ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

В стереометрии изучаются пространственные фигуры, однако на чертеже они изображаются в виде плоских фигур. Каким же образом следует изображать пространственную фигуру на плоскости? Обычно в геометрии для этого используется параллельное проектирование.

Пусть π - некоторая плоскость, l - пересекающая ее прямая (рис. 1). Через произвольную точку A, не принадлежащую прямой l, проведем прямую, параллельную прямой l. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется параллельной проекцией точки A на плоскость π в направлении прямой l. Обозначим ее A'. Если точка A принадлежит прямой l, то параллельной проекцией A на плоскость π считается точка пересечения прямой l с плоскостью π.

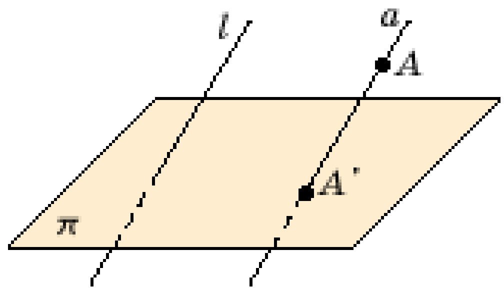

Рис. 1

Таким образом, каждой точке A пространства сопоставляется ее проекция A' на плоскость π. Это соответствие называется параллельным проектированием на плоскость π в направлении прямой l.

Пусть Φ - некоторая фигура в пространстве. Проекции ее точек на плоскость π образуют фигуру Φ', которая называется параллельной проекцией фигуры Φ на плоскость π в направлении прямой l. Говорят также, что фигура Φ' получена из фигуры Φ параллельным проектированием.

Примеры параллельных проекций дают, например, тени предметов под воздействием пучка параллельных солнечных лучей.

Рассмотрим свойства параллельного проектирования.

Свойство 1. Если прямая параллельна или совпадает с прямой l, то ее проекцией в направлении этой прямой является точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой l, то ее проекцией является прямая.

Доказательство. Ясно, что если прямая k параллельна или совпадает с прямой l, то ее проекцией в направлении этой прямой на плоскость π будет точка пересечения прямой l и плоскости π. Пусть k не параллельна и не совпадает с прямой l (рис. 2). Возьмем какую-нибудь точку A на прямой k и проведем через нее прямую a, параллельную l. Ее пересечение с плоскостью проектирования π даст точку A', являющуюся проекцией точки A. Через прямые a и k проведем плоскость α . Ее пересечением с плоскостью π будет искомая прямая k', являющаяся проекцией прямой k.

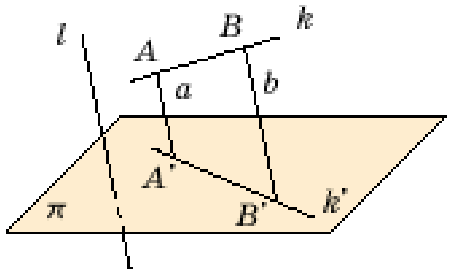

Рис. 2

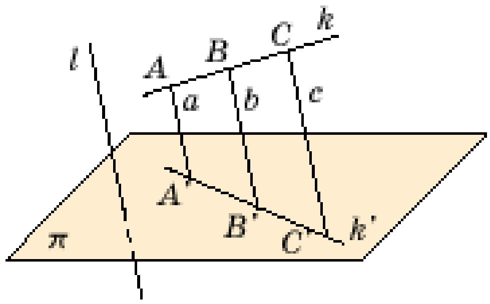

Рис. 3

Свойство 2. Проекция отрезка при параллельном проектировании есть точка или отрезок, в зависимости от того лежит он на прямой, параллельной или совпадающей с прямой *l*, или нет. Параллельное проектирование сохраняет отношение длин отрезков, лежащих на прямой, не параллельной и не совпадающей с прямой *l*. В частности, при параллельном проектировании середина отрезка переходит в середину соответствующего отрезка.

Доказательство. Ясно, что если отрезок лежит на прямой, параллельной или совпадающей с прямой *l*, то его проекцией будет точка. Пусть точки *A, B* и *C* лежат на прямой *k*, не параллельной и не совпадающей с прямой *l*; *k'* – проекция прямой *k* на плоскость π в направлении прямой *l*; *A', B', C'* – проекции точек *A, B* и *C* соответственно; *a, b, c* – соответствующие прямые, проходящие через эти точки и параллельные прямой *l* (рис. 3). Тогда из теоремы Фалеса планиметрии следует равенство отношений *AB* : *BC* = *A'B'* : *B'C'*. В частности, если точка *B* - середина отрезка *AC*, то *B'* - середина отрезка *A'C'*.

