ТЕТРАЭДР. ВИДЫ ТЕТРАЭДРОВ

Тетраэдр является одним из простейших многогранников, гранями которого являются четыре треугольника. Его можно считать пространственным аналогом треугольника. Рассмотрим свойства треугольников и аналогичные им свойства тетраэдров.

Теорема 1. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной окружности.

Теорема 1'. Биссектральные плоскости двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке – центре вписанной сферы.

Доказательство. Пусть *ABCD* – тетраэдр. Пересечением биссектральных плоскостей двугранных углов с ребрами *AB, AC,*и *BC* (рис. 1) является точка *O*, равноудаленная от всех граней тетраэдра. Следовательно, эта точка принадлежит биссектральным плоскостям остальных двугранных углов тетраэдра и является центром вписанной сферы.

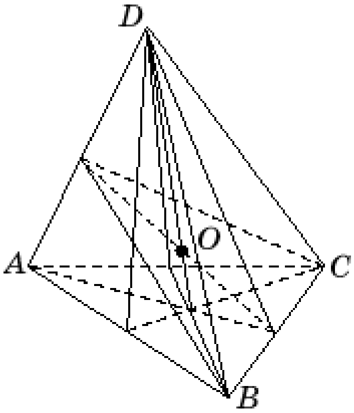

Рис. 1

Теорема 2. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке – центре описанной окружности.

Теорема 2'. Плоскости, проходящие через середины ребер тетраэдра и перпендикулярные этим ребрам, пересекаются в одной точке – центре описанной сферы.

Доказательство. Пусть *ABCD* – тетраэдр. Пересечением плоскостей, проходящих через середины ребер *AD, BD*, и *CD* является точка *O,* равноудаленная от всех вершин тетраэдра. Следовательно, эта точка принадлежит остальным плоскостям и является центром описанной сферы.

Теорема 2''. Прямые, перпендикулярные граням тетраэдра, и проходящие через центры их описанных окружностей, пересекаются в одной точке – центре описанной сферы.

Доказательство. Каждая такая прямая является геометрическим местом точек, равноудаленных от вершин соответствующей грани тетраэдра. Поэтому центр описанной сферы будет принадлежать всем этим прямым.

Заметим, что не у всякого тетраэдра прямые, проходящие через центры вписанных в грани окружностей и перпендикулярные этим граням, пересекаются в одной точке. Ответ на то, когда это происходит, дает следующая теорема.

Теорема 2'''. У тетраэдра существует сфера, касающаяся всех его ребер, тогда и только тогда, когда суммы противоположных ребер этого тетраэдра равны.

Доказательство. Пусть у тетраэдра *ABCD* существует сфера, касающаяся его ребер. Обозначим через *a, b, c* и *d* расстояния от соответствующих вершин тетраэдра до точек касания. Тогда $AB = a + b$, $CD = c + d$. Следовательно, $AB + CD = a + b + c + d$. Аналогично, $AC + BD = a + b + c + d$, $AD + BC = a + b + c + d$. Таким образом, суммы противоположных ребер тетраэдра равны.

Обратно. Предположим, что суммы противоположных ребер тетраэдра *ABCD* равны. Впишем в треугольник *ABC* окружность. Обозначим через *X* точку касания этой окружности стороны *AB* (рис. 2).

