

# СТЕРЕОМЕТРИЯ

*В.А. Смирнов*

## 1. Распознавание фигур

1. Какой многогранник называется кубом?
2. Сколько у куба вершин, ребер, граней?
3. Изобразите куб на клетчатой бумаге.
4. Какой многогранник называется параллелепипедом?
5. Какой параллелепипед называется прямоугольным?
6. Сколько у параллелепипеда вершин, ребер, граней?
7. Изобразите параллелепипед.
8. Какой многогранник называется призмой?
9. Сколько вершин, ребер, граней у: а) пятиугольной призмы; б) шестиугольной призмы; в)  $n$ -угольной призмы?
10. Какая призма называется прямой?
11. Какая призма называется правильной?
12. Изобразите правильную шестиугольную призму.
13. Какой многоугольник лежит в основании призмы, которая имеет: а) 18 ребер; б) 24 вершины; в) 36 граней?
14. Какой многогранник называется пирамидой?
15. Какая пирамиды называется правильной?
16. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду.
17. Сколько вершин, ребер, граней у: а) пятиугольной пирамиды; б) шестиугольной пирамиды; в)  $n$ -угольной пирамиды?
18. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, которая имеет: а) 18 ребер; б) 24 вершины; в) 36 граней?
19. Сколько осей симметрии имеет правильная: а) треугольная призма; б) шестиугольная призма; в)  $n$ -угольная призма?
20. Сколько осей симметрии имеет правильная: а) четырехугольная пирамида; б) шестиугольная пирамида; в)  $n$ -угольная пирамида?
21. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная: а) четырехугольная пирамида; б) шестиугольная пирамида; в)  $n$ -угольная пирамида?
22. У многогранника восемь вершин. В каждой из них сходится три ребра. Сколько у него ребер? Приведите пример такого многогранника.
23. У многогранника десять вершин. В каждой из них сходится три ребра. Сколько у него ребер? Приведите пример такого многогранника.
24. У многогранника десять вершин. В каждой из них сходится четыре ребра. Сколько у него ребер? Приведите пример такого многогранника.
25. У многогранника двенадцать вершин. В каждой из них сходится три грани. Сколько у него ребер? Приведите пример такого многогранника.

26. Гранями многогранника являются два треугольника и три четырёхугольника. Сколько у него рёбер? Приведите пример такого многогранника.

27. Гранями многогранника являются восемь треугольников и два четырёхугольника. Сколько у него рёбер? Приведите пример такого многогранника.

28. Гранями многогранника являются шесть треугольников и один шестиугольник. Сколько у него рёбер? Приведите пример такого многогранника.

## 2. Правильные многогранники

1. Какой многогранник называется правильным?
2. Какой многогранник называется тетраэдром? Сколько у него вершин, ребер, граней?
3. Изобразите тетраэдр.
4. Какой многогранник называется октаэдром? Сколько у него вершин, ребер, граней?
5. Изобразите октаэдр.
6. Какой многогранник называется икосаэдром? Сколько у него вершин, ребер, граней?
7. Изобразите икосаэдр.
8. Какой многогранник называется додекаэдром? Сколько у него вершин, ребер, граней?
9. Изобразите додекаэдр.
10. Вершинами какого многогранника являются центры граней тетраэдра?
11. Найдите ребро многогранника, вершинами которого являются центры граней единичного тетраэдра.
12. Вершинами какого многогранника являются середины ребер тетраэдра?
13. Найдите ребро многогранника, вершинами которого являются середины ребер единичного тетраэдра.
14. Вершинами какого многогранника являются центры граней куба?
15. Найдите ребро многогранника, вершинами которого являются центры граней единичного куба.
16. Вершинами какого многогранника являются центры граней октаэдра?
17. Найдите ребро многогранника, вершинами которого являются центры граней единичного октаэдра.
18. Вершинами какого многогранника являются центры граней икосаэдра?
19. Найдите ребро многогранника, вершинами которого являются центры граней единичного икосаэдра.

20. Вершинами какого многогранника являются центры граней додекаэдра?

21. Найдите ребро многогранника, вершинами которого являются центры граней единичного додекаэдра.

22. Через ребра правильного тетраэдра проведены плоскости параллельные противоположным ребрам. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

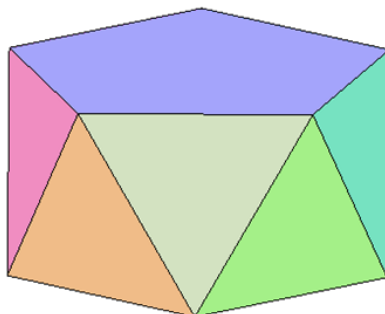
23. Через вершины куба, перпендикулярно его диагоналям, проходящим через эти вершины, проведены плоскости. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

24. Окраска граней многогранника называется правильной, если соседние грани имеют разные цвета. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра?

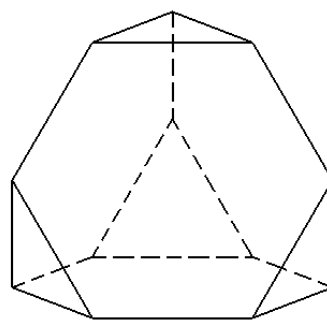
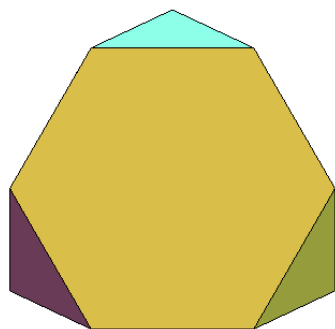
### 3. Полуправильные многогранники

1. Какой многогранник называется полуправильным?

2. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



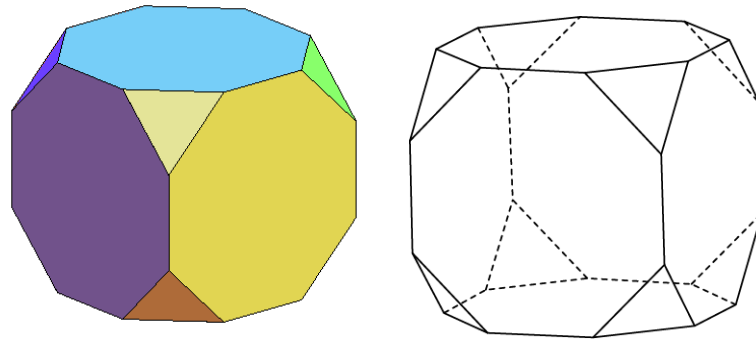
3. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



4. Какую часть ребер нужно отсекать плоскостями от вершин тетраэдра, чтобы полученный многогранник был полуправильным (усеченным тетраэдром)?