Свойство 3. Если две параллельные прямые не параллельны прямой *l*, то их проекции в направлении *l* могут быть или параллельными прямыми или одной прямой.

Доказательство. Пусть k_1, k_2 - параллельные прямые, не параллельные прямой *l*. Так же как и при доказательстве первого свойства, рассмотрим плоскости α_1, α_2, линии пересечения которых с плоскостью π дают проекции k_1', k_2' прямых k_1, k_2 соответственно (рис. 4). Если плоскости α_1 и α_2 совпадают, то проекции прямых k_1 и k_2 также совпадают. Если эти плоскости различны, то они параллельны между собой, по признаку параллельности плоскостей (прямая k_1 параллельна прямой k_2, прямая A_1A_1' параллельна прямой A_2A_2'). В силу свойства параллельных плоскостей, линии пересечения этих плоскостей с плоскостью π параллельны.

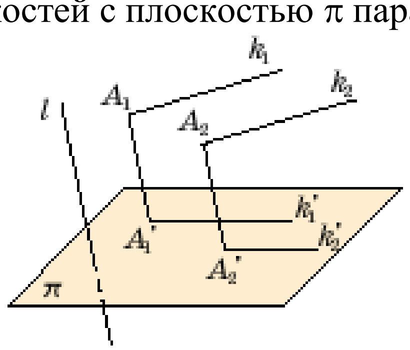

Рис. 4

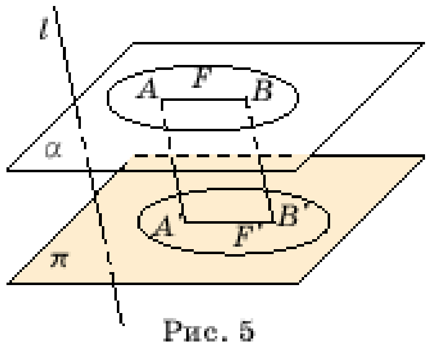

Рис. 5

При изображении пространственных фигур на плоскости особенно важно уметь правильно изображать плоские фигуры, поскольку они входят в поверхность основных пространственных фигур. Например, плоские многоугольники являются гранями многогранников, круги - основаниями цилиндров и конусов.

Теорема. Если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования π, то ее проекция F' на эту плоскость будет равна фигуре F.

Доказательство. Пусть A, B – точки фигуры F и A', B' – их параллельные проекции (рис. 5). Тогда $ABB'A'$ – параллелограмм. Поэтому параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AA'}$ переводит точку B в B'. Поскольку точку B фигуры F можно выбирать произвольно, то этот параллельный перенос переводит фигуру F в фигуру F'. Значит фигуры F и F' равны.

Если фигура F лежит в плоскости, не параллельной плоскости проектирования π, то ее проекция F', вообще говоря, не равна фигуре F.

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией многоугольника является или многоугольник с тем же числом сторон или отрезок. Причем, если в многоугольнике какие-нибудь две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны. Однако, поскольку при параллельном проектировании длины отрезков и углы, вообще говоря, не сохраняются, то проекцией равностороннего треугольника может быть треугольник с разной длиной сторон, проекцией прямоугольного треугольника может быть не прямоугольный треугольник. Аналогично, хотя проекцией параллелограмма является параллелограмм, проекцией прямоугольника может не быть прямоугольник, проекцией ромба не обязательно является ромб, проекцией правильного многоугольника может быть неправильный многоугольник.

Простейшим многоугольником является треугольник. Параллельной проекцией треугольника, как следует из свойств параллельного проектирования, является треугольник или отрезок. При этом, если плоскость треугольника параллельна плоскости проектирования, то, как мы выяснили, его проекцией будет треугольник, равный исходному. Докажем, что в общем случае треугольник любой формы может служить параллельной проекцией равностороннего треугольника.

Действительно, пусть дан произвольный треугольник ABC в плоскости π (рис. 6). Построим на одной из его сторон. например, AC равносторонний треугольник AB_1C так, чтобы точка B_1 не принадлежала плоскости π. Обозначим через l прямую, проходящую через точки B_1 и B. Тогда ясно, что треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника AB_1C на плоскость π в направлении прямой l.

