СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА И КОНУСА

Рассмотрим цилиндрическую поверхность, образованную вращением вокруг оси прямой, параллельной этой оси.

Теорема. Сечением цилиндрической поверхности плоскостью является эллипс.

Доказательство. Пусть плоскость α пересекает цилиндрическую поверхность. Впишем в эту поверхность две сферы, касающиеся плоскости α в некоторых точках F_1, F_2 и цилиндрической поверхности по окружностям C_1, C_2 (рис. 1). Пусть A – произвольная точка сечения. Проведем через нее образующую и обозначим через A_1, A_2 точки пересечения этой образующей с окружностями C_1, C_2 соответственно. Заметим, что прямая A_1A_2 является касательной к обеим сферам. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_1 + AF_2 = AA_1 + AA_2 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 есть расстояние между плоскостями окружностей C_1, C_2. Поэтому оно не зависит от выбора точки A сечения, и, следовательно, сечение является эллипсом с фокусами F_1 и F_2.

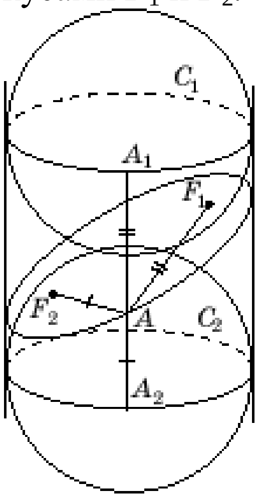

Рис. 1

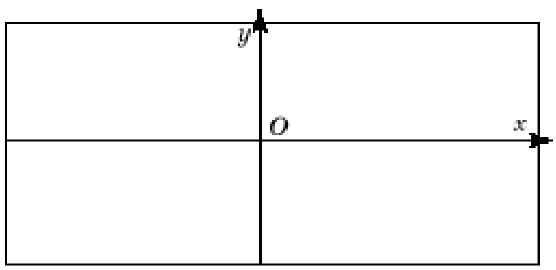

Рис. 2

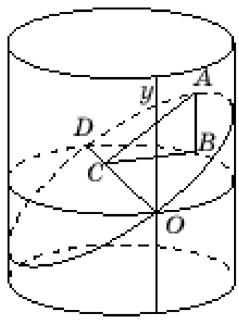

Рис. 3

Рассмотрим еще одно свойство сечений цилиндра плоскостью, а именно, связь этих сечений с тригонометрическими функциями.

Возьмем прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат Ox и Oy параллельно соответствующим сторонам (рис. 2). Затем свернем этот лист в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox свернется в окружность радиуса 1, а ось Oy станет образующей цилиндра (рис. 3). Через диаметр OD полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол в 45°. В этом случае сечением будет эллипс.

Развернем цилиндр обратно в прямоугольник. При этом эллипс развернется в кривую, являющуюся частью синусоиды. Для доказательства этого из произвольной точки A на эллипсе опустим перпендикуляры на плоскость окружности и диаметр окружности OD. Получим соответственно точки B и C. Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, AB = BC.Заметим, что $BC = \sin x$, где x - длина дуги OB. Для этого достаточно обратиться к рисунку 4 и вспомнить определение синуса. Таким образом, $AB = \sin x$, где $x = OB$, т. е. эта кривая является частью синусоиды с уравнением $y= \sin x$ (рис. 5).

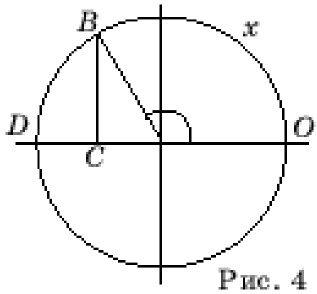

Рис. 4

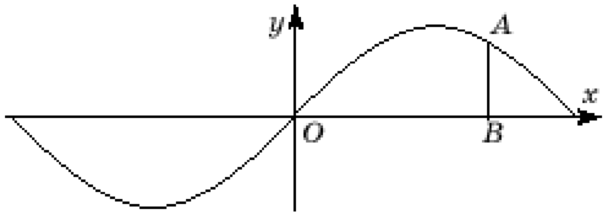

Рис. 5

Выясним теперь, что получается в сечениях конической поверхности плоскостью.

Ясно, что если плоскость сечения параллельна плоскости основания конуса и не проходит через его вершину конуса, то в сечении получается окружность.

Исследуем другие возможные случаи сечения конической поверхности плоскостью, не проходящей через вершину конуса.

Теорема. Если плоскость образует с осью конуса угол, больший, чем угол между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается эллипс.