5. Ребро тетраэдра равно 1. Найдите ребро полученного из него усеченного тетраэдра.

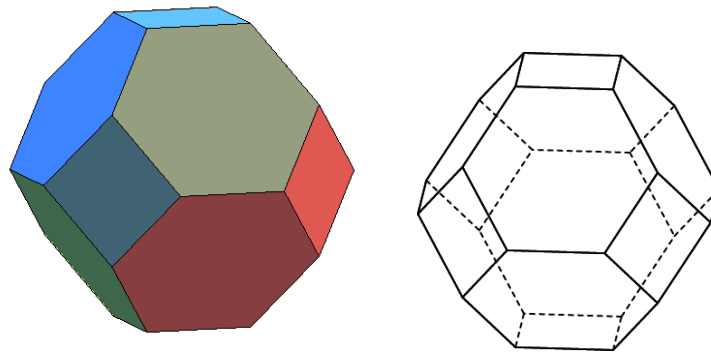
6. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



7. Какую часть ребер нужно отсекать плоскостями от вершин куба, чтобы полученный многогранник был полуправильным (усеченным кубом)?

8. Ребро куба равно 1. Найдите ребро полученного из него усеченного куба.

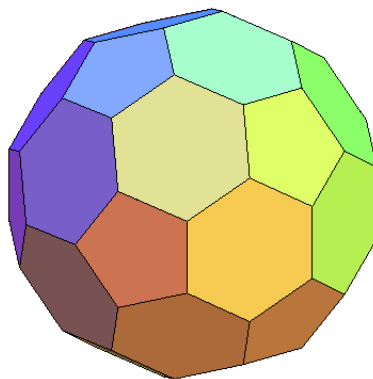
9. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



10. Какую часть ребер нужно отсекать плоскостями от вершин октаэдра, чтобы полученный многогранник был полуправильным (усеченным октаэдром)?

11. Ребро октаэдра равно 1. Найдите ребро полученного из него усеченного октаэдра.

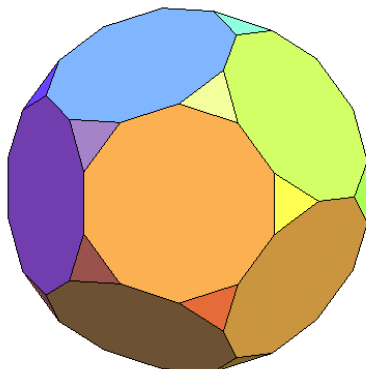
12. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



13. Какую часть ребер нужно отсекать плоскостями от вершин икосаэдра, чтобы полученный многогранник был полуправильным (усеченным икосаэдром)?

14. Ребро икосаэдра равно 1. Найдите ребро полученного из него усеченного икосаэдра.

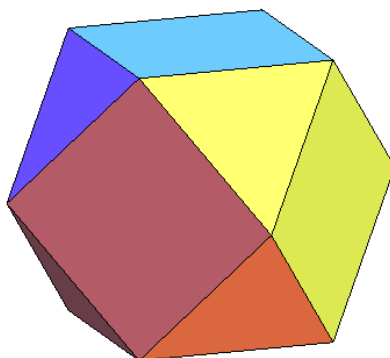
15. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



16. Какую часть ребер нужно отсекать плоскостями от вершин додекаэдра, чтобы полученный многогранник был полуправильным (усеченным додекаэдром)?

17. Ребро додекаэдра равно 1. Найдите ребро полученного из него усеченного додекаэдра.

18. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



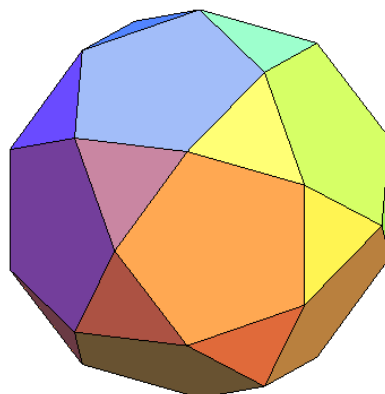
19. Как из куба можно получить кубооктаэдр?

20. Ребро куба равно 1. Найдите ребро полученного из него кубооктаэдра.

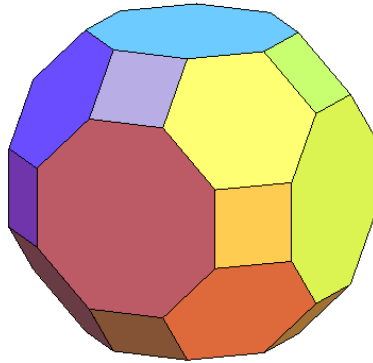
21. Как из октаэдра можно получить кубооктаэдр?

22. Ребро октаэдра равно 1. Найдите ребро полученного из него кубооктаэдра.

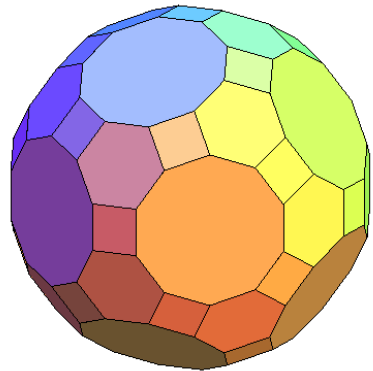
23. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



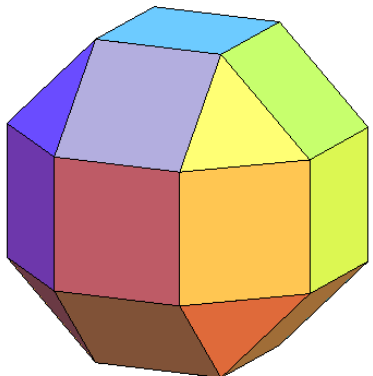
24. Как из икосаэдра можно получить икосододекаэдр?
25. Ребро икосаэдра равно 1. Найдите ребро полученного из него икосододекаэдра.
26. Как из додекаэдра можно получить икосододекаэдр?
27. Ребро додекаэдра равно 1. Найдите ребро полученного из него икосододекаэдра.
28. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



