ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ.
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Пифагоровы тройки – это тройки (x, y, z) натуральных чисел $x, y, z,$ для которых выполняется равенство

$$(*)\ x^2 + y^2 = z^2.$$

Например, (3, 4, 5) является пифагоровой тройкой. Геометрический смысл пифагоровых троек состоит в том, что они выражают стороны прямоугольного треугольника. Прямоугольный треугольник, с катетами 3, 4 и гипотенузой 5 называется египетским треугольником. Площадь этого треугольника равна совершенному числу 6. Периметр равен 12 – числу, которое считалось символом счастья и достатка. С помощью веревки разделенной узлами на 12 равных частей древние египтяне строили прямоугольный треугольник и прямой угол.

Нахождением пифагоровых троек занимались Евклид, Пифагор, Диофант и многие другие.

Ясно, что если (x, y, z) – пифагорова тройка, то для любого натурального k тройка (kx, ky, kz) также будет пифагоровой тройкой. В частности, (6, 8, 10), (9, 12, 15) и т.д. являются пифагоровыми тройками.

Тройки, не имеющие общих делителей, больших 1, называются простейшими. Нашей задачей является нахождение всех простейших пифагоровых троек. Для этого рассмотрим некоторые их свойства.

Свойство 1. Числа, входящие в простейшую пифагорову тройку, попарно взаимно просты.

Действительно, если два из них, например x и y имеют простой общий делитель p, то из равенства (*) следует, что на p делится и третье число z. Это противоречит тому, что тройка – простейшая.

Следствие. В простейшей пифагоровой тройке только одно число может быть четным.

Свойство 2. В простейшей пифагоровой тройке числа x и y не могут быть одновременно нечетными.

Доказательство. Если бы $x = 2n – 1$, $y = 2m – 1$, то $x^2 + y^2 = 4(n^2 + m^2 - n - m) + 2$. Следовательно, z^2 делилось бы на 2, но не делилось бы на 4. Противоречие.

Таким образом, в простейшей пифагоровой тройке (x, y, z) одно из чисел x или y четно, а другое число z нечетно. Предположим, что y четно, а x и z нечетны. Перепишем равенство (*) в виде $y^2 = z^2 – x^2 = (z + x)(z – x)$. Заметим, что y^2, $(z + x)$, $(z – x)$ – четные числа. Разделив левую и правую часть полученного равенства на 4 будем иметь

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z+x}{2} \cdot \frac{z-x}{2}.$$

Обозначим $m_1 = \frac{z+x}{2}, n_1 = \frac{z-x}{2}$. Докажем, что m_1 и n_1 взаимно просты. Действительно, если d – их общий делитель, то d делит $m_1 + n_1 = z$ и $m_1 – n_1 = x$. Противоречие.

Аналогичным образом показывается, что числа m_1 и n_1 не могут иметь одинаковую четность и, следовательно, одно из них четное, а другое нечетное.

Воспользуемся тем, что если произведение двух взаимно простых чисел является квадратом, то каждое из сомножителей является квадратом. Поэтому $m_1 = m^2$, $n_1 = n^2$. Подставляя полученные выражения, будем иметь

$$m^2 = \frac{z+x}{2}, n^2 = \frac{z-x}{2}, m^2n^2 = \frac{y^2}{4}.$$

Откуда получаем формулы для x, y, z:

$$(**)\ x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2.$$

Непосредственная проверка показывает, что для любых натуральных m и n тройка (x, y, z) является пифагоровой.

Следующая теорема дает ответ на вопрос, какие тройки являются простейшими.

Теорема. Тройка (x, y, z), в которой x, y и z выражаются формулами (**), является простейшей тогда и только тогда, когда для чисел m и n выполняются следующие условия:

а) m и n взаимно просты;

б) $m > n$;

в) одно из чисел m или n четное, а другое нечетное.

