ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Ортогональным проектированием называется параллельное проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости проектирования.

Поскольку ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования, для него справедливы все рассмотренные выше свойства параллельного проектирования.

Для изображения куба или прямоугольного параллелепипеда в ортогональной проекции, выясним сначала, куда при ортогональном проектировании переходят ребра прямого трехгранного угла, т.е. такого, у которого все плоские углы прямые.

Пусть дан прямой трехгранный угол с вершиной S и ребрами a, b и c. Плоскость π пересекает эти ребра (рис. 1). Обозначим через O ортогональную проекцию вершины S на плоскость π. Тогда прямые AO, BO и CO будут соответственно ортогональными проекциями прямых SA, SB и SC. Докажем, что точка O является ортоцентром треугольника ABC (точка пересечения высот) и, таким образом, прямые AO, BO и CO содержат высоты треугольника ABC.

Действительно, прямая SC перпендикулярна прямым SA, SB и, следовательно, перпендикулярна плоскости SAB. Прямая AB лежит в этой плоскости и, следовательно, перпендикулярна SC. Прямая CO является ортогональной проекцией прямой SC и, следовательно (по теореме о трех перпендикулярах), перпендикулярна AB. Значит, прямая CO содержит высоту CC_1треугольника ABC. Аналогичным образом доказывается, что прямые AO и BO содержат высоты AA_1и BB_1треугольника ABC.

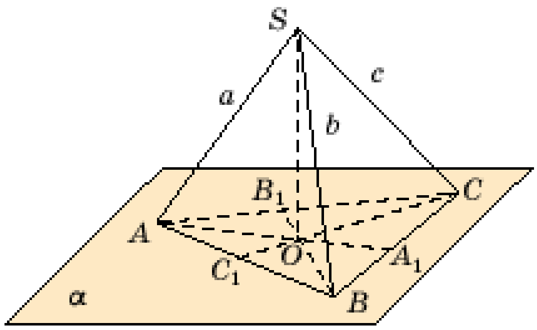

Рис. 1

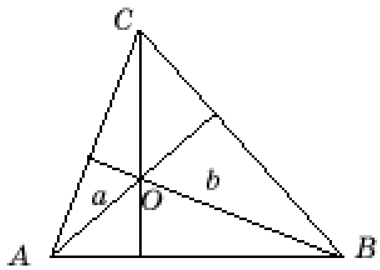

Рис. 2

Используя доказанное утверждение, построим ортогональную проекцию прямого трехгранного угла. Для этого нарисуем треугольник ABC и проведем в нем высоты (рис. 2). Лучи OA, OB и OC будут изображением ребер трехгранного угла.

Заметим, что для любых трех лучей a, b и c, с вершиной в точке O для которых углы aOb, bOc и aOc больше 90°, существует треугольник ABC, высоты которого лежат на этих лучах. Для его построения отметим какую-нибудь точку A на луче a и проведем через нее прямую, перпендикулярную b. Так как c не перпендикулярна b, то она пересечет прямую c в некоторой точке *C*. Аналогичным образом, через точку *A* проведем прямую, перпендикулярную *c* и точку ее пересечения с прямой *B* обозначим через *B*. Тогда прямые *BO* и *CO* будут содержать высоты треугольника *ABC* и, значит, прямая *AO* также будет содержать высоту этого треугольника.

Имея изображение прямого трехгранного угла, легко построить изображение прямоугольного параллелепипеда (рис. 3). Его ребра лежат на прямых, параллельных *OA, OB* и *OC* соответственно.

Выясним теперь, как изображается куб в ортогональной проекции. Для этого вернемся к изображению прямого трехгранного угла, на ребрах которого отмечены точки *A, B, C*, и предположим, что *SA*– единичный отрезок, изображенный отрезком *OA*. Наша задача состоит в том, чтобы на лучах *OB* и *OC* построить изображения единичных отрезков.

