ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Рассмотрим возможные правильные многогранники и прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. 1,а). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также ***тетраэдром***, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.

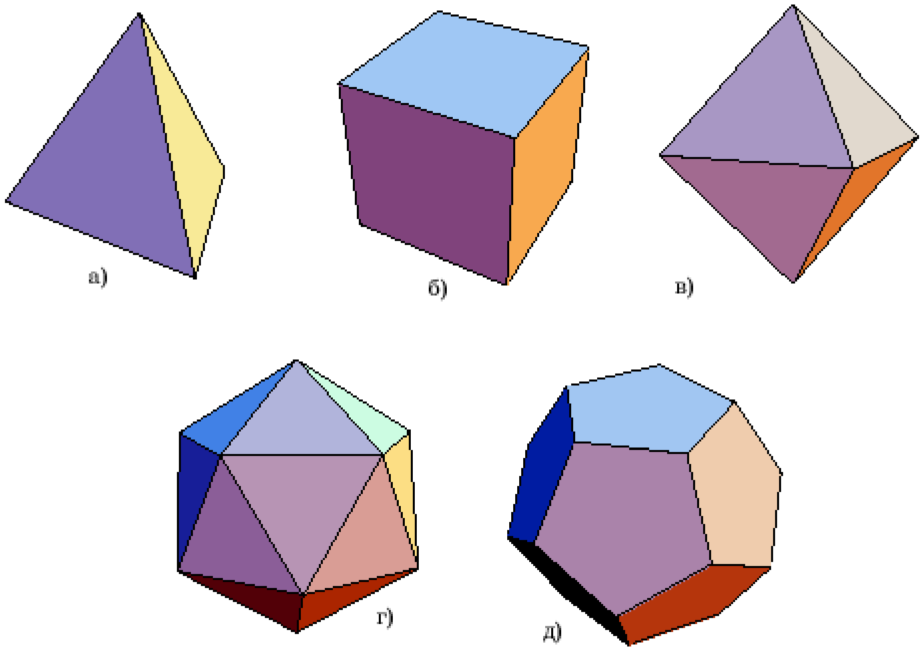

Рис. 1

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 1,в. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется ***октаэдром***.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 1,г. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется ***икосаэдром***.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. 1,б), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также ***гексаэдром***.

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке 1,д. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется ***додекаэдром***.

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то, используя теорему Коши о жесткости выпуклого многогранника, получаем, что других правильных многогранников не существует, и таким образом, имеется только пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Рассмотрим понятие правильного многогранника с точки зрения топологии науки, изучающей свойства фигур, не зависящих от различных деформаций без разрывов. С этой точки зрения, например, все треугольники эквивалентны, так как один треугольник всегда может быть получен из любого другого соответствующим сжатием или растяжением сторон. Вообще все многоугольники с одинаковым числом сторон эквивалентны по той же причине.

Как в такой ситуации определить понятие топологически правильного многогранника? Иначе говоря, какие свойства в определении правильного многогранника являются топологически устойчивыми и их следует оставить, а какие не являются топологически устойчивыми и их следует отбросить.

В определении правильного многогранника количество сторон и количество граней являются топологически устойчивыми, т.е. не меняющимися при непрерывных деформациях. Правильность же многоугольников не является топологически устойчивым свойством. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Выпуклый многогранник называется ***топологически правильным***, если его гранями являются многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Например, все треугольные пирамиды являются топологически правильными многогранниками, эквивалентными между собой. Все параллелепипеды также являются эквивалентными между собой топологически правильными многогранниками**.** Четырехугольные пирамиды не являются топологически правильными многогранниками.

Выясним вопрос о том, сколько существует не эквивалентных между собой топологически правильных многогранников.

Как мы знаем, существует только пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Казалось бы, топологически правильных многогранников должно быть гораздо больше. Однако оказывается, что никаких других топологически правильных многогранников, не эквивалентных уже известным правильным, не существует.