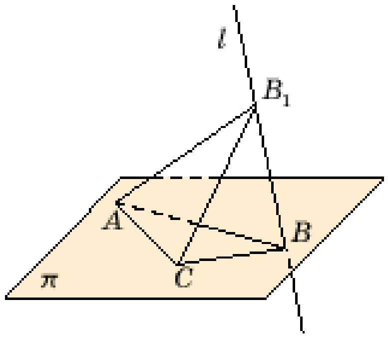

Рис. 6

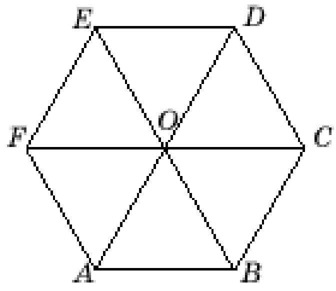

Рис. 7

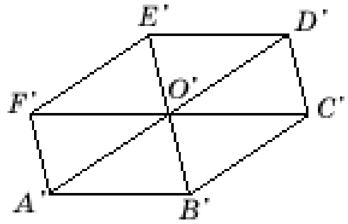

Рис. 8

Рассмотрим теперь параллельную проекцию правильного шестиугольника *ABCDEF* с центром в точке *O* (рис. 7). Выберем какой-нибудь треугольник, например, *AOB*. Его проекцией может быть треугольник *A'O'B'* на плоскости π (рис. 8), имеющий произвольную форму. Далее отложим *O'D'*=*A'O'* и *O'E'*=*B'O'*. Теперь из точек *A'* и *D'* проведем прямые, параллельные прямой *B'O'*; из точек *B'* и *E'* проведем прямые, параллельные прямой *A'O'*. Точки пересечения соответствующих прямых обозначим *F'* и *C'*. Шестиугольник *A'B'C'D'E'F'* и будет искомой проекцией правильного шестиугольника *ABCDEF*.

Выясним, какая фигура является параллельной проекцией окружности. Пусть *F* - окружность в пространстве, *F'*- ее проекция на плоскость π в направлении прямой *l*. Если прямая *l* параллельна плоскости окружности или лежит в ней, то проекцией окружности является отрезок, равный диаметру окружности.

Рассмотрим случай, когда прямая *l* пересекает плоскость окружности (рис. 9). Пусть *AB* - диаметр окружности, параллельный плоскости π и *A'B'* его проекция на эту плоскость. Тогда *AB*=*A'B'*. Возьмем какой-нибудь другой диаметр *CD* и пусть *C'D'* - его проекция. Обозначим отношение *C'D'*:*CD* через *k*. Так как при параллельном проектировании сохраняются параллельность и отношение длин параллельных отрезков, то для произвольной хорды C_1D_1, параллельной диаметру *CD*, ее проекция $C_1'D_1'$ будет параллельна *C'D'*, и отношение $C_1'D_1'$: C_1D_1 будет равно *k*.

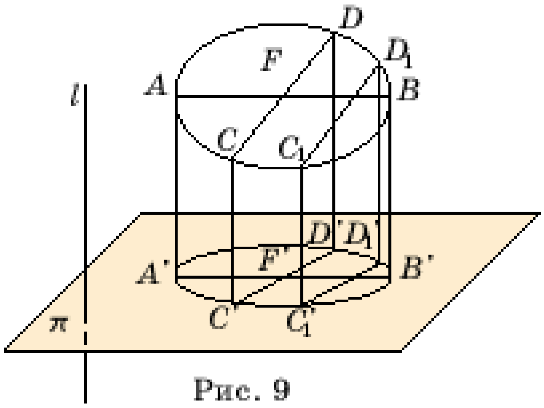

Рис. 9

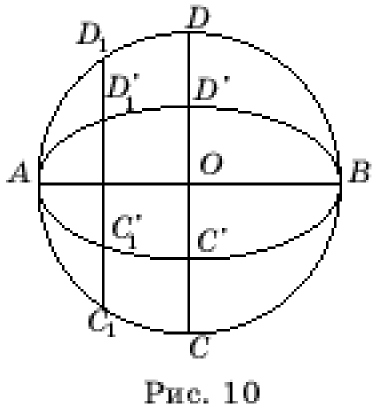

Рис. 10

Таким образом, проекция окружности получается сжатием или растяжением окружности в направлении какого-нибудь ее диаметра в одно и то же число раз. Такая фигура на плоскости называется эллипсом. Например, на рисунке 10 изображен эллипс, полученный из окружности сжатием в направлении диаметра *CD* в два раза.