Представим себе, что треугольник *SAB* поворачивается относительно прямой *AB*. При этом высота SC_1этого треугольника поворачивается в плоскости, перпендикулярной прямой *AB* и в плоскости треугольника *ABC* занимает положение S_1C_1(рис. 4). Поскольку треугольник *ASB* прямоугольный, то точка S_1 будет пересечением окружности, построенной на *AB* как на диаметре, и прямой *CO*. При этом отрезок S_1Aявляется единичным отрезком.

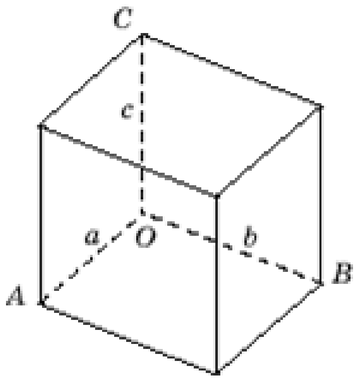

Рис. 3

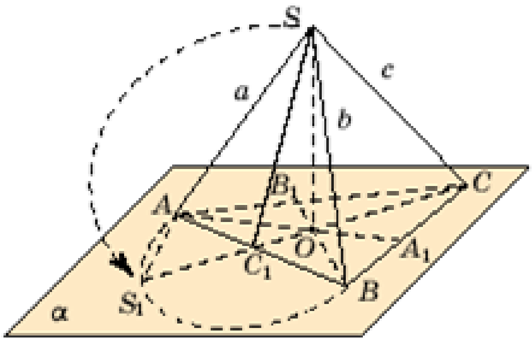

Рис. 4

Пусть теперь дано изображение прямого трехгранного угла (рис. 5, а), для которого *OA* изображает единичный отрезок.

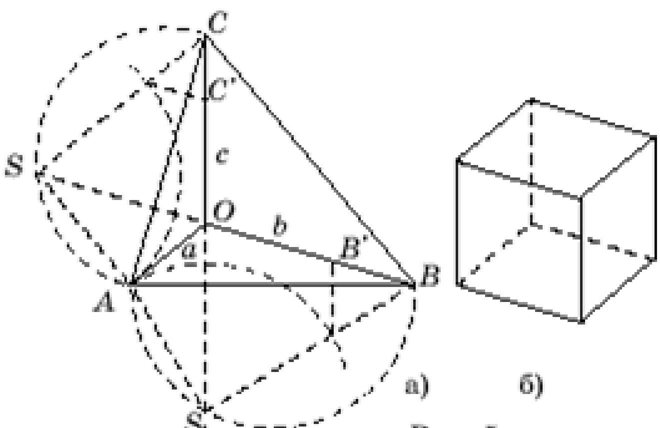

Рис. 5

Для построения изображения единичного отрезка на луче OB построим окружность с центром в точке S_1и радиусом S_1A. Через точку ее пересечения с S_1B проведем прямую, параллельную CO. Ее точка пересечения B' с лучом OB и даст искомую точку, для которой отрезок OB' является изображением единичного отрезка. Аналогичным образом строится изображение OC' единичного отрезка.

После того, как мы построили изображения единичных отрезков, изображение куба строится также как и изображение прямоугольного параллелепипеда с данными ребрами (рис. 5, б).

Ортогональное проектирование используется для изображения цилиндра, конуса, шара, сферы и др.

Рассмотрим вопрос об изображении сферы.

Теорема. Ортогональной проекцией сферы является круг, радиус которого равен радиусу сферы.

Доказательство. Проведем плоскость π_0, проходящую через центр сферы O и параллельную плоскости проектирования π. Поскольку плоскости π и π_0 параллельны, то проекции сферы на эти плоскости будут равны (рис. 6). Сечением сферы плоскостью π_0 является окружность радиуса R, равного радиусу сферы. Если A точка сферы, не принадлежащая этой окружности, и A_0 ее ортогональная проекция на плоскость π_0, то $OA_0 < OA \leq R$. Таким образом, при ортогональном проектировании на плоскость π_0 точки этой окружности остаются на месте, а остальные точки сферы проектируются внутрь соответствующего круга. Следовательно, ортогональной проекцией сферы является круг того же радиуса.

