

Открытый банк заданий по геометрии (планиметрия)

2018-2019 уч. год

ТЕОРЕМЫ, СВОЙСТВА И ФОРМУЛЫ

1. Теорема о вертикальных углах.
2. Первый признак равенства треугольников.
3. Второй признак равенства треугольников.
4. Третий признак равенства треугольников.
5. Свойства равнобедренных треугольников.
6. Признак равнобедренного треугольника.
7. Теорема о внешнем угле треугольника.
8. Соотношение между сторонами и углами треугольника.
9. Неравенство треугольника.
10. Теорема о перпендикуляре и наклонной.
11. Теорема о диаметре и хорде окружности.
12. Взаимное расположение прямой и окружности.
13. Теорема о касательной к окружности.
14. Взаимное расположение двух окружностей.
15. Теорема о серединном перпендикуляре к отрезку.
16. Теорема о биссектрисе угла.
17. Признак параллельности двух прямых.
18. Теорема о сумме углов треугольника.
19. Теорема о сумме углов выпуклого многоугольника.
20. Свойства параллелограмма.
21. Признаки параллелограмма.
22. Признак прямоугольника.
23. Признак ромба.
24. Теорема о средней линии треугольника.
25. Теорема о средней линии трапеции.
26. Теорема Фалеса.
27. Теорема о пропорциональных отрезках.
28. Теорема Менелая.
29. Теоремы об углах с вершиной на окружности.
30. Теоремы об углах с вершиной внутри окружности.
31. Теоремы об углах с вершиной вне окружности.
32. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
33. Теорема об окружности, описанной около четырёхугольника.
34. Теорема об окружности, вписанной в треугольник.
35. Теорема об окружности, вписанной в четырёхугольник.
36. Теорема о высотах треугольника.
37. Теорема о медианах треугольника.
38. Свойства центральной симметрии.
39. Свойства поворота и симметрии n -го порядка.
40. Свойства осевой симметрии.

41. Свойства параллельного переноса.
42. Свойства движения.
43. Первый признак подобия треугольников.
44. Второй признак подобия треугольников.
45. Третий признак подобия треугольников.
46. Свойства подобия.
47. Теоремы о подобии треугольников, связанных с окружностью.
48. Теорема Пифагора.
49. Тригонометрические тождества.
50. Теорема косинусов.
51. Теорема синусов.
52. Длина окружности.
53. Площадь прямоугольника.
54. Площадь параллелограмма.
55. Площадь треугольника.
56. Формула Герона.
57. Площадь трапеции.
58. Площадь круга.
59. Площадь сектора.
60. Площадь сегмента.
61. Площади подобных фигур.
62. Формулы радиуса окружности, описанной около треугольника.
63. Формулы радиуса окружности, вписанной в треугольник.
64. Формула радиуса окружности, вписанной в многоугольник.
65. Формула расстояния между точками на координатной плоскости.
66. Уравнение окружности.
67. Формула скалярного произведения векторов.
68. Уравнение прямой в декартовых координатах.
69. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным вектором нормали.
70. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
71. Формула угла между двумя прямыми.
72. Формула расстояния от точки до прямой.
73. Параметрические уравнения прямой.
74. Параметрические уравнения окружности.
75. Параметрические уравнения циклоиды.
76. Параметрические уравнения кардиоиды.
77. Полярные координаты. Формулы, связывающие полярные и декартовы координаты точки.
78. Уравнение спирали Архимеда в полярных координатах.
79. Уравнение логарифмической спирали в полярных координатах.
80. Уравнение трилистника в полярных координатах.

ЗАДАЧИ

1. Доказательство

1. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
2. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1 , $AB = A_1B_1$, биссектриса AD равна биссектрисе A_1D_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
3. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
4. Докажите, что если в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB , A_1B_1 и высоты CH , C_1H_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
5. Докажите, что если в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB , A_1B_1 и высоты AH , A_1H_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.
6. Докажите, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.
7. Докажите, что если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.
8. Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.
9. Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.
10. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.
11. Докажите, что если две высоты треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный.
12. Хорды AC и BD окружности, пересекающиеся в точке E . Докажите, что треугольники ABE и CDE подобны.
13. Докажите, что произведение отрезков хорд, проведенных через внутреннюю точку круга, постоянно и равно произведению отрезков диаметра, проведенного через ту же точку.
14. Через внешнюю точку E окружности проведены две прямые, пересекающая окружность соответственно в точках A , C и B , D . Докажите, что треугольники ADE и BCE подобны.
15. Через внешнюю точку E окружности проведены две прямые, пересекающая окружность соответственно в точках A , C и B , D . Докажите, что $AE \cdot CE = BE \cdot DE$.
16. Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B , и касательная EC (C – точка касания). Докажите, что треугольники EAC и ECB подобны.

17. Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B , и касательная EC (C – точка касания). Докажите, что произведение отрезков AE и BE секущей равно квадрату отрезка CE касательной.

18. Докажите, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из прямого угла на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.

19. Докажите, что отрезок EF , соединяющий точки на боковых сторонах трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$), проходящий через точку G пересечения диагоналей и параллельный основаниям трапеции, делится в точке G пополам.

20. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

21. Докажите, что медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

22. Докажите, что угол, вписанный в окружность, равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.

23. Докажите, что угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол.

24. Докажите, что угол с вершиной вне круга, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

25. Докажите, что сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n-2)$.

26. Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, суммы противоположных углов равны 180° .

27. Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы противоположных сторон равны.

28. Докажите, что основания высот треугольника, основания медиан и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром, принадлежат одной окружности (окружности Эйлера).

2. Комбинаторные задачи

1. Сколько прямых проходит через различные пары из: а) трех; б) четырех; в) пяти; г)* n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

2. На сколько частей разбивают плоскость: а) две; б) три; в) четыре; г)* n прямых, пересекающихся в одной точке?

3. На сколько частей разбивают плоскость: а) две; б) три; в) четыре; г)* n попарно параллельных прямых?

4. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) две; б) три; в) четыре; г)* n прямых?

5. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь: а) две; б) три; в) четыре; г)* n окружностей?
6. Сколько диагоналей имеет: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник; г)* n -угольник?
7. Сколько вершин (V), ребер (P), граней (Γ) у: а) треугольной; б) пятиугольной; в) шестиугольной; г) n -угольной призмы?
8. Сколько вершин (V), ребер (P), граней (Γ) у: а) треугольной; б) пятиугольной; в) шестиугольной; г) n -угольной пирамиды?
9. Сколько диагоналей у: а) треугольной; б) пятиугольной; в) шестиугольной; г) n -угольной призмы?
10. Сколько диагоналей у: а) треугольной; б) пятиугольной; в) шестиугольной; г) n -угольной пирамиды?

3. Геометрические места точек (ГМТ)

1. Укажите ГМТ, равноудаленных от двух данных точек.
2. Укажите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.
3. Укажите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с заданным основанием AB .
4. Для данных точек A и B укажите ГМТ, расстояние от которых до точки A меньше, чем расстояние до точки B .
5. Для данного угла укажите геометрическое место его внутренних точек C , равноудаленных от его сторон.
6. Укажите ГМТ, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.
7. Укажите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных пересекающихся прямых.
8. Для данных пересекающихся прямых a и b укажите ГМТ C , расположенных ближе к a , чем к b .
9. Укажите ГМТ, равноудаленных от данной точки и данной прямой, не проходящей через эту точку.
10. Укажите ГМТ, сумма расстояний от которых до двух данных точек равна заданному числу, большему расстояния между данными точками.

4. Построение циркулем и линейкой

1. Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку.
2. Постройте середину данного отрезка.
3. Постройте прямую, перпендикулярную данной прямой, и проходящую через данную точку: а) принадлежащую; б) не принадлежащую этой прямой.
4. Постройте прямую, параллельную данной прямой, и проходящую через данную точку, не принадлежащую этой прямой.
5. Постройте биссектрису данного угла.
6. Постройте треугольник по трем сторонам.

7. Разделите данный отрезок на три равные части.
8. Для данных отрезков a, b, c постройте отрезок $\frac{a \cdot b}{c}$.
9. Для данных отрезков a, b постройте отрезок $\sqrt{a \cdot b}$.
10. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку вне окружности.