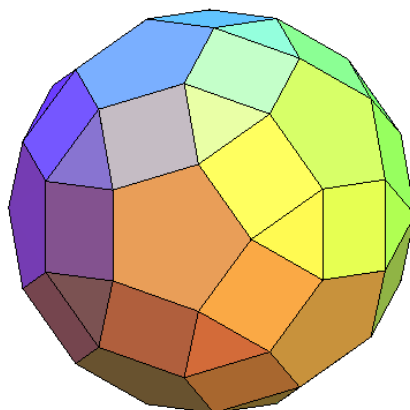
29. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



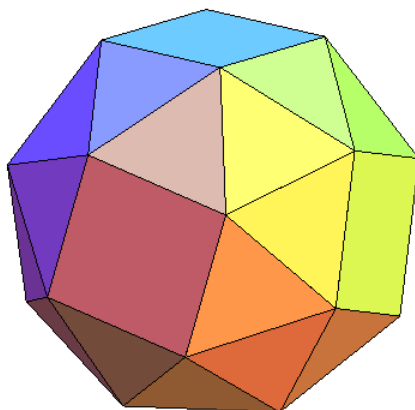
30. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



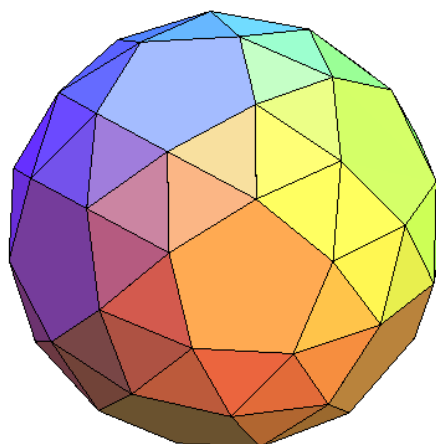
31. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



32. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



33. Как называется многогранник, изображенный на рисунке? Сколько у него вершин, ребер и граней?



#### 4. Изображение пространственных фигур

1. В каком случае параллельной проекцией прямой является: а) точка; б) прямая?

2. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых являются: а) две точки; б) одна прямая; в) две параллельные прямые?

3. Какие фигуры могут быть параллельными проекциями двух скрещивающихся прямых?

4. В каком случае параллельное проектирование сохраняет отношение отрезков?

5. Может ли параллельная проекция отрезка быть больше (меньше) самого отрезка?

6. Может ли параллельная проекция угла быть больше (меньше) самого угла?

7. Может ли параллельная проекция фигуры равняться самой фигуре?

8. Какой треугольник может быть параллельной проекцией: а) правильного треугольника; б) прямоугольного треугольника?

9. Верно ли, что при параллельном проектировании треугольника: а) медианы проектируются в медианы; б) высоты проектируются в высоты; в) биссектрисы проектируются в биссектрисы?

10. Какой четырехугольник может быть параллельной проекцией: а) параллелограмма; б) ромба; в) квадрата?

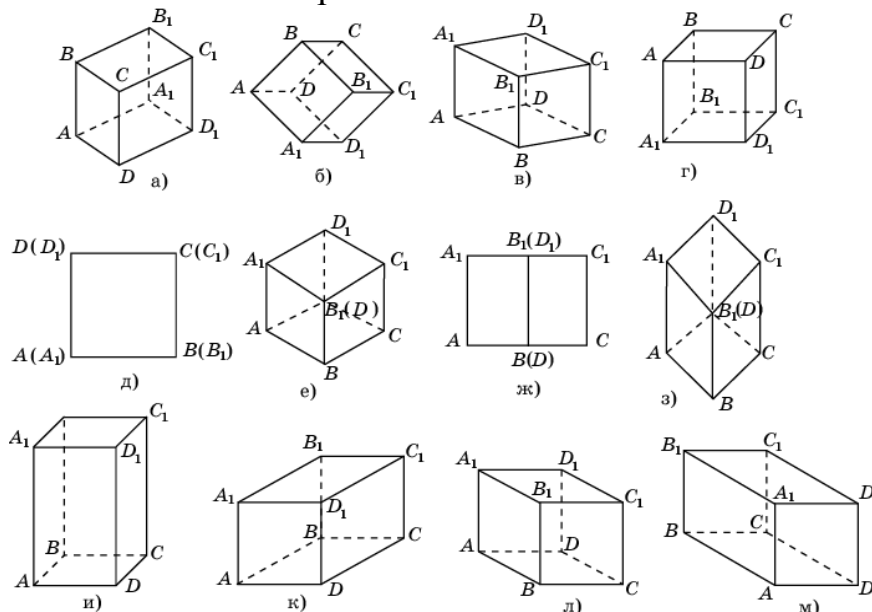
11. Какой шестиугольник может быть параллельной проекцией правильного шестиугольника?

12. Для данных параллельных проекций  $A', B', C'$  вершин  $A, B, C$  правильного шестиугольника изобразите всю параллельную проекцию этого шестиугольника.

13. Для данных параллельных проекций  $A', C', E'$  вершин  $A, C, E$  правильного шестиугольника изобразите всю параллельную проекцию этого шестиугольника.

14. Какой фигурой может быть параллельная проекция окружности?

15. Среди приведенных рисунков укажите изображения куба: 1) грань которого параллельна плоскости изображений; 2) грани которого не параллельны плоскости изображений.