Доказательство. Необходимость следует из приведенного выше построения. Покажем, что при выполнении условий а) – в) следует, что (x, y, z) – простейшая пифагорова тройка. Действительно, предположим, что x, y и z имеют простой общий делитель p. Этот делитель не может равняться двум, так как в этом случае x и y были бы четными, а из условия в) следует, что x нечетное. Пусть $p > 2$. Так как p делит $y= 2mn$, то оно должно делить m или n. Если, например, p делит m, то из равенства $x= m^2 - n^2$ следует, что p делит n, т.е. m и n не взаимно просты, как требует условие а).

Укажем несколько примеров простейших пифагоровых троек.

Если $m = 2$, $n = 1$, то $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.

Если $m = 3$, $n = 2$, то $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$.

Если $m = 4$, $n = 1$, то $x = 15$, $y = 8$, $z = 17$.

Если $m = 4$, $n = 3$, то $x = 7$, $y = 24$, $z = 25$.

Укажем связь пифагоровых троек с комплексными числами, позволяющую легко запомнить формулы (**). Рассмотрим комплексное число вида $m + ni$, где m и n – целые числа. Возведем его в квадрат $(m + ni)^2 = (m^2 - n^2) + 2mni$. Модуль этого числа равен квадрату модуля числа $m + ni$, т.е. равен $m^2 + n^2$. С другой стороны, его квадрат равен сумме квадратов действительной и мнимой части, т.е. $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$. Поэтому числа

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2.$$

образуют пифагорову тройку.

Аналогичным образом, используя комплексные числа можно находить целочисленные решения уравнений $x^2 + y^2 = z^3$, $x^2 + y^2 = z^4$ и т.д.

Например, найдем целочисленное решение уравнения $x^2 + y^2 = z^3$, порожденное комплексным числом $1 + 2i$. Возведем его в куб:

$$(1 + 2i)^3 = 1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 = -11 - 2i.$$

Следовательно, числа $x = -11$, $y = -2$, $z = 1^2 + 2^2 = 5$ дают искомое решение.

Обобщением уравнения (*) является уравнение вида

$$x^n + y^n = z^n.$$

Французский математик Пьер Ферма (1601- 1655) на полях книги "Арифметика" Диофанта сформулировал утверждение о том, что при $n > 2$ это уравнение не имеет решений в натуральных числах, добавив при этом, что поля слишком малы для изложения доказательства. Соответствующая теорема получила название "Великая теорема Ферма". На протяжении более трехсот лет математики пытались найти доказательство или опровергнуть это утверждение. Л.Эйлер (1707-1783) доказал неразрешимость в натуральных числах уравнения $x^3 + y^3 = z^3$. Куммер (1810-1893) и его ученики доказали неразрешимость уравнения $x^n + y^n = z^n$ для n, лежащих в промежутке от 3 до 100, и только несколько лет назад американский математик Э.Уайлс, с помощью современных геометрических методов, доказал теорему Ферма в общем виде.

Рассмотрим вопрос о решении в целых числах уравнения вида

$$(*)\ ax + by = c,$$

где a, b – целые числа, отличные от нуля, c– целое число.

Если a и b имеют общий делитель d, а c не делится на d, то целочисленных решений нет. Если c делится на d, то разделив на d обе части уравнения, придем к уравнению, в котором коэффициенты при x и y взаимно просты.

Будем заранее предполагать, что коэффициенты a и b взаимно просты.

Рассмотрим случай, когда $c = 0$. Данное уравнение перепишется в виде

$$ax + by = 0.$$

Оно называется однородным уравнением. Решая его относительно x, получим $x = -\frac{b}{a}y$ и, следовательно, y делится на a, т.е. имеет вид $y = at$. Подставляя это выражение в уравнение, получим $x = -bt$. Таким образом, решениями однородного уравнения являются всевозможные пары $x = -bt$, $y = at$, где t произвольное целое число.

Вернемся теперь к неоднородному уравнению. Если (x_0, y_0) – какое-нибудь его решение (частное решение), т.е. выполняется равенство, $ax_0 + by_0 = c$, то вычитая его из уравнения (*), получим однородное уравнение $a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$.

Ясно, что пара (x, y) является решением этого уравнения тогда и только тогда, когда она является решением уравнения (*).