Приведем примеры изображений пространственных фигур на плоскости.

Изображение параллелепипеда строится, исходя из того, что все его грани параллелограммы и, следовательно, изображаются параллелограммами (рис. 11).

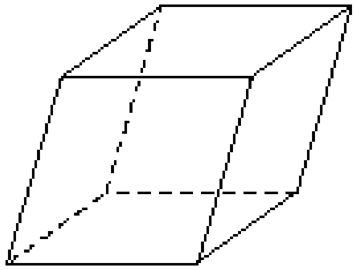

Рис. 11

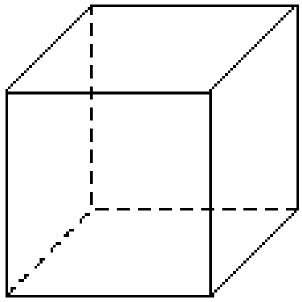

Рис. 12

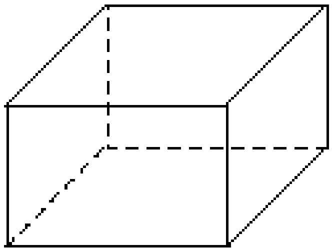

Рис. 13

При изображении куба плоскость изображений обычно выбирается параллельной одной из его граней. В этом случае две грани куба, параллельные плоскости изображений (передняя и задняя), изображаются равными квадратами. Остальные грани куба изображаются параллелограммами (рис. 12). Аналогичным образом изображается прямоугольный параллелепипед (рис. 13).

Для того чтобы построить изображение призмы, достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем из вершин многоугольника провести прямые, параллельные некоторой фиксированной прямой, и отложить на них равные отрезки. Соединяя концы этих отрезков, получим многоугольник, являющийся изображением второго основания призмы (рис. 14).

Для того чтобы построить изображение пирамиды, достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем выбрать какую-нибудь точку, которая будет изображать вершину пирамиды, и соединить ее с вершинами многоугольника (рис. 15). Полученные отрезки будут изображать боковые ребра пирамиды.

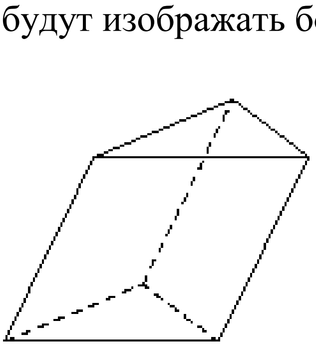

Рис. 14

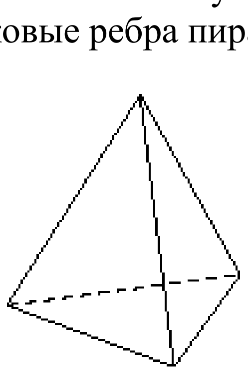

Рис. 15

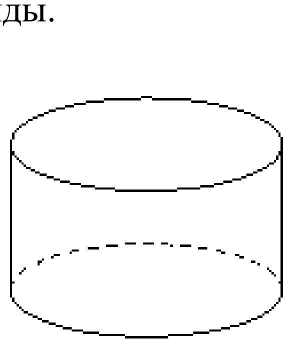

Рис. 16

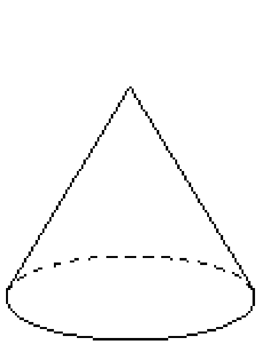

Рис. 17

Для изображения цилиндра достаточно изобразить его основания в виде двух эллипсов, получающихся друг из друга параллельным переносом, и нарисовать две образующие, соединяющие соответствующие точки этих оснований (рис. 16).

Для изображения конуса достаточно изобразить его основание в виде эллипса, отметить вершину и провести через нее две образующие, являющиеся касательными к этому эллипсу (рис. 17).

Обратим внимание на тот факт, что плоское изображение, подчиняясь определенным законам, способно передать впечатление о трехмерном предмете. Однако при этом могут возникать иллюзии.

В живописи существует целое направление, которое называется импоссибилизм (impossibility - невозможность) - изображение невозможных фигур, парадоксов. Известный голландский художник М.Эшер (1898 – 1972) в гравюрах "Бельведер" (рис. 18), "Водопад" (рис. 19), "Поднимаясь и опускаясь" (рис. 20) изобразил невозможные объекты.

