В.А. Смирнов

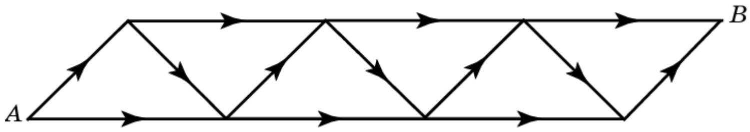
Метод математической индукции

1. Индукция в арифметике

1. Найдите сумму $1 + 2 + \ldots + n$.
2. Найдите сумму $1 + 3 + \ldots + 2n - 1$.
3. Найдите сумму $d + 2d + \ldots + (n - 1)d$.
4. Найдите сумму $a + (a + d) + \ldots + (a + (n - 1)d)$.
5. Найдите сумму $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.
6. Найдите сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)$.
7. Найдите сумму $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.
8. Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.
9. Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.
10. Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
11. * Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
12. * Найдите сумму $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$.
13. * Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.
14. * Пятнадцать детей собрали сто орехов. Докажите, что хотя бы двое из них собрали одинаковое число орехов.

2. Индукция в геометрии

1. Сколько прямых проходит через различные пары из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?
2. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?
3. На сколько частей разбивают плоскость n прямых, пересекающихся в одной точке?
4. На сколько частей разбивают плоскость n попарно параллельных прямых?
5. Какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n прямых?
6. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n окружностей?
7. На какое наибольшее число частей разбивают плоскость n окружностей?
8. Сколько диагоналей имеет n-угольник?
9. Сколько вершин, ребер и граней имеет n-угольная пирамида?
10. Сколько вершин, ребер и граней имеет n-угольная призма?
11. Сколько диагоналей имеет n-угольная призма?
12. Сколько имеется путей из A и B по отрезкам, изображенным на рисунке, в направлениях указанных стрелками?



13. Сколькими способами человек может подняться по ступенькам лестницы с первой на 10-ю ступеньку, если с каждой ступеньки он может шагать или на следующую, или через одну ступеньку?

14. Из квадрата клетчатой бумаги размером 16х16 вырезали одну клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на уголки из трех клеток.

15. Из квадрата клетчатой бумаги размером 16х16 вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на прямоугольники из двух клеток.

3. Доказательство по индукции

1. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

3. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

4. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

6. Докажите, что для любого натурального числа n и любого действительного числа $q \neq 1$ выполняется равенство

$$1 + q + q^2 \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

7. Докажите, что для любого натурального числа n и любого действительного числа $x \geq -1$ выполняется неравенство

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

8. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется неравенство $2^n > n$.

9. Докажите, что для любого натурального числа $n \geq 4$ выполняется неравенство $n! > 2^n$.

10. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

11. * Докажите, что любую карту на плоскости, образованную конечным набором прямых, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние области, т.е. области, имеющие общую границу (отрезок, луч или прямую), имели разный цвет.

12. * Докажите, что любую карту на плоскости, образованную конечным набором окружностей, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние области, т.е. области, имеющие общую границу (дугу окружности), имели разный цвет.

4. Переведите на английский язык слова и сочетание слов

Точка; прямая; плоскость; пространство; угол; треугольник; многоугольник; окружность; круг; многогранник; сфера; шар; расстояние.

Натуральное число; рациональное число; иррациональное число; действительное число; положительные числа; отрицательные числа; сумма; произведение; множество; функция; отношение; равенство; неравенство; уравнение; больше, меньше; абсолютная величина; бесконечность.

5. Элементы комбинаторики

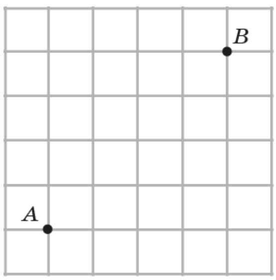
1. Укажите способ образования треугольных чисел. Напишите выражение для n-го треугольного числа.

2. Укажите способ образования пятиугольных чисел. Напишите выражение для n-го пятиугольного числа.

3. Изобразите числа, расположенные в первых нескольких строках треугольника Паскаля.

4. Напишите формулу, по которой числа треугольника Паскаля T_n^k, расположенные в n-ой строке, выражаются через числа предыдущей строки.