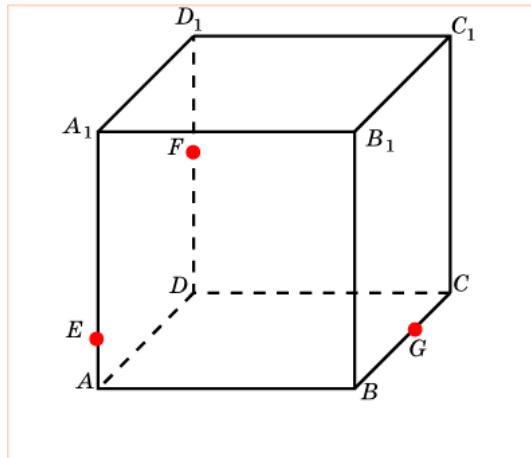
16. Используя параллельное проектирование, изобразите куб.
17. Используя параллельное проектирование, изобразите: а) правильную треугольную пирамиду; б) правильную четырехугольную пирамиду; в) правильную шестиугольную пирамиду.
18. Используя параллельное проектирование, изобразите: а) правильную треугольную призму; б) правильную четырехугольную призму; в) правильную шестиугольную призму.
19. Что называется ортогональным проектированием?
20. Используя ортогональное проектирование, изобразите прямоугольный параллелепипед.
21. Используя ортогональное проектирование, изобразите сферу.
22. Используя ортогональное проектирование, изобразите цилиндр.
23. Используя ортогональное проектирование, изобразите конус.
24. Используя ортогональное проектирование, изобразите сферу, вписанную в цилиндр.
25. Используя ортогональное проектирование, изобразите сферу, вписанную в конус.
26. Используя ортогональное проектирование, изобразите сферу, вписанную в куб.
27. \* Используя ортогональное проектирование, изобразите сферу, вписанную в правильный тетраэдр.
28. \* Используя ортогональное проектирование, изобразите сферу, вписанную в правильную треугольную призму.

### **5. Сечения многогранников**

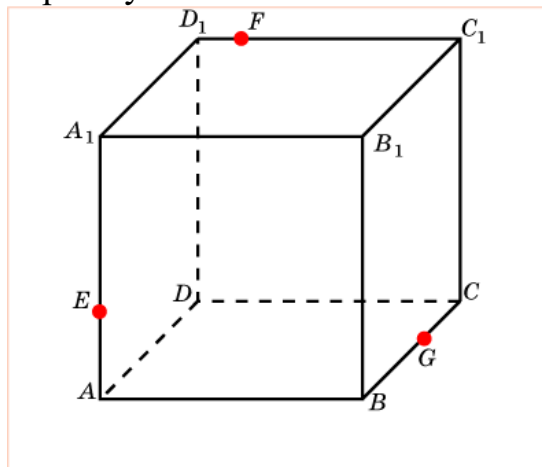
1. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) правильный треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) разносторонний треугольник; г) прямоугольный треугольник; д) тупоугольный треугольник?
2. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) квадрат; б) прямоугольник, отличный от квадрата; в) ромб, отличный от квадрата; г) параллелограмм, отличный от ромба; д) равнобедренная трапеция; е) прямоугольная трапеция?
3. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) пятиугольник; б) правильный пятиугольник; в) шестиугольник; г) правильный шестиугольник; д) семиугольник?
4. Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться: а) правильный треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) разносторонний треугольник; г) прямоугольный треугольник; д) тупоугольный треугольник?
5. Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться: а) квадрат; б) прямоугольник, отличный от квадрата; в)

ромб, отличный от квадрата; г) параллелограмм, отличный от ромба; д) равнобедренная трапеция; е) прямоугольная трапеция?

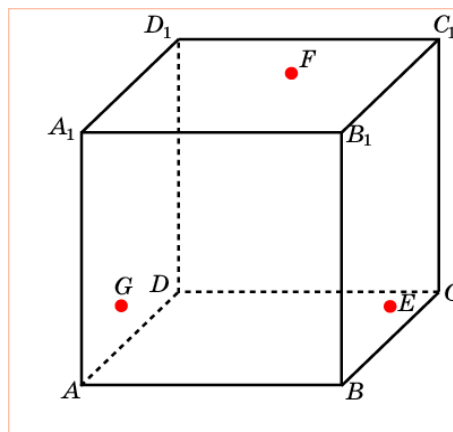
6. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , лежащие на ребрах куба.



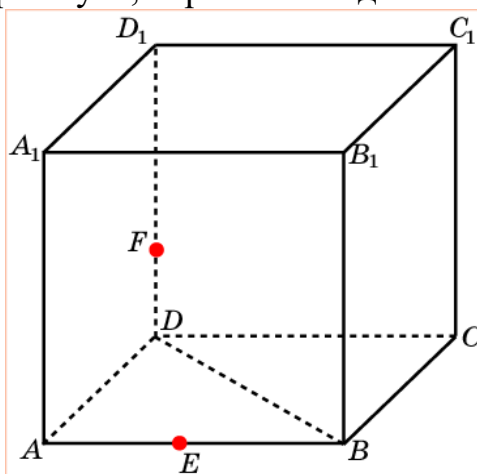
7. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , лежащие на ребрах куба.



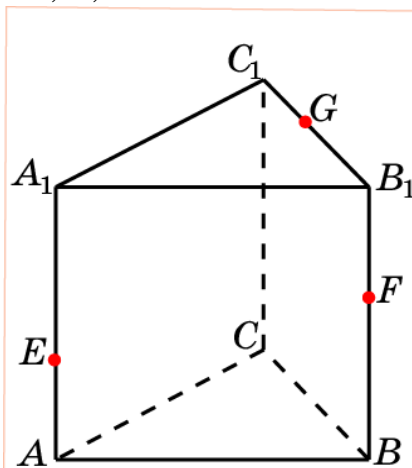
8. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , принадлежащие граням  $BB_1C_1C$ ,  $CC_1D_1D$ ,  $AA_1B_1B$ , соответственно.



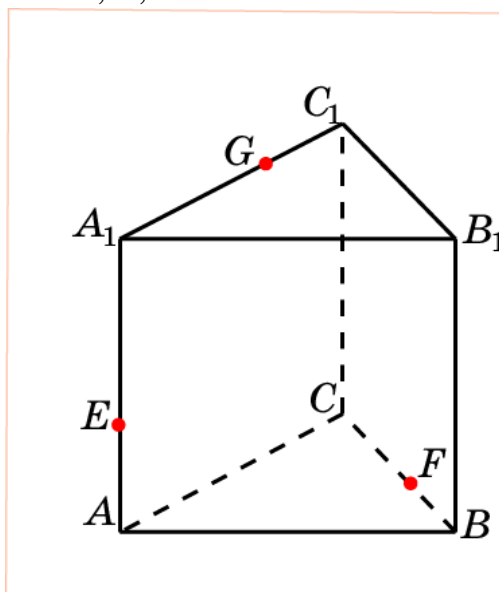
9. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $E, F$ , лежащие на ребрах куба, параллельно диагонали  $BD$ .