Для большей наглядности изображения сферы в ней выделяют большую окружность (сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр), плоскость которой образует острый угол с направлением проектирования, и полюсы (концы диаметра, перпендикулярного плоскости большой окружности). Большая окружность называется экватором. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости экватора - параллелями, прямая, проходящая через полюсы – осью, а большие окружности, проходящие через полюсы – меридианами.

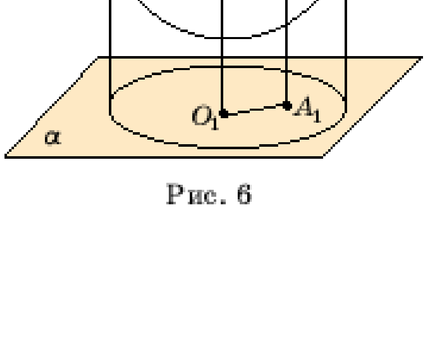

Рис. 6

Проекцией выделенной большой окружности будет эллипс. Для нахождения изображения полюсов будем считать исходную ортогональную проекцию видом сферы спереди, и построим вид сферы слева, т. е. ортогональную проекцию сферы на плоскость, проходящую через ось сферы и перпендикулярную плоскости проектирования. Большая окружность и ось сферы изобразятся перпендикулярными диаметрами *PQ* и *CD* (рис. 7).

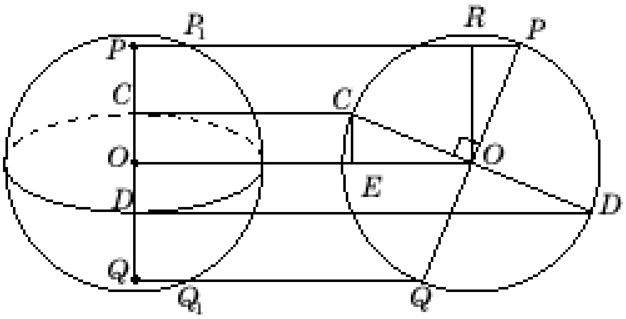

Рис. 7

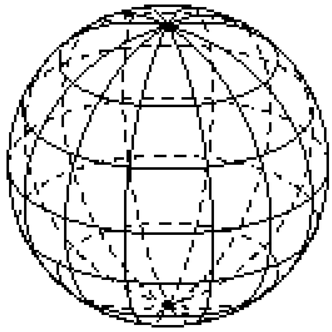
Рис. 8

Изображение полюсов на основной плоскости получается параллельным переносом полюсов на виде сферы слева.

На практике можно не прибегать к построению вспомогательного чертежа (вида сферы слева). Для построения изображения полюсов *P* и *Q* достаточно заметить, что прямоугольные треугольники *OPR* и *OCE* равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, имеет место равенство отрезков $RP = CE$. Кроме того, имеем $RP = PP_1$ и $CE = OC$. Значит $PP_1 = OC$. Аналогично, $QQ_1 = OD$. После этого точки *P* и *Q* выбираются так, чтобы выполнялись эти равенства.

На изображении сферы, помимо экватора и полюсов, можно нарисовать несколько параллелей и меридианов (рис. 8).

Рассмотрим теперь вопрос об изображении комбинаций многогранников и тел вращения. Начнем с куба и сферы. Одной из распространенных ошибок изображения сферы, вписанной в куб, является изображение, показанное на рисунке 9. Здесь сразу несколько ошибок. Первая связана с неверным изображением точек касания. Точки касания должны располагаться не на окружности, ограничивающей изображение сферы, а внутри нее. Так, например, точки касания верхней и нижней граней куба должны располагаться в полюсах сферы. Эту ошибку можно исправить, несколько увеличив размеры вписанной сферы, как показано на рисунке 10. Здесь как будто точки касания верхней и нижней граней куба расположены в полюсах сферы, однако это изображение также не является верным. Ошибка рисунков 9 и 10 состоит в том, что для изображения сферы и куба использованы разные проекции. Сфера изображена в ортогональной проекции, а куб нет. На одном изображении этого делать нельзя. Если сфера изображается в ортогональной проекции, то и куб должен изображаться в ортогональной проекции.