Следовательно, любое решение неоднородного уравнения может быть записано в виде

$$x = x_0 - bt,\ y = y_0 + at,$$

где (x_0, y_0) – какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения.

В некоторых случаях частное решение неоднородного уравнения можно найти подбором.

Задача 1. Найдите какое-нибудь частное решение уравнения $2x + 9y = 50$.

Легко видеть, что одним из решений является пара (25, 0).

Задача 2. Найдите какое-нибудь частное решение уравнения $37x + 5y = 232$.

Имеем, $y=\dfrac{232-37x}{5}$. Подставляя x = 0, 1, 2, 3, 4, подбором находим частное решение (1, 39).

Общий метод нахождения частного решения дает алгоритм Евклида. А именно, для любых взаимно простых a и b алгоритм Евклида позволяет найти такие x' и y', для которых $ax' + by' = 1$. Умножая x' и y' на c, найдем искомые x_0 и y_0.

Покажем это на примере. Пусть требуется решить уравнение $47x + 9y = 3$. Имеем $47 = 5\cdot 9 + 2$, $9 = 4\cdot 2 + 1$. Выразим 1 из второго уравнения $1 = 9 - 4\cdot 2$. Подставим вместо двойки ее выражение из первого уравнения. Получим $1 = 9 – 4(47-5\cdot 9) = 21\cdot 9 – 4\cdot 47$. Следовательно, $x_0 = 3(-4) = -12$, $y_0 = 3\cdot 21 = 63$. Общее решение имеет вид $x = -12 – 9t$, $y = 63 + 47t$.

Задача 3. Решите уравнение в целых числах $62x + 26y = 6$.

Задача 4. На складе имеются ящики с гвоздями по 17 кг и 19 кг. Можно ли отгрузить 300 кг гвоздей не раскрывая ящиков?

Задача 5. Имеются контейнеры двух видов: по 100 кг и по 170 кг. Можно ли полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью 3 т?

Задача 6. У продавца есть 100-граммовые гирьки и консервные банки весом по 450 г. Как с их помощью отвесить на чашечных весах 2,5 кг сахара за один раз, используя наименьшее количество гирек и банок в общей сложности?

Задача 7. Даны углы 36° и 25°. Постройте угол 1°.

Задача 8. Найдите все точки с целочисленными координатами (x, y), $x < 0$, $y > 0$, принадлежащие прямой $8x – 13y + 11 = 0$.

Решение. $\begin{cases} x=-55-13t, \\ y=-33-8t. \end{cases}$ $-\dfrac{55}{13}<t<-\dfrac{33}{4}$. Решений нет.

Рассмотрим еще несколько задач на решение уравнений в целых числах.

Задача 9. Решите уравнение в целых числах $x^2 – y^2 = 31$.

Задача 10. Найдите все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.

Решение. Перепишем условие в виде уравнения $x + y = xy$. Оно эквивалентно уравнению $(x-1)(y-1) = 1$. Произведение целых чисел равняется единице только в случаях $x – 1 = 1$, $y – 1 = 1$ и $x – 1 = –1$, $y – 1 = –1$. Следовательно, имеем две пары решений: $x = 2$, $y = 2$ и $x = 0$, $y = 0$.

Задача 11. Найти все решения в целых числах уравнения $xy + 3x – 5y = –3$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x-5)(y+3) = -18$. Число –18 можно представить в виде произведения двух целых чисел следующими способами: -18 = (-18)1= (-9)2 = (-6)3 = (-3)6 = (-2)9 = (-1)18 = 1(-18) =2(-9) = 3(-6) = 6(-3) = 9(-2) = 18(-1). Каждый из них дает соответствующее решение.

Задача 12. Решите уравнение в натуральных числах $x^2 + x + 1 = y^2$.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x. Тогда $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{4y^2-3}}{2}$. Для того, чтобы x было целым числом, необходимо, чтобы $4y^2 - 3$ было точным квадратом, т.е. $4y^2 - 3 = z^2$. Тогда $(2y - z)(2y + z) = 3$, следовательно, $y = 1$, $z = \pm 1$; $y = -1$, $z = \pm 1$.