Рис. 18

Рис. 19

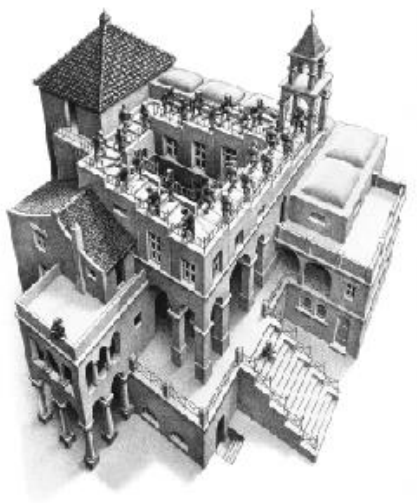

Рис. 20

Современный шведский архитектор О. Рутерсвард посвятил невозможным объектам серию своих художественных работ. Некоторые из них представлены на рисунке 21.

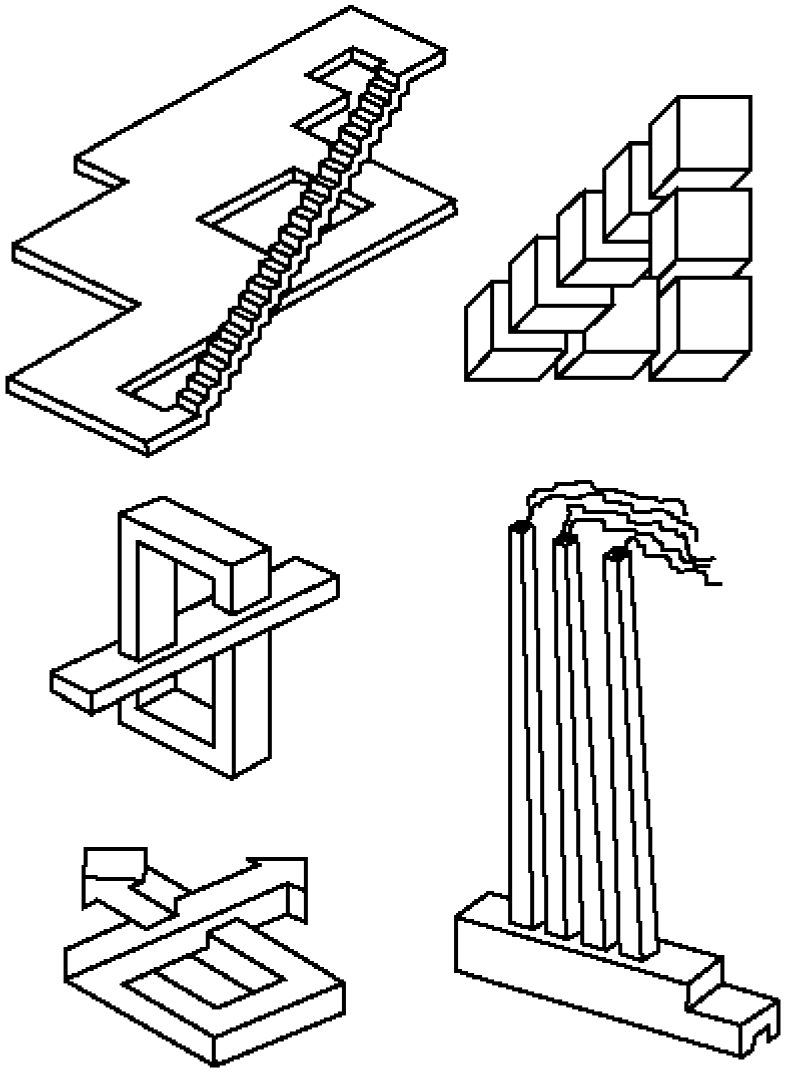

Рис. 21

Литература

1. Бескин Н.М. Изображение пространственных фигур //Квант. – 1970. - № 12.

2. Василевский А.Б. Метод параллельных проекций. – Минск: Народная асвета, 1985.

3. Костицын В.Н. Моделирование на уроках геометрии. – М.: Владос, 2000.

4. Польский И.Г. Проекционный чертеж и построения на нем. – М.: Учпедгиз, 1962.

5. Четверухин Н.Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. – 3-е изд. – М.: Учпедгиз, 1955.

6. Четверухин Н.Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. – М.: Учпедгиз, 1946.

7. Энциклопедия элементарной геометрии. Книга IV. Геометрия. – М.: Гос. изд. физико-математ. лит., 1963, с. 229.