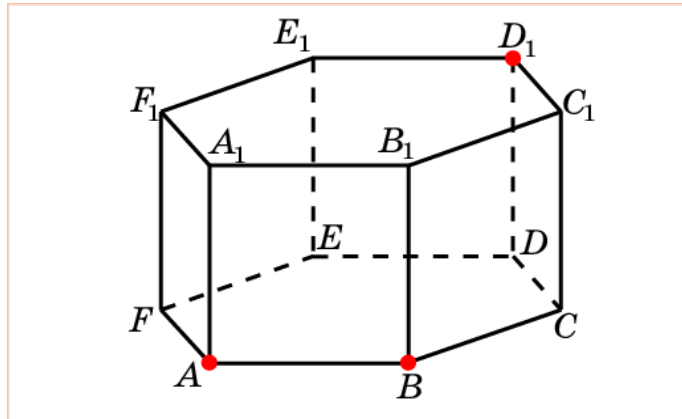
10. Постройте сечение призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью, проходящей через точки  $E, F, G$ .



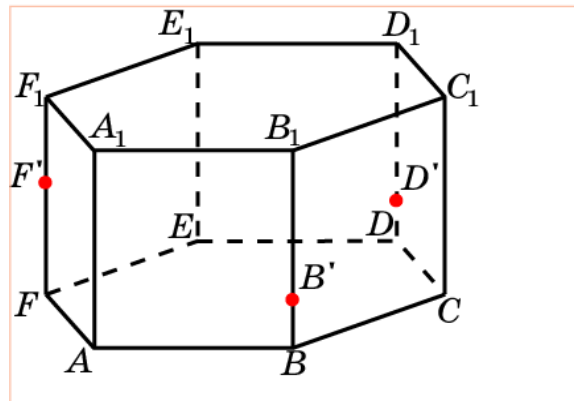
11. Постройте сечение призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью, проходящей через точки  $E, F, G$ .



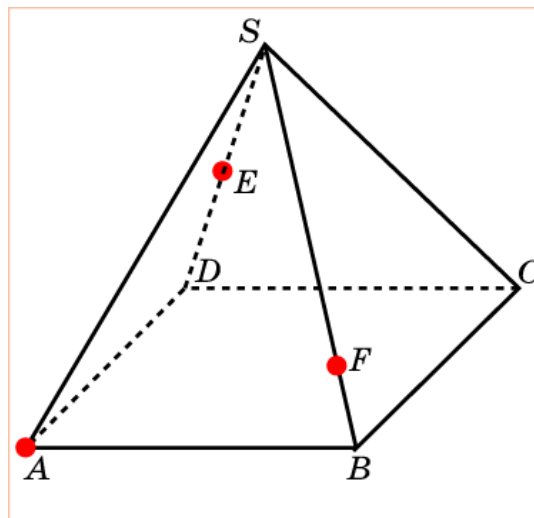
12. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки  $A, B, D_1$ .



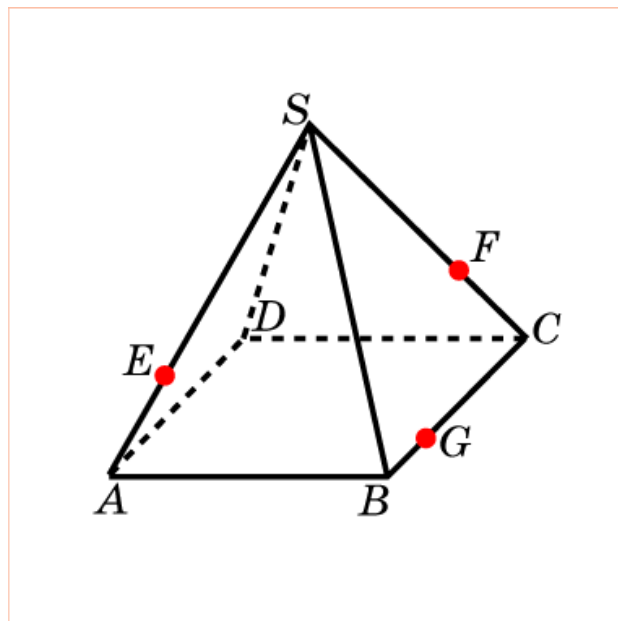
13. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки  $F', B', D'$ .



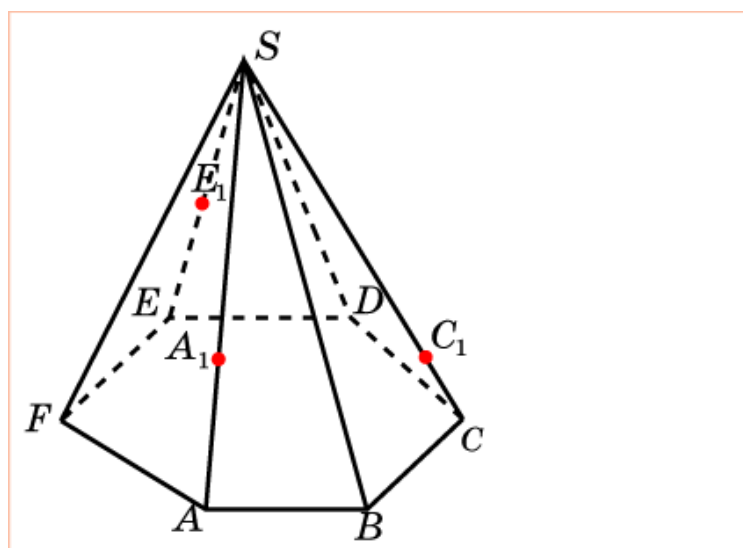
14. Постройте сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью, проходящей через точки  $A, E, F$ .



15. Постройте сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью, проходящей через точки  $E, F, G$ .



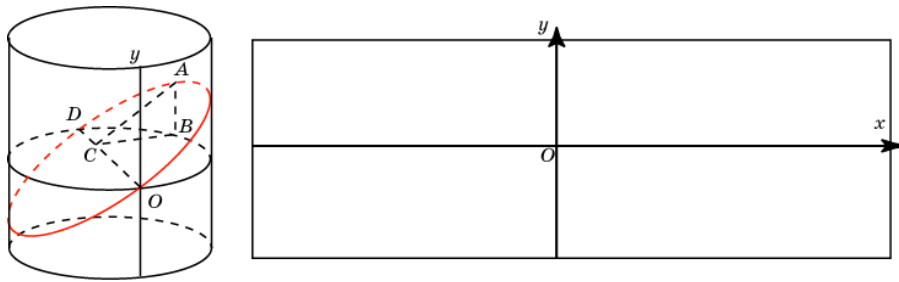
16. Постройте сечение пирамиды  $SABCDEF$  плоскостью, проходящей через точки  $A_1, C_1, E_1$ .