Ответ. $x = 0, y = 1; x = -1, y = 1; x = 0, y = -1; x = -1, y = -1$.

Задача 13. Решить в целых числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x-2)(y-2) = 4$. Для того, чтобы решить это уравнение нужно выписать все делители числа 4.

Задача 14. Найти тройки натуральных чисел, для которых сумма их обратных величин равна единице.

Решение. Искомые тройки чисел удовлетворяют уравнению $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Заметим, что числа x, y, z не могут быть одновременно большими трех. Так как в этом случае сумма обратных величин будет меньше 1. Пусть z – наименьшее из них. Возможно только два случая: $z = 2$ и $z = 3$. Их рассмотрение аналогично решению задачи 3.

Задача 15. Решите в целых числах уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = 2$.

Задача 16. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 3$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 6$.

Задача 17. Решите в натуральных числах уравнение $5^n + 12^n = 13^n$.

Решение. При $n = 2$ получаем верное равенство. При увеличении n на 1 правая часть увеличивается в 13 раз, а левая – в меньшее число раз. Следовательно, $n = 2$ является единственным решением.

Задача 18. Решите в целых числах уравнение $3^x - 2^y = 1$.

Решение. Если $y = 1$, то $x = 1$. Если $y > 1$, то из рассмотрения остатков при делении на 4 следует, что x четно, т.е. $x = 2n$. Перепишем уравнение в виде $3^{2n} - 1 = 2^y$. Тогда $(3^n - 1)(3^n + 1) = 2^y$. Следовательно, $3^n - 1 = 2^t$, $3^n + 1 = 2^s$ $(t < s)$. Вычитая из второго уравнения первое, получим $2 = 2^t(2^{s-t} - 1)$. Откуда $t = 1$, $s = 2$.

Ответ. $x = 1, y = 1; x = 2, y = 3$.

Задача 19. Решите в целых числах уравнение $3^x + 4^y = 5^z$.

Решение. Из рассмотрения остатков при делении на 4 следует, что x – четно, т.е. $x = 2n$. Из рассмотрения остатков при делении на 3 следует, что z – четно, т.е. $z = 2m$. Имеем $4^y = 5^{2m} - 3^{2n} = (5^m - 3^n)(5^m + 3^n)$. Следовательно, $5^m - 3^n = 2^t$, $5^m + 3^n = 2^s$ $(t < s)$. Складывая эти равенства, получим $2 \cdot 5^m = 2^t(2^{s-t} + 1)$. Откуда получаем $t = 1$, $5^m = 2^{s-1} + 1$. Из рассмотрения остатков при делении на 3 для уравнения $5^m - 3^n = 2$ следует, что m нечетно. Тогда $5^m - 1 = 4(5^{m-1} + \ldots + 1) = 2^{s-1}$. Так как в скобках стоит нечетное число нечетных слагаемых, то это равенство возможно только при $m = 1$.

Ответ. $x = 2, y = 2, z = 2$.

Задача 20. В прямоугольном треугольнике один катет равен 7. Найдите две другие стороны этого треугольника, если их длины выражаются целыми числами.

Ответ. 24, 25.

Литература

1. Аносов Д.В. Взгляд на математику и нечто из нее. – М.: МЦНМО, 2003.
2. Вольфсон Г.И. и др. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С6. – М.: МЦНМО, 2013.
3. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. – М.: Гос. изд. техн.-теор. литературы, 1957.
4. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004.
5. Колосов В.А. Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. – М.: Гелиос АРВ, 2001.
6. Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М.: Наука, 1991.
7. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – М.: Наука, 1980.
8. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. – М.: Наука, 1966.
9. Степанова Л.Л. Избранные главы элементарной теории чисел. – М.: Прометей, 2001.
10. Шклярский Д.О. и др. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1, арифметика и алгебра. – М – Л.: Гос. изд. техн.-теор. литературы, 1950.