Доказательство. Докажем, что сечение удовлетворяет фокальному свойству эллипса: сумма расстояний от произвольной точки сечения до двух данных точек есть величина постоянная.

Впишем в коническую поверхность две сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках F_1, F_2 и конической поверхности по окружностям C_1 и C_2 соответственно (рис. 6).

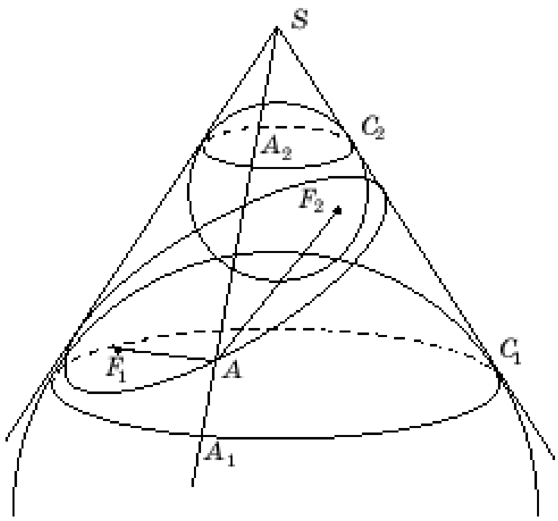

Рис. 6

Пусть A – произвольная точка сечения. Проведем образующую AS и обозначим через A_1, A_2 точки ее пересечения с окружностями C_1, C_2 соответственно. Заметим, что прямая AS является касательной к обеим сферам. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому $AF_1 + AF_2 = AA_1 + AA_2 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 не зависит от выбора точки A сечения. Она равна образующей соответствующего усеченного конуса. Поэтому сумма расстояний от точки A до точек F_1, F_2 будет постоянной.

Теорема. Если плоскость образует с осью конуса угол, равный углу между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается парабола.

Доказательство. Напомним, что параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой d, называемой директрисой, лежащих в этой плоскости. Впишем в коническую поверхность сферу, касающуюся плоскости α в некоторой точке F и конической поверхности по окружности C, лежащей в плоскости β, перпендикулярной оси. Плоскости α и β образуют между собой угол 90° -φ и пересекаются по некоторой прямой d (рис. 7).

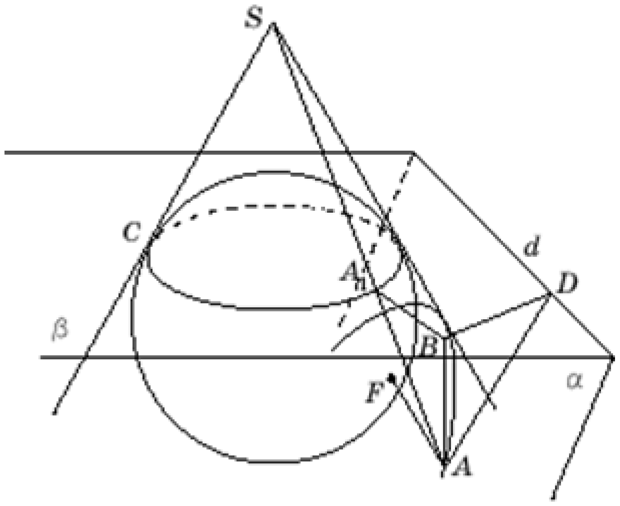

Рис. 7

Пусть A - произвольная точка сечения. Проведем образующую AS и обозначим через A_1 точку ее пересечения с окружностью C. Заметим, что прямая AS является касательной к сфере. Прямая AF также является касательной. Отрезки AF и AA_1 равны как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки.

Опустим из точки A перпендикуляр AB на плоскость β и перпендикуляр AD на прямую d. Угол A_1AB равен φ. Угол ADB является углом между плоскостями α и β и поэтому равен 90° -φ. Следовательно, угол BAD равен φ.

Прямоугольные треугольники ABA_1 и ABD равны, так как имеют общий катет и соответственно равные углы. Поэтому $AA_1 = AD$. Окончательно получаем равенство $AF = AD$, которое означает, что расстояние от произвольной точки сечения до точки F равно расстоянию от этой точки до прямой d, т. е. сечением конической поверхности в этом случае является парабола.

Теорема. Если плоскость образует с осью конуса угол, меньший угла между образующей и этой осью, то в сечении конической поверхности получается гипербола.

