. Пусть наибольший из его плоских углов есть угол ASC. Тогда выполняются неравенства

$$\angle ASB \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC; \angle BSC \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB.$$

Таким образом, остается доказать неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Отложим на грани ASC угол ASD, равный ASB, и точку B выберем так, чтобы $SB = SD$ (рис. 3). Тогда треугольники ASB и ASD равны (по двум сторонам и углу между ними) и, следовательно, $AB = AD$. Воспользуемся неравенством треугольника $AC < AB + BC$. Вычитая из обеих его частей $AD = AB$, получим неравенство $DC < BC$. В треугольниках DSC и BSC одна сторона общая (SC), $SD = SB$ и $DC < BC$. В этом случае против большей стороны лежит больший угол и, следовательно, $\angle DSC < \angle BSC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол ASD, равный ASB, получим требуемое неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

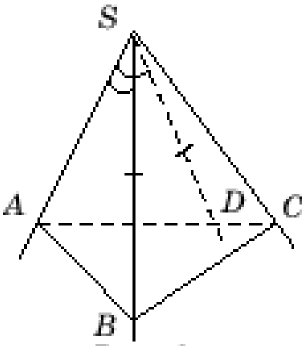

Рис. 3

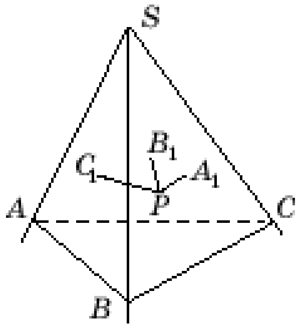

Рис. 4

Следствие 1. Сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360°.

Доказательство. Пусть $SABC$ – данный трехгранный угол. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной A, образованный гранями ABS, ACS и углом BAC. В силу доказанного свойства, имеет место неравенство $\angle BAC < \angle BAS + \angle CAS$. Аналогично, для трехгранных углов с вершинами B и C имеют место неравенства: $\angle ABC < \angle ABS + \angle CBS$, $\angle ACB < \angle ACS + \angle BCS$. Складывая эти неравенства и учитывая, что сумма углов треугольника ABC равна 180°, получаем $180° < \angle BAS + \angle CAS + \angle ABS + \angle CBS + \angle BCS + \angle ACS = 180° - \angle ASB + 180° - \angle BSC + 180° - \angle ASC$. Следовательно, $\angle ASB + \angle BSC + \angle ASC < 360°$.

Следствие 2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Доказательство аналогично предыдущему.

Следствие 3. Сумма двугранных углов трехгранного угла больше 180°.

Доказательство. Пусть $SABC$ – трехгранный угол. Выберем какую-нибудь точку P внутри него и опустим из нее перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на грани (рис. 4).

Плоские углы B_1PC_1, A_1PC_1, A_1PB_1 дополняют соответствующие двугранные углы с ребрами SA, SB, SC до 180° . Следовательно, сумма этих двугранных углов равна $540° - (\angle B_1PC_1 + \angle A_1PC_1 + \angle A_1PB_1)$. Учитывая, что сумма плоских углов трехгранного с вершиной P угла меньше 360° , получаем, что сумма двугранных углов исходного трехгранного угла больше 180°.

Свойство 2. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Свойство 2'. Биссектральные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

Доказательство аналогично плоскому случаю. А именно, пусть $SABC$ – трехгранный угол. Биссектральная плоскость двугранного угла SA является ГМТ угла, равноудаленных от его граней ASC и ASB. Аналогично, биссектральная плоскость двугранного угла SB является ГМТ угла, равноудаленных от его граней BSA и BSC. Линия их пересечения SO будет равноудалена от всех граней трехгранного угла и, следовательно, через нее будет проходить биссектральная плоскость двугранного угла SC.

Свойство 3. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Свойство 3'. Плоскости, проходящие через биссектрисы граней трехгранного угла и перпендикулярные этим граням, пересекаются по одной прямой.

Доказательство аналогично доказательству предыдущего свойства.

Свойство 4. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Свойство 4'. Плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и биссектрисы противоположных граней пересекаются по одной прямой.

Доказательство. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$, $SA = SB = SC$ (рис. 5). Тогда биссектрисы SA_1, SB_1, SC_1 углов BSC, ASC, ASB являются медианами соответствующих треугольников. Поэтому AA_1, BB_1, CC_1– медианы треугольника ABC. Пусть O – точка их пересечения. Прямая SO содержится во всех трех рассматриваемых плоскостях и, следовательно, является линией их пересечения.