5. Сколько имеется кратчайших путей из A в B, проходящих по сторонам сетки, изображенной на рисунке, состоящей из единичных квадратов?



6. В магазине «Все для чая» имеется 5 различных чашек и 3 различных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

7. В магазине «Все для чая» имеется 5 различных чашек, 3 различных блюдца и 4 различных чайных ложек. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем и ложкой?

8. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

9. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами это можно сделать?

10. Код замка является набором из пяти цифр. Сколько имеется таких наборов?

11. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

12. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не смогли бить друг друга?

13. 65 школьников за год написали три контрольные работы. Верно ли, что среди этих школьников найдутся двое, получившие одинаковые оценки за все контрольные работы?

14. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из пяти различных красок?

15. Из класса, в котором учатся 20 человек, нужно выбрать троих человек. Сколькими способами это можно сделать?

16. У одного человека имеется семь книг, а у другого – 9. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

5. Координаты и векторы

1. Точки $A(0, 0)$, $B(4, 1)$, $C(5, 4)$ и D являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки D.

2. Точки $A(0, 0)$, $B(4, 1)$, C и $D(1, 3)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки C.

3. Точки $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $B(8, 2)$, $C(2, 6)$ являются вершинами. четырехугольника. Найдите координаты точки P пересечения его диагоналей.

4. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(8, -6)$ относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат.

5. Точки A и B имеют координаты: а) (2, 4) и (8, -6); б) (3, 5) и (-2, 1) соответственно. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

6. Диагонали правильного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O. Укажите вектор, равный вектору: а) $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{EO}-\overrightarrow{FO}$; б) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{AO}$, началом и концом которого являются вершины этого шестиугольника.

7. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{DO}$.

8. Диагонали ромба $ABCD$ равны 10 и 14. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

9. Найдите косинус угла между векторами: а) $\vec{a}$ (1, 3) и $\vec{b}$ (4, 2); б) $\vec{a}$ (-2, 4) и $\vec{b}$ (3, 1).

10. Для правильного шестиугольника $ABCDEF$, стороны которого равны 2, найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{CD}$.

6. Прямые на координатной плоскости

1. Изобразите прямую, заданную уравнением: а) $2x + 3y = 6$; б) $-3x + 2y = 12$; в) $2x - 3y = 6$; г) $3x - 2y = 12$.
2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки с координатами: а) (1, 1), (3, 2); б) (-1, 1), (1, 2); в) (-2, -1), (-1, 2); г) (-1, 2), (1, -1).
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку с координатами: а) (2, 1); б) (-1, 2), в) (-2, -1), г) (1, -2), и параллельную прямой, заданной уравнением $x + 2y = 1$.
4. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку с координатами: а) (2, 1); б) (-1, 2), в) (-2, -1), г) (1, -2), и направляющим вектором с координатами (1, 2).
5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку с координатами: а) (2, 1); б) (-1, 2), в) (-2, -1), г) (1, -2), и перпендикулярную прямой, заданной уравнением $x + 2y = 1$.
6. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку с координатами: а) (2, 1); б) (-1, 2), в) (-2, -1), г) (1, -2), и вектором нормали с координатами (1, 2).
7. * Напишите уравнение прямой, симметричной прямой, заданной уравнением $2x + 3y = 6$, относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат; г) биссектрисы первого и третьего координатных углов.
8. Найдите расстояние от точки $A(3, 1)$ до прямой, заданной уравнением: а) $y = x$; б) $y = -x$; в) $y = 2x$; г) $x + y = 1$: д) $x + 2y = 3$.
9. Найдите расстояние между двумя прямыми, заданными уравнениями: а) $y = x$, $y = x + 1$; б) $x + y = 1$, $x + y = 2$; в) $2x + 3y = 6$, $2x + 3y = 12$.
10. Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями: а) $y = x$, $y = 2x$; б) $y = 3x$, $y = -x$; в) $x + y = 1$, $x - y = 2$.

7. Переведите текст на русский язык и решите задачи

If we have two points $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$, then we can draw one and only one line through both points.

By the slope of this line we mean the ratio of Δy to Δx. The slope is often denoted m: $m = \Delta y/\Delta x = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

For example, the line joining the points (1,−2) and (3, 5) has slope $(5 + 2)/(3 - 1) = 7/2$.