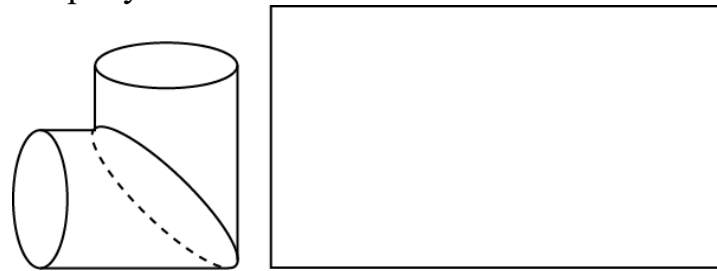
### 6. Сечения цилиндра и конуса

1. Какую фигурой является сечение боковой поверхности цилиндра, не параллельное основанию?

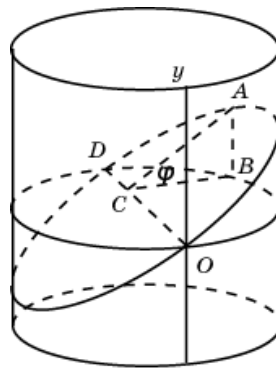
2. Возьмем прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат  $Ox$  и  $Oy$ . Затем свернем этот лист в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось  $Ox$  свернется в окружность радиуса 1, а ось  $Oy$  станет образующей цилиндра. Через диаметр  $OD$  полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол в  $45^\circ$ . Развернем цилиндр обратно в прямоугольник. В какую кривую развернется эллипс.



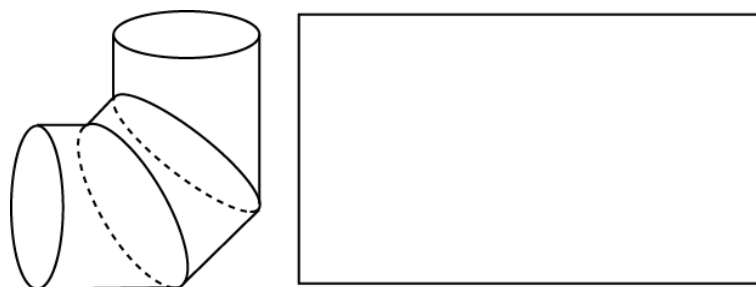
3. Как из прямоугольного листа получить кусок трубы, изображенной на рисунке?



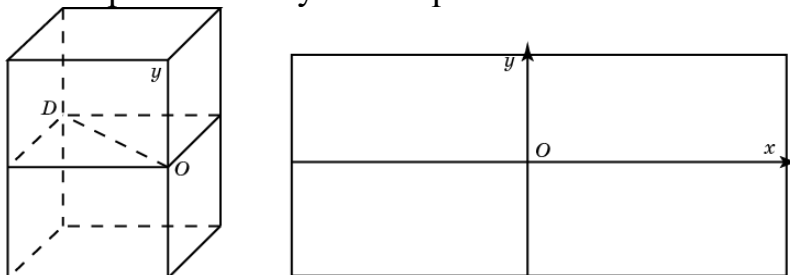
4. Возьмем прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат  $Ox$  и  $Oy$ . Затем свернем этот лист в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось  $Ox$  свернется в окружность радиуса 1, а ось  $Oy$  станет образующей цилиндра. Через диаметр  $OD$  полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол  $\varphi$ . Развернем цилиндр обратно в прямоугольник. Выясните, в какую кривую развернется эллипс.



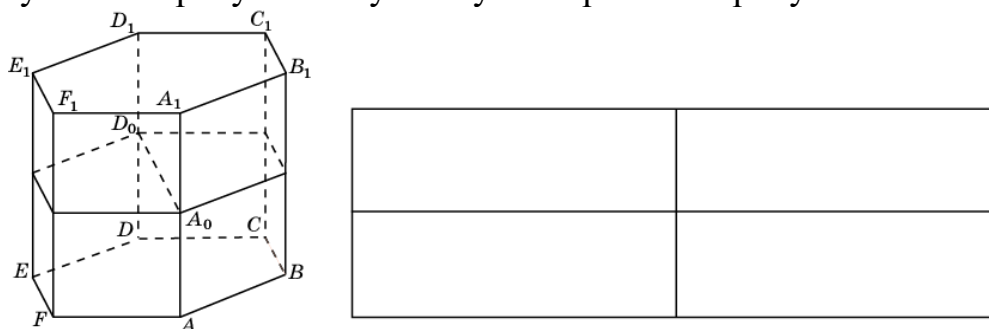
5. Как из прямоугольного листа получить кусок трубы, изображенной на рисунке?



6. Возьмем прямоугольный лист бумаги с нарисованными на нем осями координат. Свернем этот лист в боковую поверхность правильной четырехугольной призмы. Сторону основания призмы примем за 1. Через точки  $O$  и  $D$  проведем сечение плоскостью, составляющей с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Развернем лист бумаги. Выясните, какая при этом получится кривая?



7. Возьмем прямоугольный лист бумаги и свернем его в боковую поверхность правильной шестиугольной призмы. Сторону основания призмы примем за 1. Через точки  $A_0$  и  $D_0$  проведем сечение плоскостью, составляющей с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Развернем лист бумаги. Нарисуйте получившуюся при этом кривую?



8. В каком случае сечением конической поверхности плоскостью является: а) эллипс; б) парабола; в) гипербола?

9. Что представляет собой сечение конической поверхности, параллельное: а) оси; б) образующей?

10. Через центр основания конуса и середину образующей проведена плоскость. Что представляет собой сечение боковой поверхности конуса этой плоскостью?

11. Высота конуса равна радиусу основания. Что представляет собой сечение боковой поверхности конуса плоскостью, образующей с осью угол: а)  $30^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $60^\circ$ ?