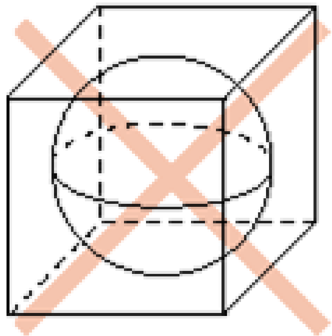

Рис. 9

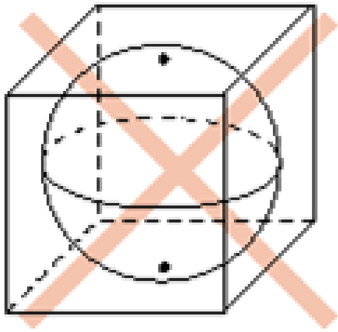

Рис. 10

Для построения правильного изображения сферы, вписанной в куб, сначала изобразим сферу с экватором и полюсами (рис. 11). Затем опишем около экватора квадрат и построим его изображение. Это можно сделать следующим образом. Отметим на эллипсе, изображающем экватор какую-нибудь точку A и проведем касательную a к эллипсу в этой точке. Через точку A и центр эллипса O проведем прямуюи ее точку пересечения с эллипсом обозначим B. Через точку B проведем прямую b, параллельную a. Она также будет касательной к эллипсу. Построим диаметр CD, сопряженный диаметру AB эллипса и через точки C и D проведем прямые c и d, параллельные AB. Они будут касательными к эллипсу. Параллелограмм $PQRS$ будет искомым изображением квадрата, описанного около экватора.

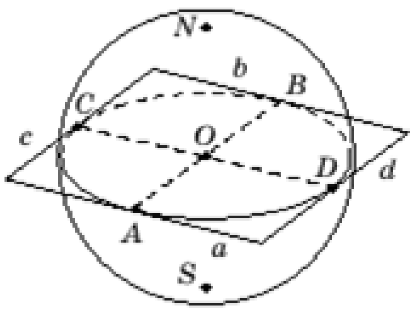

Рис. 11

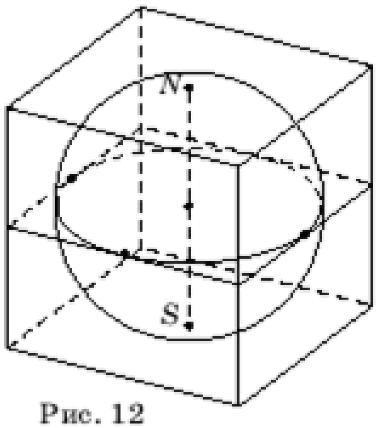

Рис. 12

Через вершины параллелограмма проведем прямые, параллельные оси SN сферы и отложим на них в обе стороны отрезки, равные $ON = OS$. Получим вершины верхнего и нижнего оснований куба, описанного около сферы. Соединяя теперь соответствующие вершины верхнего и нижнего оснований, получим остальные ребра искомого куба (рис. 12).

Заметим, что изображение куба, описанного около данной сферы, полностью определяется начальным выбором точки A. Выбирая различным образом эту точку можно получать различные изображения куба, описанного около сферы.

Аналогичным образом строится изображение правильной треугольной призмы, описанной около сферы (рис. 13). Сначала строим изображение правильного треугольника, описанного около экватора. Для этого выбираем точку касания A и проводим через нее касательную a. Через точку A и центр эллипса проводим прямую и откладываем на ней отрезок $OB = 2OA$. Через точку B проводим касательные b и c к эллипсу. Прямые a, b и c образуют искомый треугольник, описанный около эллипса (рис. 14). Через вершины этого треугольника проведем прямые, параллельные оси SN сферы и отложим на них в обе стороны отрезки, равные $ON = OS$. Получим вершины верхнего и нижнего оснований призмы, описанной около сферы. Соединяя теперь соответствующие вершины верхнего и нижнего оснований, получим остальные ребра искомой призмы (рис. 13).