The most familiar form of the equation of a straight line is: $y = mx + b$. Here m is the slope of the line: if you increase x by 1, the equation tells you that you have to increase y by m. If you increase x by Δx, then y increases by $\Delta y = m\Delta x$.

The number b is called the y-intercept, because it is where the line crosses the y-axis.

If you know two points on a line, the formula $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ gives you the slope. Once you know a point and the slope, then the y-intercept can be found by substituting the coordinates of either point in the equation: $y_1 = mx_1 + b$, i.e., $b = y_1 - mx_1$.

Alternatively, one can use the "point-slope" form of the equation of a straight line: start with $(y - y_1)/(x - x_1) = m$ and then multiply to get $(y - y_1) = m(x - x_1)$, the point-slope form.

Of course, this may be further manipulated to get $y = mx - mx_1 + y_1$, which is essentially the "$mx + b$" form.

It is possible to find the equation of a line between two points directly from the relation $(y - y_1)/(x - x_1) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, which says "the slope measured between the point (x_1, y_1) and the point (x_2, y_2) is the same as the slope measured between the point (x_1, y_1) and any other point (x, y) on the line."

For example, if we want to find the equation of the line joining our earlier points $A(2, 1)$ and $B(3, 3)$, we can use this formula:

$$\frac{y-1}{x-2} = \frac{3-1}{3-2} = 2,$$

so that $y - 1 = 2(x - 2)$, i.e., $y = 2x - 3$.

Of course, this is really just the point-slope formula, except that we are not computing m in a separate step.

The slope m of a line in the form $y = mx + b$ tells us the direction in which the line is pointing.

If m is positive, the line goes into the 1st quadrant as you go from left to right. If m is large and positive, it has a steep incline, while if m is small and positive, then the line has a small angle of inclination.

If m is negative, the line goes into the 4th quadrant as you go from left to right. If m is a large negative number (large in absolute value), then the line points steeply downward; while if m is negative but near zero, then it points only a little downward.

If $m = 0$, then the line is horizontal: its equation is simply $y = b$.

There is one type of line that cannot be written in the form $y = mx + b$, namely, vertical lines. A vertical line has an equation of the form $x = a$.

Sometimes one says that a vertical line has an "infinite" slope.

Sometimes it is useful to find the x-intercept of a line $y = mx + b$. This is the x-value when $y = 0$. Setting $mx + b$ equal to 0 and solving for x gives: $x = -b/m$. For example, the line $y = 2x - 3$ through the points $A(2, 1)$ and $B(3, 3)$ has x-intercept 3/2.

Exercises

1. Three vertices of a rectangle are (-1, 2), (3, -5), (-1, -5). What is the fourth vertex?

2. Find the distance between each pair of points:
(a) (1, 2), (6, 7); (b) (2, 5), (-1 , 3); (c) (-7, 3), (1, -2); (d) (a, b), (b, a).

3. Show that the triangle whose vertices are (3, -3), (-3, 3), and $(3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ is equilateral.

4. The two points (2, -2) and (- 6, 5) are the endpoints of a diameter of a circle. Find the center and radius of the circle.

5. Determine whether the lines $3x + 6y = 7$ and $2x + 4y = 5$ are parallel.

6. Find the equation of the line:
(a) through (2, -3) with slope -4;
(b) through (-4, 2) and (3, -1);
(c) through (2, -4) and parallel to the x-axis;
(d) through (1, 6) and parallel to the y-axis;
(e) through (4, -2) and parallel to $x + 3y = 7$;
(f) through (5, 3) and perpendicular to $y + 7 = 2x$;
(g) through (-4, 3) and parallel to the line determined by (-2, -2) and (1, 0);
(h) that is the perpendicular bisector of the segment joining (1, -1) and (5, 7);
(i) through (-2, 3) with inclination 135°.

7. Find the point of intersection of each of the following pairs of lines:
(a) $2x + 2y = 2$, $y = x - 1$;
(b) $10x + 7y = 24$, $15x - 4y = 7$;
(c) $3x - 5y = 7$, $1\,5y + 25 = 9x$.

8*. Find the point equidistant from the three points (-9, 0), (6, 3), and (-5, 6).