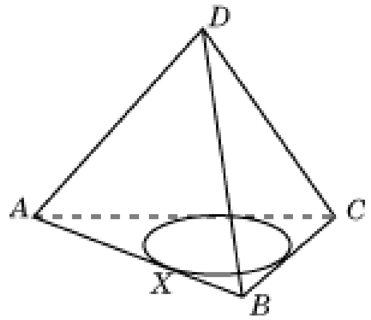

Рис. 2

Тогда $AX = (AB + AC - BC):2$. Так как $AC - BC = AD - BD$, то $AX = (AB + AD - BD):2$. Следовательно, точка *X* является точкой касания окружности, вписанной в треугольник *ABD*. Через центры этих двух окружностей проведем перпендикуляры. Они лежат в одной плоскости, проходящей через *X* и перпендикулярной *AB*. Точка *O* их пересечения будет равноудалена от сторон треугольников *ABC* и *ABD*. Таким образом, любые два перпендикуляра, проходящие через центры окружностей, вписанных в грани тетраэдра, пересекаются. Из этого следует, что или они лежат в одной плоскости, или пересекаются в одной точке. Поскольку они не лежат в одной плоскости, то значит, они пересекаются в одной точке *O*, равноудаленной от всех ребер тетраэдра, т.е. *O* – центр сферы, касающейся всех ребер данного тетраэдра.

Теорема 3. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, называемой центроидом треугольника и делятся в этой точке в отношениии 2 : 1.

Теорема 3'. Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке – центроиде тетраэдра и делятся в этой точке в отношении 3 : 1, считая от вершины.

Доказательство. Пусть *ABCD* – тетраэдр, *O* – точка пересечения медиан треугольника *ABC, P* – точка пересечения медиан треугольника *BCD, R* – точка пересечения отрезков *DO* и *AP* (рис. 3).

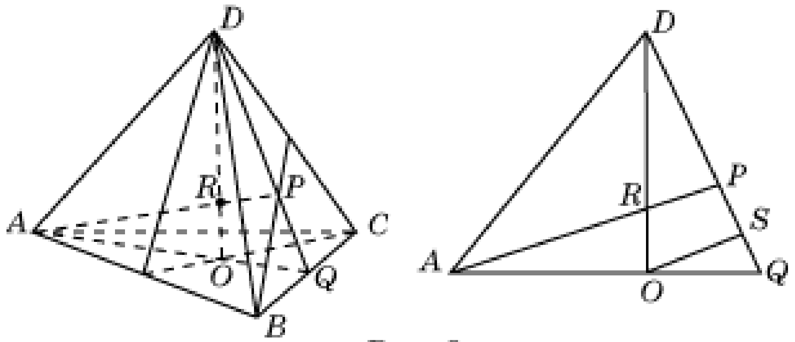

Рис. 3

Рассмотрим треугольник *AQD*. Точки *O* и *P* делят соответствующие стороны в отношении 2 : 1. Покажем, что точка *R* делит *DO* и *AP* в отношении 3 : 1. В треугольнике *APQ* проведем *OS* параллельно *AP*. Она разделит отрезок *PQ* в отношении 2 : 1. Если отрезок *SQ* принять за единицу, то отрезок *DP* будет равен 6. Отрезки *DR* и *RQ* относятся также как *DP* и *PS*, т.е. *DR* : *RQ* = 6 : 2 = 3 : 1. Аналогичным образом доказывается, что точка *R* делит отрезок *AP* в отношении 3 : 1. Отрезки, соединяющие вершины *B* и *C* с точками пересечения медиан противоположных граней также будут делить отрезок *DO* в отношении 3 : 1 и, следовательно, будут проходить через точку *O*. Что и требовалось доказать.

Теорема 4. Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдр, пересекаются в одной точке – центроиде.

Доказательство. Достаточно заметить, что в предыдущем доказательстве медиана треугольника *AQD*, проведенная из вершины *Q*, проходит через центроид *O*.

Теорема 5. Для цетроида *O* треугольника *ABC* имеет место равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Теорема 5'. Для цетроида *O* тетраэдра *ABCD* имеет место равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Теорема 6. Пусть *a* произвольная прямая, проходящая через центроид треугольника *ABC*. Будем считать одну из полуплоскостей, на которые эта прямая разбивает плоскость, положительной, а другую отрицательной. Тогда сумма расстояний от вершин треугольника до прямой *a*, взятых со знаком + или – в зависимости от того, какой полуплоскости принадлежит вершина, равна нулю.