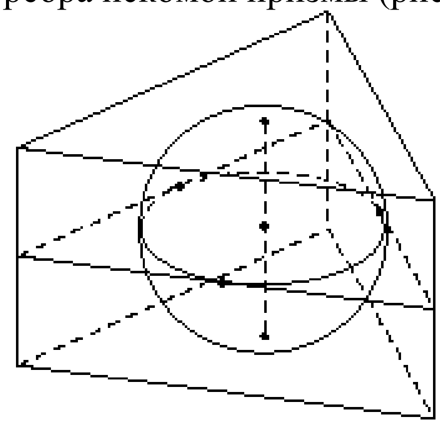

Рис. 13

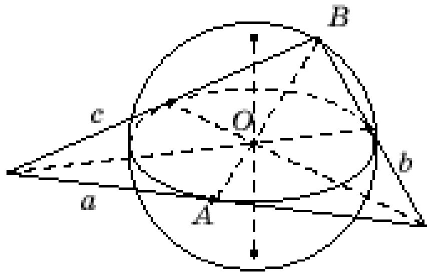

Рис. 14

Аналогичным образом строится изображение пирамиды с вписанной в нее сферой (рис. 15). В случае, если сфера вписана в правильный тетраэдр (рис. 16), нужно учитывать, что центр сферы делит высоту пирамиды в отношении 3:1 считая от вершины.

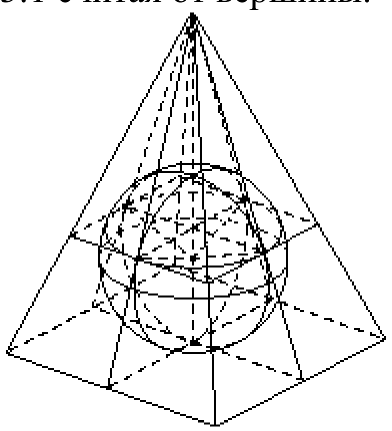

Рис. 15

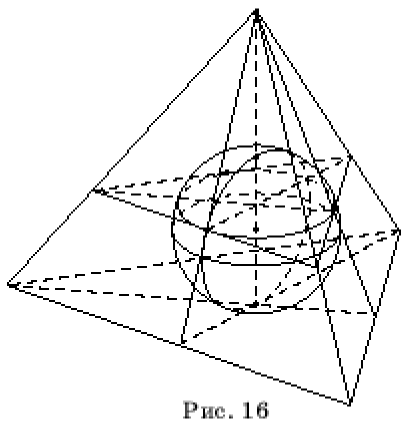

Рис. 16

На рисунках 17 изображена сфера с вписанным в нее кубом. На рисунке 18 изображена сфера с вписанным в нее правильным тетраэдром.

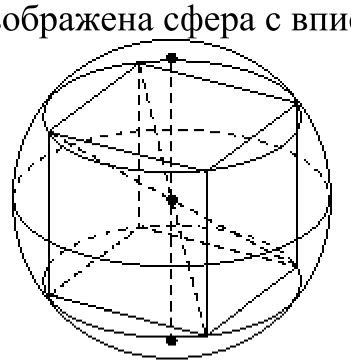

Рис. 17

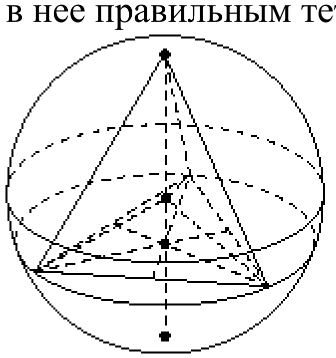

Рис. 18

Литература

1. Бескин Н.М. Изображение пространственных фигур //Квант. – 1970. - № 12.
2. Василевский А.Б. Метод параллельных проекций. – Минск: Народная асвета, 1985.
3. Костицын В.Н. Моделирование на уроках геометрии. – М.: Владос, 2000.
4. Польский И.Г. Проекционный чертеж и построения на нем. – М.: Учпедгиз, 1962.
5. Четверухин Н.Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. – 3-е изд. – М.: Учпедгиз, 1955.
6. Четверухин Н.Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. – М.: Учпедгиз, 1946.
7. Энциклопедия элементарной геометрии. Книга IV. Геометрия. – М.: Гос. изд. физико-математ. лит., 1963.