9*. Find the values of the constant k for which the line $(k - 3)x - (4 - k^2)y + k^2 - 7k + 6 = 0$ is
(a) parallel to the x-axis;
(b) parallel to the y-axis;
(c) through the origin.

8. Множества. Операции над множествами

1. Докажите, что для любых множеств A, B выполняется равенство $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
2. Верно ли, что для любых множеств A, B выполняется равенство $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$?

3. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняется равенство $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. Верно ли, что для любых множеств A, B, C выполняется равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?
5. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняется равенство $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
6. Верно ли, что для любых множеств A, B, C выполняется равенство $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$?
7. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняется равенство $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
8. Верно ли, что для любых множеств A, B, C выполняется равенство $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
9. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняется равенство $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
10. Сколько имеется подмножеств, состоящих из: а) одного элемента; б) двух элементов; в) k элементов, у множества, состоящего из n элементов?
11. Сколько имеется всех подмножеств у множества, состоящего из n элементов?
12. Сколько имеется различных отображений из множества, состоящего из n элементов, в множество, состоящее из m элементов?

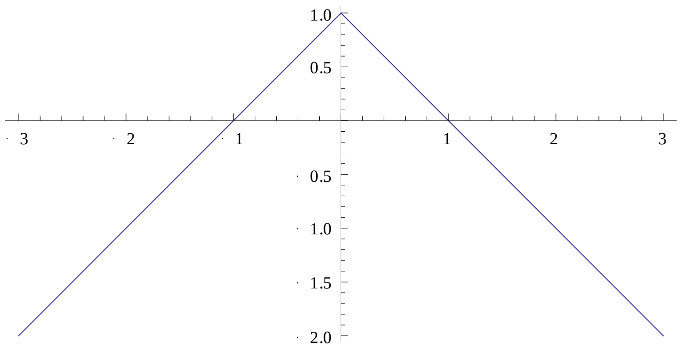
9. Взаимно однозначные соответствия

1. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством четных натуральных чисел.
2. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством нечетных натуральных чисел.
3. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством четных натуральных чисел и множеством нечетных натуральных чисел.
4. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством натуральных чисел, делящихся на три.
5. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством натуральных чисел, являющихся степенями двойки.
6. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством целых отрицательных чисел.

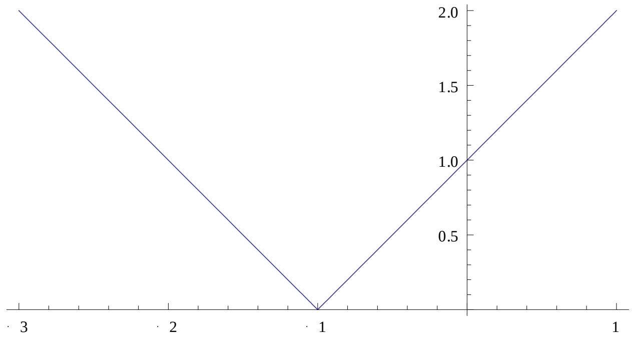
7. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством целых чисел.
8. Установите взаимно однозначное соответствие между отрезком [0, 1] и отрезком [0, *c*].
9. Установите взаимно однозначное соответствие между отрезком [0, 1] и отрезком $[a, b]$.
10. Установите взаимно однозначное соответствие между отрезком $[a, b]$ и отрезком $[c, d]$.
11. Установите взаимно однозначное соответствие между интервалом (a, b) и интервалом (c, d).
12. Установите взаимно однозначное соответствие между интервалом $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и числовой прямой $(-\infty, +\infty)$.
13. * Установите взаимно однозначное соответствие между отрезком [0, 1] и промежутком [0, 1).
14. * Установите взаимно однозначное соответствие между отрезком [0, 1] и промежутком (0, 1).
15. * Для множества A установите взаимно однозначное соответствие между множеством $\{0,1\}^A$ и множеством всех подмножеств множества *A*.