5. Экстремальные задачи

1. На данной прямой c найдите такую точку C , расстояние до которой от данной точки A , не принадлежащей прямой c , наименьшее.
2. Пусть точка A не принадлежит прямой c . Докажите, что не существует точки D на прямой c , для которой расстояние AD наибольшее.
3. На окружности найдите точку, до которой расстояние от точки A , расположенной вне данной окружности, наименьшее.
4. На окружности найдите точку, до которой расстояние от точки A , расположенной внутри данной окружности, наименьшее.
5. На окружности найдите точку, до которой расстояние от точки A , расположенной вне данной окружности, наибольшее.
6. На окружности найдите точку, до которой расстояние от точки A , расположенной внутри данной окружности, наибольшее.
7. На данной окружности найдите точку, от которой расстояние до данной прямой a наименьшее.
8. На данной окружности найдите точку, от которой расстояние до данной прямой a наибольшее.
9. На двух данных окружностях найдите точки, расстояние между которыми наименьшее.
10. На двух данных окружностях найдите точки, расстояние между которыми наибольшее.
11. Дана прямая c и две точки A и B , лежащие от нее по одну сторону. На прямой c найдите такую точку C , для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая.
12. Дан острый угол aOb и точка C внутри него. На сторонах a и b этого угла найдите точки соответственно A и B , для которых периметр треугольника ABC наименьший.
13. В данный остроугольный треугольник впишите треугольник наименьшего периметра.
14. Для данного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин этого треугольника наименьшая.
15. Населённые пункты A и B расположены на противоположных берегах реки. В каком месте реки следует построить мост CD и проложить дороги AC и BD , чтобы путь $AC + CD + DB$ имел наименьшую длину? (Берега реки предполагаются параллельными, а мост строится перпендикулярно этим берегам).

16. Из всех прямоугольников данной данного периметра найдите прямоугольник наибольшей площади.

6. Углы многоугольников

1. В треугольнике ABC угол A равен 60° , BD и CE – высоты, пересекающиеся в точке O . Найдите угол DOE .

2. Острый угол прямоугольного треугольника равен 32° . Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла, равен 40° . Найдите больший из острых углов этого треугольника.

4. В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 82° . AD , BE и CF – его биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF .

5. Чему равна сумма углов n -угольника?

6. Чему равна сумма внешних углов выпуклого n -угольника, взятых по одному при каждой вершине.

7. Найдите угол правильного: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) восьмиугольника; г) десятиугольника; д) двенадцатиугольника.

8. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 900° . Сколько у него сторон?

9. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый n -угольник?

10. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен; а) 36° ; б) 24° ?

7. Вписанные и описанные многоугольники

1. Сторона равностороннего треугольника равна 1. Найдите радиус описанной окружности.

2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см. Найдите радиус описанной окружности.

3. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противлежащий ей угол C равен 30° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

4. Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противлежащий ей угол C равен 150° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

5. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 80° и 60° . Найдите два других угла четырехугольника.

6. Найдите сторону правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 1?

7. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной 1.

8. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, стороны которого равны 3, 4, 5.

9. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб со стороной 1 и острым углом 60° .

10. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной 1.

8. Теорема Менелая

1. Точка B_1 лежит на продолжении стороны AC треугольника ABC , причём $AC = CB_1$. Точка C_1 – середина стороны AB . В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC ?

2. Точка B_1 лежит на продолжении стороны AC треугольника ABC , причём $AC = CB_1$. Точка C_1 делит сторону AB в отношении 2:1. В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC ?

3. Точка C_1 делит сторону AB треугольника ABC в отношении 1:2. Точка B_1 лежит на продолжении стороны AC и $AC = 2CB_1$. В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC ?

4. Точка C_1 лежит на продолжении стороны AB треугольника ABC , причём $AB = BC_1$. Точка B_1 – середина стороны AC . В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC ?

5. Точка C_1 лежит на продолжении стороны AB треугольника ABC , причём $AB = BC_1$. Точка B_1 делит сторону AC в отношении 2:1. В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC ?

6. Точка B_1 делит сторону AC треугольника ABC в отношении 1:2. Точка C_1 лежит на продолжении стороны AB и $AB = 2BC_1$. В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC ?

7. Точка C_1 – середина стороны AB треугольника ABC . Точка O – середина отрезка CC_1 . В каком отношении делит прямая AO сторону BC ?

8. Точка A_1 – середина стороны BC треугольника ABC . Точка C_1 делит сторону AB в отношении 1:2. В каком отношении делит прямая AA_1 отрезок CC_1 ?

9. Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении 1:2. Точка C_1 – середина стороны AB . В каком отношении делит прямая AA_1 отрезок CC_1 ?

10. Точка A_1 делит сторону BC треугольника ABC в отношении 1:2. Точка C_1 делит сторону AB в отношении 1:2. В каком отношении делит прямая AA_1 отрезок CC_1 ?

9. Подобие

1. Хорды AD и BC окружности пересекаются в точке E , $AE = 3$, $BE = 6$, $CE = 2$. Найдите DE .

2. Хорды AD и BC окружности пересекаются в точке E , $AB = 8$, $BE = 6$, $DE = 4$. Найдите CD .

3. Хорды AD и BC окружности пересекаются в точке E , $CE = 2$, $DE = 5$, $AE = 4$. Найдите BE .

4. Хорды AD и BC окружности пересекаются в точке E , $CE = 4$, $CD = 10$, $AE = 6$. Найдите AB .

5. Радиус окружности равен 2. Через середину C радиуса под углом 45° к нему проведена хорда AB . Найдите произведение отрезков AC и BC .

6. Через внешнюю точку E окружности проведены две прямые, пересекающая окружность соответственно в точках A, C и B, D , $AE = 9$, $BE = 8$, $CE = 24$. Найдите DE .

7. Радиус окружности равен 2. На продолжении радиуса взята точка C , отстоящая от центра O окружности на расстояние 3. Через точку C проведена прямая под углом 30° к OC , пересекающая окружность в точках A и B . Найдите произведение отрезков AC и BC .

8. Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B , и касательная EC (C – точка касания), $AE = 6$, $BE = 24$. Найдите CE .

9. В треугольнике ABC биссектриса AL равна отрезку LC и стороне AB . Найдите угол C .

10. Биссектриса, проведенная из вершины основания равнобедренного треугольника, равна основанию. Найдите угол при основании этого треугольника.

10. Тригонометрия

1. В треугольнике даны две стороны $a = 3$, $b = 3\sqrt{2}$, противолежащий стороне a угол A равен 30° . Найдите угол B , лежащий против стороны b .

2. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $A = 45^\circ$, $C = 120^\circ$. Найдите сторону BC .

3. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 30° . Найдите AB .

4. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 30° , $AB = 1$. Найдите AC .

5. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 45° . Найдите AB .

6. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 45° , $AB = 1$. Найдите AC .

7. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 150° . Найдите AB .

8. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 150° , $AB = 1$. Найдите AC .

9. В треугольнике ABC $AC = BC = 1$, угол C равен 135° . Найдите AB .

10. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 135° , $AB = 1$.
Найдите AC .

11. Площадь

1. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 5, 6, 7.
2. Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

3. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки D и E так, что $AD:DC = 1:2$, $BE:EC = 2:3$. Найдите площадь треугольника CDE , если площадь треугольника ABC равна 30.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки D и E так, что $AD:DB = 1:2$, $BE:EC = 1:2$, F – точка пересечения прямых AE и CD . Найдите площадь треугольника ADF , если площадь треугольника ABC равна 1.

5. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты точки соответственно D , E и F так, что $AD:DB = BE:EC = CF:FA = 1:2$. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми AE , BF , CD , если площадь треугольника ABC равна 1.

6. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1. E – середина стороны AB , F – точка пересечения прямых AC и DE . Найдите площадь треугольника AEF .

7. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) пересекаются в точке O . Площади треугольников ABO и CDO равны соответственно S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции $ABCD$.

8. Площадь выпуклого четырёхугольника равна 1. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон этого четырёхугольника.

9. Докажите, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

10. Из всех четырёхугольников, вписанных в данную окружность, найдите четырёхугольник наибольшей площади.

12. Координаты

1. Найдите расстояние между точками $B_1(3, 4)$ и $B_2(3, -1)$.

2. Найдите уравнение окружности с центром в точке $C(1, -2)$ и радиусом 4.

3. Докажите, что уравнение $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$ задает окружность. Найдите координаты центра и радиус окружности.

4. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(1, 2)$ с вектором нормали $(-1, 1)$.

6. Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями: $x + 2y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$.

7. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$.

8. Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты: $A(0, 1)$, $B(1, 1)$, $C(-1, 1)$.

9. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением в полярных координатах $r = \sin 3\varphi$.

10. Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением в полярных координатах $r = \cos \varphi$.