12. Образующая конуса в два раза больше радиуса основания. Под каким углом к оси нужно провести сечение конуса плоскостью, чтобы в сечении конической поверхности получить: а) эллипс; б) параболу; в) гиперболу?

### 7. Расстояние от точки до прямой

1. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1D_1$ .
2. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $A_1C$ .
3. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1C_1$ .
4. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC_1$ .
5. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $D_1E_1$ .
6. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1C_1$ .
7. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BE_1$ .
8. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BF_1$ .
9. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC_1$ .
10. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $CE_1$ .
11. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $CF_1$ .
12. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $CB_1$ .

### 8. Расстояние от точки до плоскости

1. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BDA_1$ .
2. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BC_1D$ .
3. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BCA_1$ .
4. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $A_1B_1C$ .
5. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BCC_1$ .
6. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $A_1B_1D$ .
7. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $A_1B_1C$ .



### 9. Расстояние между двумя прямыми

1. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BD_1$ .
2. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .
3. В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BD_1$ .
4. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC_1$ .
5. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $A_1C$ .
6. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .
7. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $B_1C_1$ .
8. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC_1$ .
9. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $CD_1$ .
10. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $DE_1$ .
11. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $CE_1$ .
12. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BE_1$ .
13. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $CF_1$ .
14. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $CF_1$ .
15. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .
16. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BD_1$ .
17. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BE_1$ .

### 10. Угол между двумя прямыми

1. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $BA_1$  и  $CB_1$ .
2. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $AC$  и  $BD_1$ .
3. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $BA_1$  и  $AC_1$ .
4. В правильном тетраэдре  $ABCD$  найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ .
5. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точки  $E, F, G$  – середины ребер соответственно  $BC, BD, AD$ . Найдите угол  $EFG$ .

6. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, точка  $D$  – середина ребра  $BC$ . Найдите угол между прямыми  $CB_1$  и  $AD$ .

7. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $SB$  и  $AC$ .

8. В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, точка  $E$  – середина ребра  $SC$ . Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $BE$ .

9. В правильной шестиугольной призме  $A\dots F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $BA_1$  и  $B_1E$ .

10. В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$ , стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми  $SA$  и  $BF$ .

11. В правильной шестиугольной призме  $A\dots F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $BA_1$  и  $CB_1$ .

12. В правильной шестиугольной призме  $A\dots F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $BA_1$  и  $CD_1$ .

### 11. Угол между прямой и плоскостью

1. В кубе  $A\dots D_1$  найдите тангенс угла между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $BC_1D$ .

2. В кубе  $A\dots D_1$  найдите синус угла между прямой  $AC_1$  и плоскостью  $BCC_1$ .

3. В кубе  $A\dots D_1$  найдите угол между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $ABC_1$ .

4. В кубе  $A\dots D_1$  найдите угол между прямой  $AC_1$  и плоскостью  $BA_1D$ .

5. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $E$  – середина ребра  $CD$ . Найдите угол между прямой  $AD$  и плоскостью  $ABE$ .

6. В правильном тетраэдре  $ABCD$  найдите косинус угла между прямой  $AD$  и плоскостью  $ABC$ .

7. В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой  $SA$  и плоскостью  $ABC$ .

8. В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой  $SA$  и плоскостью  $SBD$ .

9. В правильной 6-ой пирамиде  $SA\dots F$ , боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите угол между прямой  $SA$  и плоскостью  $ABC$ .

10. В правильной 6-ой пирамиде  $SA\dots F$ , боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой  $AC$  и плоскостью  $SAF$ .

11. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $AB_1C_1$ .

12. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $BB_1C_1$ .

13. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите угол между прямой  $AC_1$  и плоскостью  $ABC$ .

14. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между прямой  $AD_1$  и плоскостью  $ABC$ .

15. В правильной 6-й призме  $A...F_1$ , ребра которой равны 1, найдите угол между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $BCE_1$ .

### 12. Угол между двумя плоскостями

1. В кубе  $A...D_1$  найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $BC_1D$ .

2. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между плоскостями  $BC_1D_1$  и  $BA_1D$ .

3. В кубе  $A...D_1$  найдите угол между плоскостями  $ABC_1$  и  $BB_1D_1$ .

5. В правильном тетраэдре  $ABCD$  найдите косинус угла между плоскостями  $ABC$  и  $BCD$ .

6. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $E$  – середина ребра  $AD$ . Найдите угол между плоскостями  $ACD$  и  $BCE$ .

7. В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями  $SBC$  и  $ABC$ .

8. В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями  $SAB$  и  $SBC$ .

9. В правильной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями  $SAD$  и  $SBC$ .

10. В правильной 6-ой пирамиде  $SABCDEF$ , боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между плоскостями  $ABC$  и  $SBC$ .

11. В правильной 6-ой пирамиде  $SABCDEF$ , боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями  $SAB$  и  $SDE$ .

12. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $A_1B_1C$ .

13. В правильной 6-й призме  $A...F_1$  найдите угол между плоскостями  $ABB_1$  и  $CDD_1$ .

14. В правильной 6-й призме  $A...F_1$  найдите угол между плоскостями  $ACC_1$  и  $DEE_1$ .

15. Найдите двугранные углы октаэдра.

### 13. Поворот. Фигуры вращения

1. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный тетраэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?

2. На какой наименьший угол нужно повернуть правильный тетраэдр вокруг прямой, содержащей его высоту, чтобы он совместился сам с собой?

3. На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?

4. На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?

5. На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?

6. На какой наименьший угол нужно повернуть октаэдр вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?

7. На какой наименьший угол нужно повернуть октаэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?

8. На какой наименьший угол нужно повернуть октаэдр вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?

9. На какой наименьший угол нужно повернуть икосаэдр вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?

10. На какой наименьший угол нужно повернуть икосаэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?

11. На какой наименьший угол нужно повернуть икосаэдр вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?

12. На какой наименьший угол нужно повернуть додекаэдр вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?

13. На какой наименьший угол нужно повернуть додекаэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?

14. На какой наименьший угол нужно повернуть додекаэдр вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?

15. Тетраэдр повернут вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, на угол  $90^\circ$ . Какая фигура является пересечением исходного тетраэдра и повернутого?

16. Куб повернут вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней, на угол  $45^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?

17. Куб повернут вокруг диагонали на угол  $60^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?