10. Графики

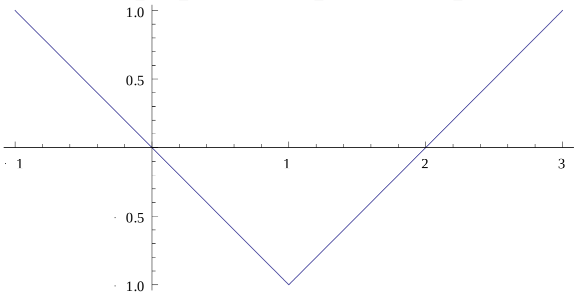
1. Изобразите график функции $y = |x - 1|$.
2. Изобразите график функции $y = |x| + 1$.
3. Изобразите график функции $y = |x + 1| - 1$.
4. Изобразите график функции $y = ||x| - 1|$.
5. Изобразите график функции $y = |x + 1| + |x - 1|$.
6. Изобразите график функции $y = |x + 1| - |x - 1|$.
7. Изобразите график функции $y = |x + 1| - |x| + |x - 1|$.
8. Изобразите график функции $y = |x - 2| - |x - 1| + |x| - |x+1| + |x+2|$.
9. Изобразите график $|x| = |y|$.
10. Изобразите график $|x| + |y| = 1$.
11. Изобразите график $|x| - |y| = 1$.
12. Укажите функцию, график которой изображен на рисунке.



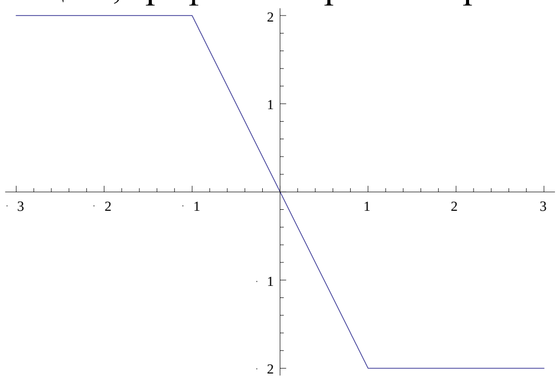
13. Укажите функцию, график которой изображен на рисунке.



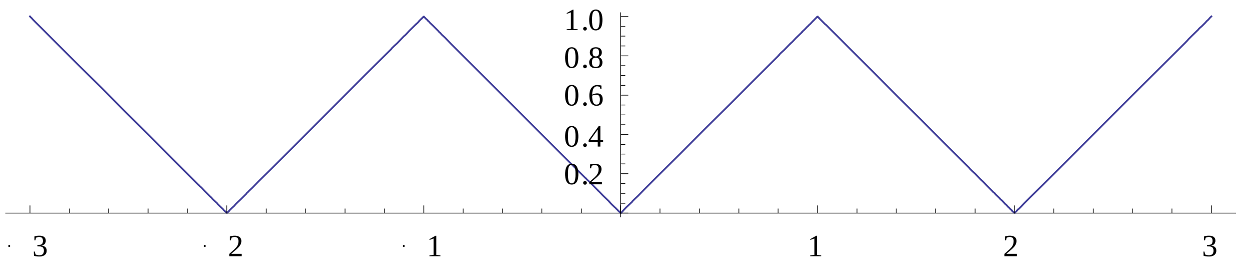
14. Укажите функцию, график которой изображен на рисунке.



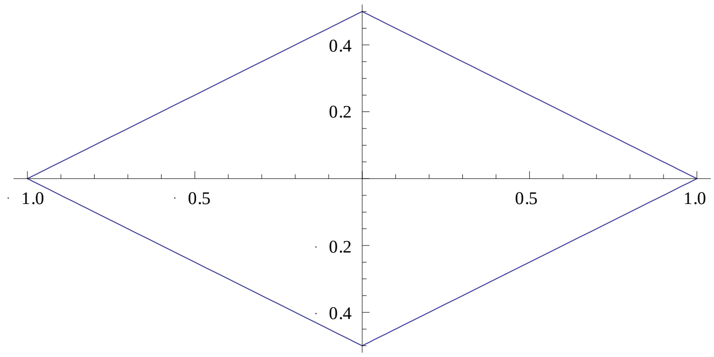
15*. Укажите функцию, график которой изображен на рисунке.



16*. Укажите функцию, график которой изображен на рисунке.



17*. Укажите уравнение, задающее график, изображенный на рисунке.



18*. Укажите уравнение, задающее график, изображенный на рисунке.