Для доказательства этого воспользуемся теоремой Эйлера. Пусть дан топологически правильный многогранник, гранями которого являются n -угольники, и в каждой вершине сходится m ребер. Ясно, что n и m больше или равны трем. Обозначим, как и раньше, В - число вершин, Р - число ребер и Г - число граней этого многогранника. Тогда

$$n\text{Г} = 2\text{Р};\ \text{Г} = \frac{2P}{n};\ m\text{В} = 2\text{Р};\ \text{В} = \frac{2P}{m}.$$

По теореме Эйлера, В - Р + Г = 2 и, следовательно,

$$\frac{2P}{m} - P + \frac{2P}{n} = 2.$$

Откуда

$$\mathrm{P} = \frac{2nm}{2n + 2m - nm}.$$

Из полученного равенства, в частности, следует, что должно выполняться неравенство $2n + 2m - nm > 0$, которое эквивалентно неравенству $(n - 2)(m - 2) < 4$.

Найдем всевозможные значения n и m, удовлетворяющие найденному неравенству, и заполним следующую таблицу

N m	3	4	5
3	В=4, Р=6, Г=4 тетраэдр	В=6, Р=12, Г=8 октаэдр	В=12, Р=30, Г=20 икосаэдр
4	В=8, Р=12, Г=4 куб	Не существует	Не существует
5	В=20, Р=30, Г=12 додекаэдр	Не существует	Не существует

Например, значения $n = 3$, $m = 3$ удовлетворяют неравенству $(n - 2)(m - 2) < 4$. Вычисляя значения Р, В и Г по приведенным выше формулам, получим Р = 6, В = 4, Г = 4.

Зачения $n = 4$, $m = 4$ не удовлетворяют неравенству $(n - 2)(m - 2) < 4$ и, следовательно, соответствующего многогранника не существует. (Самостоятельно проверьте остальные случаи.)

Из этой таблицы следует, что возможными топологически правильными многогранниками являются только правильные многогранники, перечисленные выше, и многогранники, им эквивалентные.

Исторические сведения

Правильные многогранники с древних времен привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагорейцы считали эти многогранники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира. Они считали, что элементы первооснов бытия имеют форму правильных многогранников, а именно: огонь – тетраэдр (его гранями являются четыре правильных треугольника, рис. 1, а); земля -

гексаэдр (куб – многогранник, гранями которого являются шесть квадратов, рис. 1, б); воздух – октаэдр (его гранями являются восемь правильных треугольников, рис. 1, в); вода – икосаэдр (его гранями являются двадцать правильных треугольников, рис. 1, г); вся Вселенная, по мнению древних, имела форму додекаэдра (его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников, рис. 1, д). Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого: "Тетра" - четыре; "Гекса" - шесть; "Окто" - восемь; "Икоси" - двадцать, "Додека" - двенадцать. "Эдра" - грань. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон. Именно поэтому правильные многогранники называются также ***телами Платона***. Правильным многогранникам посвящена последняя XIII книга знаменитых "Начал" Евклида.

В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи, например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли (1445-1514) "О божественной пропорции".

Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, также увлекавшимся геометрией, был А. Дюрер. В его известной гравюре "Меланхолия" на переднем плане изображен додекаэдр. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

Иоганн Кеплер (1571-1630) в своей работе "Тайна мироздания" в 1596 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: "Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг сферы Земли опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия". Такая модель Солнечной системы получила название "Космического кубка" Кеплера (рис. 2)

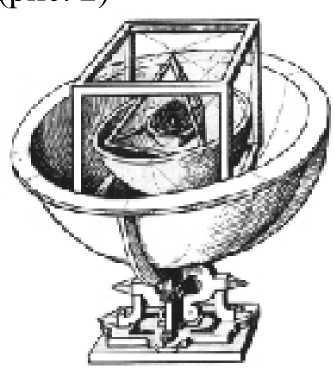

Рис. 2

Литература

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть II. Стереометрия. – М.: Учпедгиз, 1938 (или более поздние издания, например, 3-е изд., 1958). Книга VI. Многогранники. Дополнения: Глава V.

2. Александров А.Д. Выпуклые многогранники. – М.-Л.; 1950.

3. Болл У., Коксетер Г. Математические эссе и развлечения. – М.: Мир, 1986, с.142.

4. Долбилин Н.П. Жемчужины теории многогранников. – М.: МЦНМО, 2000, с.27-31.

5. Люстерник Л.А. Выпуклые фигуры и многогранники. – М.; 1956.

6. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии. Часть II. Геометрия в пространстве. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949, с. 34, с.268.

7. Смирнова И.М. В мире многогранников. – М.: Просвещение, 1995.

8. Энциклопедия элементарной математики. Книга IV. Геометрия. - М.; 1963, с. 382.

9. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. – М.-Л.; 1951 /Библиотека математического кружка, выпуск 4.