Доказательство. Напомним, что гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек плоскости постоянен. Впишем в коническую поверхность сферы, касающиеся плоскости сечения в некоторых точках F_1 и F_2 и конической поверхности по окружностям C_1 и C_2 соответственно.

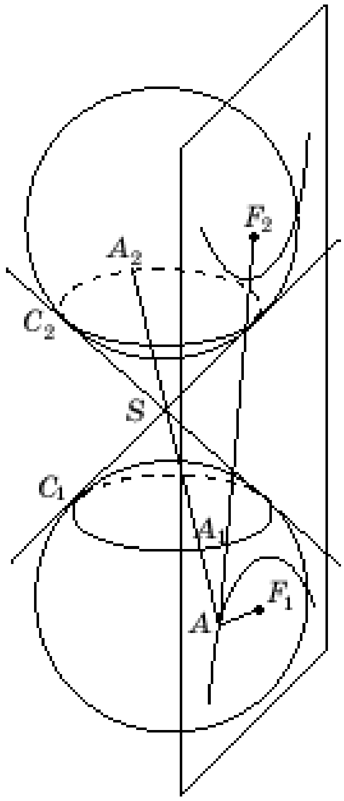

Рис. 8

Пусть A - точка сечения, расположенная в той же части конической поверхности, что и точка F_1 (рис. 8). Проведем образующую AS и обозначим через A_1, A_2 точки ее пересечения с окружностями C_1, C_2 соответственно. Воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. Тогда $AF_1 = AA_1$, $AF_2 = AA_2$. Поэтому AF_2 - $AF_1 = AA_2$ - $AA_1 = A_1A_2$. Но длина отрезка A_1A_2 не зависит от выбора точки A сечения. Она равна сумме образующих соответствующих конусов. Следовательно, разность AF_2 - AF_1 расстояний от точки A до точек F_1, F_2 будет постоянной. Аналогичным образом показывается, что если точка A расположена в той же части конической поверхности, что и точка F_2, то разность $AF_1 – AF_2$ будет постоянной. Таким образом, сечением конической поверхности в этом случае является гипербола.

Исторические сведения

Конические сечения с древних времен привлекали к себе внимание ученых. Так древнегреческий ученый Менехм (IV в. до н. э.) пользовался параболой и гиперболой для решения знаменитой задачи удвоения куба. Исследовали свойства конических сечений Евклид (IV в. до н. э.) и Архимед (III в. до н. э.). Полное и систематическое учение об этих кривых было изложено Аполлонием Пергским (III - II вв. до н. э.) в восьмитомном труде "Конические сечения". Там он впервые показал, как можно получить эти кривые, рассекая один и тот же конус плоскостью под разными углами. Он же ввел термины "эллипс", "парабола" и "гипербола", означающие в переводе с греческого соответственно "недостаток", "приложение" и "избыток".

Происхождение этих названий связано с задачей построения прямоугольника с заданным основанием, равновеликого данному квадрату. Переводя с геометрического языка, которым пользовался Аполлоний, на современный алгебраический язык, получаем уравнение

$$y^2 = 2px + lx^2,$$

где эллипсу соответствует отрицательное, гиперболе – положительное, а параболе – равное нулю значение второго члена в правой части. Таким образом, для параболы площадь квадрата, построенного на ординате y, равна площади прямоугольника со сторонами $2p$ и x. Для эллипса площадь прямоугольника меньше, а для гиперболы - больше площади соответствующего квадрата.

Интерес к коническим сечениям особенно возрос после того как Г. Галилей (1564-1642) установил, что тело, брошенное под углом к горизонту, двигается по параболе, а И. Кеплер сформулировал законы движения планет, согласно которым они описывают эллипсы. Позднее было установлено, что кометы и другие небесные тела движутся по эллипсам, параболам или гиперболам в зависимости от их начальной скорости.

Литература

1. Болтянский В.Г. Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1985.

2. Виленкин Н.Я. Функции в природе и технике. – М.: Просвещение, 1985.

3. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981.

4. Дорфман А.Г. Оптика конических сечений. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, 1959./Популярные лекции по математике. Выпуск 31.

5. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – М.: Мир. 1979.

6. Факультативные курсы по математике для 10-11 классов / Атанасян Л.С. и др. М.: НИИ школ МНО РСФСР, 1989.

7. Школьная энциклопедия. Математика. – М.: Дрофа, 1997.

8. Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1997.

9. Энциклопедия элементарной математики, книги I-V. – М.: Физматгиз, Москва, 1961 - 1966.

10. Журнал Квант: 1975, № 1, № 3, № 4, № 5; 1987, № 6; 1990, № 9.