Теорема 6'. Пусть α произвольная плоскость, проходящая через центроид тетраэдра *ABCD*. Будем считать одно из полупространств, на которые эта плоскость разбивает пространство, положительным, а другое отрицательным. Тогда сумма расстояний от вершин тетраэдра до плоскости α, взятых со знаком + или – в зависимости от того, какому полупространству принадлежит вершина, равна нулю.

Теорема 7. Пусть *a* произвольная прямая. Будем считать одну из полуплоскостей, на которые эта прямая разбивает плоскость, положительной, а другую отрицательной. Тогда сумма расстояний от вершин треугольника до прямой *a*, взятых со знаком + или – в зависимости от того, какой полуплоскости принадлежит вершина, равна утроенному расстоянию от центроида треугольника до прямой a.

Теорема 7'. Пусть α произвольная плоскость. Будем считать одно из полупространств, на которые эта плоскость разбивает пространство, положительным, а другое отрицательным. Тогда сумма расстояний от вершин тетраэдра до плоскости α , взятых со знаком + или – в зависимости от того, какому полупространству принадлежит вершина, равна учетверенному расстоянию от центроида тетраэдра до данной плоскости.

Теорема 8' (Менелая). Пусть на ребрах AB, BC, CD и AD тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 и D_1. Для того чтобы эти точки лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1.$$

Доказательство. Пусть точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат в одной плоскости (рис. 4). Опустим из вершин тетраэдра перпендикуляры AA', BB', CC', DD' на эту плоскость. Тогда $AA_1{:}A_1B = AA'{:}BB'$, $BB_1{:}B_1C = BB'{:}CC'$, $CC_1{:}C_1D = CC'{:}DD'$, $DD_1{:}D_1A = DD'{:}AA'$. Откуда и следует требуемое равенство.

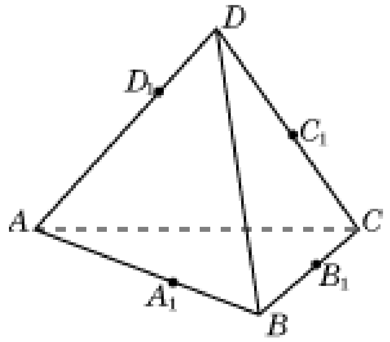

Рис. 4

Обратно, пусть выполняется указанное равенство. Через точки A_1, B_1, C_1 проведем плоскость. Она пересечет ребро AD в некоторой точке D'. Для точек A_1, B_1, C_1 и D' также выполняется указанное равенство. Из этого следует, что $DD_1{:}D_1A = DD'{:}D'A$ и, значит, D_1 и D' совпадают, т.е. A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат в одной плоскости.

Теорема 9' (Чевы). Пусть на ребрах AB, BC, CD и AD тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 и D_1. Плоскости ABC_1, BCD_1, CDA_1 и DAB_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1.$$

Доказательство. По предыдущей теореме выполнимость указанного равенства равносильна тому, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат в одной плоскости. При этом точка пересечения этих плоскостей является точкой пересечения диагоналей четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

Рассмотрим теперь некоторые специальные тетраэдры. ***Равногранным*** тетраэдром называется тетраэдр, у которого все грани равны.

Теорема 10. Для любого остроугольного треугольника существует равногранный тетраэдр, грани которого равны данному треугольнику.

Доказательство. Пусть ABC – произвольный остроугольный треугольник. Через его вершины проведем прямые, параллельные противоположным сторонам (рис. 5).