18. Октаэдр повернут вокруг прямой, соединяющей противоположные вершины, на угол  $45^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного октаэдра и повернутого?

19. Какая фигура получается вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет?

20. Какая фигура получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг прямой, содержащей высоту, опущенную на основание этого треугольника?

21. Какая фигура получается вращением тупоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его большую сторону?

22. Какая фигура получается вращением тупоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его меньшую сторону?

23. Какая фигура получается вращением равнобедренной трапеции вокруг прямой, содержащей ее большее основание?

24. Какая фигура получается вращением равнобедренной трапеции вокруг прямой, содержащей ее меньшее основание?

25. Какая фигура получается при вращении полукруга вокруг прямой, содержащей диаметр?

26. Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней.

27. Какая фигура получается при вращении прямоугольного параллелепипеда вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней.

28. Какая фигура получится при вращении правильной  $n$ -угольной призмы вокруг прямой, проходящей через центры ее оснований?

29. Какая фигура получается при вращении правильной  $n$ -угольной пирамиды вокруг прямой, содержащей ее высоту?

30. Какая фигура получается при вращении октаэдра вокруг прямой, проходящей через две противоположные вершины?

#### 14. Объемы многогранников

1. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, A_1, D_1$  единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

2. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, B_1, D_1$  единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

3. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, A_1, C_1, D_1$  единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

4. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, A_1, C_1$  правильной треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$ , площадь основания и боковое ребро которой равны 1.

5. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  правильной шестиугольной призмы

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , площадь основания и боковое ребро которой равны 1.

6\*. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, B_1, C_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , площадь основания и боковое ребро которой равны 1.

7\*. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины  $A, B, C_1, D_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , площадь основания и боковое ребро которой равны 1.

8. Найдите объем общей части двух призм  $ADA_1 BCB_1$  и  $ABA_1 DCD_1$ , содержащихся в единичном кубе  $ABCDA_1 B_1 C_1 D_1$ .

9. Найдите объем общей части двух призм  $ADA_1 BCB_1$  и  $BA_1 B_1 CD_1 C_1$ , содержащихся в единичном кубе  $ABCDA_1 B_1 C_1 D_1$ .

10. Найдите объем общей части двух пирамид  $A_1 ABCD$  и  $C_1 ABCD$ , содержащихся в единичном кубе  $ABCDA_1 B_1 C_1 D_1$ .

11. Найдите объем общей части двух пирамид  $A_1 ABCD$  и  $DBCC_1 B_1$ , содержащихся в единичном кубе  $ABCDA_1 B_1 C_1 D_1$ .

12. Найдите объем общей части двух пирамид  $A_1 ABCD$  и  $ABCC_1 B_1$ , содержащихся в единичном кубе  $ABCDA_1 B_1 C_1 D_1$ .

13. Найдите объем общей части двух пирамид  $A_1 ABCD$  и  $CADD_1 A_1$ , содержащихся в единичном кубе  $ABCDA_1 B_1 C_1 D_1$ .

14. Найдите объем общей части двух пирамид  $A_1 ABD$  и  $B_1 ABC$ , содержащихся в единичном кубе  $ABCDA_1 B_1 C_1 D_1$ .

15. Найдите объем общей части двух пирамид  $A_1 ABC$  и  $D_1 ABD$ , содержащихся в единичном кубе  $ABCDA_1 B_1 C_1 D_1$ .

16. Объем правильной треугольной пирамиды  $SABC$  равен 1,  $D$  – середина ребра  $SB$ ,  $E$  – середина ребра  $SC$ . Найдите объем общей части двух пирамид  $DABC$  и  $EABC$ .

17. Объем правильной треугольной пирамиды  $SABC$  равен 1,  $D$  – середина ребра  $SB$ ,  $E$  – середина ребра  $SC$ . Найдите объем общей части двух пирамид  $SABE$  и  $SACD$ .

18. Объем правильной треугольной пирамиды  $SABC$  равен 1,  $D$  – середина ребра  $AB$ ,  $E$  – середина ребра  $SC$ . Найдите объем общей части двух пирамид  $EABC$  и  $SBCD$ .

19. Объем правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  равен 1,  $E$  – середина ребра  $SB$ . Найдите объем общей части двух пирамид  $EABCD$  и  $SABD$ .

20. Объем правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  равен 1,  $E$  – середина ребра  $SC$ . Найдите объем общей части двух пирамид  $EBCD$  и  $SABC$ .

21. Найдите объем общей части двух пирамид  $A_1 ABC$  и  $B_1 ABC$ , содержащихся в правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$ , объем которой равен 1.

22. Найдите объем общей части двух пирамид  $B_1ABC$  и  $A_1ABF$ , содержащихся в правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , объем которой равен 1.

23. Правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , объем которой равен 1, повернута вокруг прямой, проходящей через центры ее оснований, на угол  $60^\circ$ . Найдите объем общей части исходной призмы и повернутой.

24\*. Правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , объем которой равен 1, повернута вокруг прямой, проходящей через середину бокового ребра  $AA_1$  и центр противоположной ему грани  $BCC_1B_1$ , на угол  $90^\circ$ . Найдите объем общей части исходной призмы и повернутой.

25. Правильная треугольная пирамида  $SABC$ , объем которой равен 1, повернута вокруг прямой, содержащей высоту  $SH$ , на угол  $60^\circ$ . Найдите объем общей части исходной пирамиды и повернутой.

26\*. Правильный тетраэдр  $ABCD$ , объем которого равен 1, повернут вокруг прямой, проходящей через середины ребер  $AB$  и  $CD$ , на угол  $90^\circ$ . Найдите объем общей части исходного тетраэдра и повернутого.

27. Найдите объем общей части правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$ , объем которой равен 1, и центрально симметричной ей пирамиды относительно середины высоты.

28. Найдите объем общей части правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$ , объем которой равен 1, и центрально симметричной ей пирамиды относительно середины высоты.

29\*. Единичный куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  повернут вокруг прямой, содержащей диагональ  $DB_1$ , на угол  $60^\circ$ . Найдите объем общей части исходного куба и повернутой.

30\*. Единичный куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  повернут вокруг прямой, проходящей через середины ребер  $AD$  и  $B_1C_1$ , на угол  $90^\circ$ . Найдите объем общей части исходного куба и повернутой.