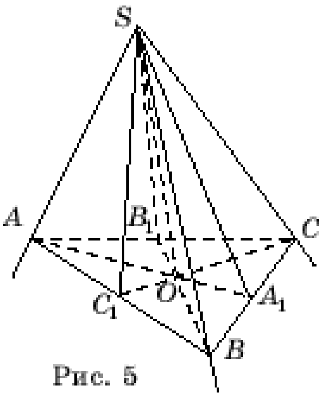

Рис. 5

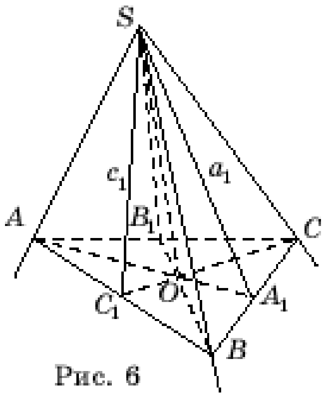

Рис. 6

Свойство 5. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Свойство 5'. Плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и перпендикулярные противоположным граням, пересекаются по одной прямой.

Доказательство. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной S и ребрами a, b, c. Обозначим a_1, b_1, c_1– линии пересечения граней с плоскостями, проходящими через соответствующие ребра и перпендикулярные этим граням (рис. 6). Зафиксируем точку C на ребре c и опустим из нее перпендикуляры CA_1 и CB_1 на прямые a_1 и b_1. Обозначим A и B пересечения прямых CA_1 и CB_1 с прямыми a и b. Тогда SA_1 является проекцией AA_1 на грань BSC. Так как BC перпендикулярна SA_1, то она перпендикулярна и AA_1. Аналогично, AC перпендикулярна BB_1. Таким образом, AA_1 и BB_1 являются высотами треугольника ABC. Пусть O – точка их пересечения. Плоскости, проходящие через прямые a и a_1, b и b_1 перпендикулярны плоскости ABC и, следовательно, линия их пересечения SO перпендикулярна ABC. Значит, SO перпендикулярна AB. С другой стороны, CO перпендикулярна AB. Поэтому плоскость, проходящая через ребро c и SO будет перпендикулярна противоположной грани.

Свойство 6 (теорема синусов). В треугольнике ABC со сторонами a, b, c соответственно, имеют место равенства $a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C$.

Свойство 6'. Пусть α, β , γ - плоские углы трехгранного угла, a, b, c – противолежащие им двугранные углы. Тогда $\sin \alpha : \sin a = \sin \beta : \sin b = \sin \gamma : \sin c$.

Доказательство.Пусть $SABC$ – трехгранный угол. Опустим из точки C перпендикуляр CC_1 на плоскость ASB и перпендикуляр CA_1 на ребро SA (рис. 7). Тогда угол CA_1C_1 будет линейным углом двугранного угла a. Поэтому $CC_1 = CA_1\sin a = SC\sin \beta\sin a$. Аналогично показывается, что $CC_1 = CB_1\sin b = SC\sin \alpha\sin b$. Следовательно, имеет место равенство $\sin \beta \sin a = \sin \alpha \sin b$ и, значит, равенство $\sin \alpha: \sin a = \sin \beta : \sin b$. Аналогичным образом доказывается, что имеет место равенство $\sin \beta: \sin b = \sin \gamma : \sin c$.

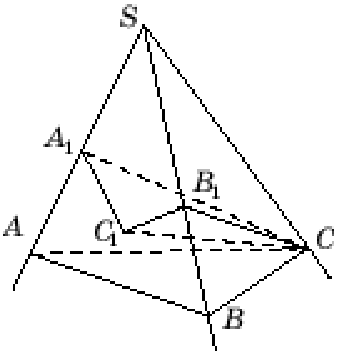

Рис. 7

Свойство 7. Если в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон равны.

Свойство 7'. Если в выпуклый четырехгранный угол можно вписать сферу, то суммы противоположных плоских углов равны.

Литература

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть II. Стереометрия. – М.: Учпедгиз, 1938.

2. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии. Часть II. Геометрия в пространстве. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

3. Энциклопедия элементарной математики. Книга IV. Геометрия. - М.; 1963.

4. Смирнова И.М. В мире многогранников. – М.: Просвещение, 1995.