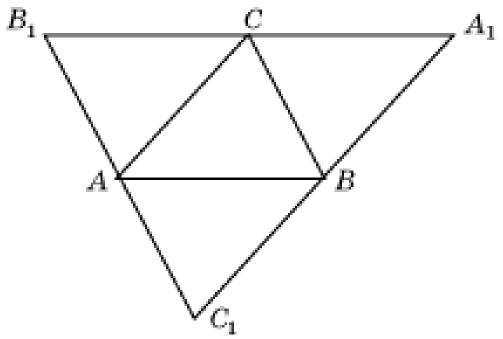

Рис. 5

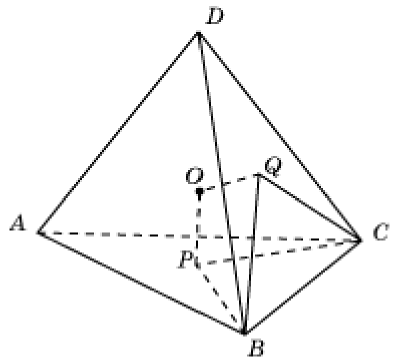

Рис. 6

Они образуют треугольник $A_1B_1C_1$, разбитый на четыре треугольника, равных исходному. Ясно, что $A_1B_1C_1$ представляет собой развертку равногранного тетраэдра.

Теорема 11. Тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда у него центры вписанной и описанной сфер совпадают.

Доказательство. Пусть в тетраэдре $ABCD$ центрами вписанной и описанной сфер является точка O. P и Q – и точки касания вписанной сферы граней ABC и BCD (рис.6). Заметим, что P и Q являются центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD соответственно. Из этого, в частности, следует, что треугольник ABC – остроугольный. Кроме того, треугольники BPC и BQC равны. Углы BAC и BDC равны половинам углов BPC и BQC, и следовательно также равны. Таким образом, плоские углы при вершине D равны углам треугольника ABC. Значит, в сумме они составляют 180^0. Аналогично, плоские углы при остальных вершинах тетраэдра в сумме составляют 180^0. Поэтому развертка этого тетраэдра имеет вид, указанный в теореме 1. Следовательно, тетраэдр равногранный.

Покажем обратное, пусть $ABCD$ – равногранный тетраэдр, O – цетр описанной сферы. Тогда плоскости граней пересекают описанную сферу по окружностям одинакового радиуса. Следовательно, расстояния от точки O до граней тетраэдра равны и, значит O – центр вписанной сферы.

Прямоугольным тетраэдром называется тетраэдр, у которого все плоские углы при какой-нибудь вершине прямые.

Теорема 12. Основанием высоты прямоугольного тетраэдра, проведенной из вершины с прямыми плоскими углами, является точка пересечения высот противоположной грани.

Теорема 13. (Пифагора) Квадрат площади грани прямоугольного тетраэдра, лежащей против вершины с прямыми плоскими углами, равен сумме квадратов площадей остальных граней этого тетраэдра.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – прямоугольный тетраэдр (рис. 7). Плоские углы при вершине D прямые. Можно было бы обозначить ребра, выходящие из вершины D через a, b, c, а затем воспользоваться формулой Герона для нахождения площади треугольника ABC.

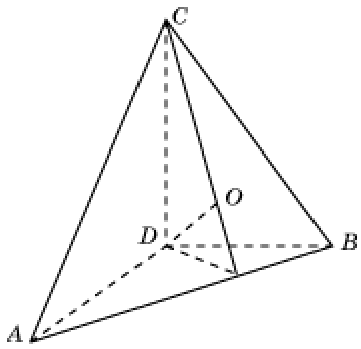

Рис. 7

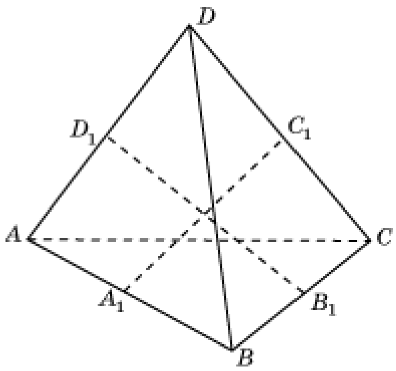

Рис. 8

Мы рассмотрим другой способ. Имеем $S_{ADB} = S_{ABC}\cos\gamma$; $S_{ACD} = S_{ABC}\cos\beta$; $S_{BCD} = S_{ABC}\cos\alpha$, где γ, β, α - соответствующие двугранные углы, равные углам CDO, BDO и ADO. Таким образом, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ составляют координаты единичного вектора, поэтому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Значит, $S^2_{ABC} = S^2_{ABD} + S^2_{BCD} + S^2_{ACD}$. Что и требовалось доказать.

Ортогональным называется тетраэдр, у которого противоположные ребра попарно перпендикулярны.

Ортоцентрическим называется тетраэдр, у которого высоты или их продолжения пересекаются в одной точке – ортоцентре тетраэдра.

Теорема 14. Тетраэдр является ортогональным тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, равны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – тетраэдр. A_1, B_1, C_1, D_1– середины двух пар противоположных ребер (рис. 8).

Тогда $A_1B_1D_1C_1$– параллелограмм. Его диагонали равны тогда и только тогда, когда он – прямоугольник, т.е. $AC \perp BD$.

Теорема 2. Тетраэдр является ортогональным тогда и только тогда, когда он является ортоцентрическим.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – ортогональный тетраэдр (рис. 9). DD_2– высота, опущенная из вершины D. Плоскость CDD_2 перпендикулярна AB и, следовательно, DC_1 и CC_1– высоты треугольников ABC и ABD. Высоты DD_2 и CC_2 треугольника C_1CD пересекаются.

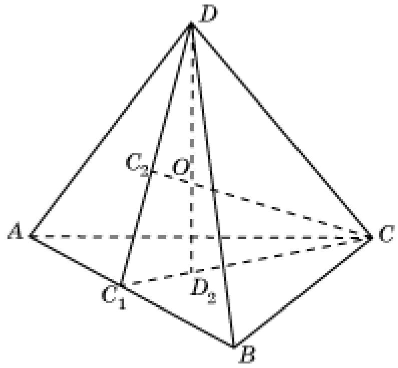

Рис. 9

Таким образом, произвольные пары высот тетраэдра пересекаются в одной точке. Но попарно пересекающиеся прямые или лежат в одной плоскости, или пересекаются в одной точке. В нашем случае прямые не лежат в одной плоскости и, следовательно, пересекаются в одной точке O.

Обратно, пусть высоты тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке O. Тогда $DD_2 \perp ABC$ и, следовательно, $DD_2 \perp ABC$. Аналогично, $CC_2 \perp ABD$ и, следовательно, $CC_2 \perp AB$. Таким образом, AB перпендикулярна плоскости COD и, следовательно, $AB \perp CD$. Аналогично показывается перпендикулярность остальных противоположных ребер.

Теорема 3. Тетраэдр является ортогональным тогда и только тогда, когда одна из его высот проходит через ортоцентр соответствующей грани.

Доказательство. Необходимость вытекает из Теоремы 2. Покажем достаточность. Пусть D_2 – ортоцентр грани ABC, DD_2 – высота тетраэдра $ABCD$. Тогда BC перпендикулярна плоскости AA_1D и, следовательно, BC перпендикулярна AD. Аналогично показывается перпендикулярность остальных противоположных ребер.

Теорема 4. В ортогональном тетраэдре окружности 9-ти точек всех граней лежат на одной сфере (сфера 24 точек).

Доказательство. Рассмотрим сферу с центром в центроиде тетраэдра и диаметром, равным отрезкам, соединяющим середины противоположных ребер. Эта сфера проходит через середины всех ребер тетраэдра и, следовательно, содержит окружности 9 точек всех граней.

Литература

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть II. Стереометрия. – М.: Учпедгиз, 1938.

2. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии. Часть II. Геометрия в пространстве. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

3. В.В.Прасолов, И.Ф.Шарыгин. Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989.

4. Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 3. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954.