П.В. ЧУЛКОВ

Уравнения и неравенства в школьном курсе математики

Лекции 1–4

Москва
Педагогический университет
«Первое сентября»
2006

Павел Викторович Чулков

Материалы курса «Уравнения и неравенства в школьном курсе математики» : Лекции 1–4. – М. : Педагогический университет «Первое сентября», 2006. — 88 с.

Учебно-методическое пособие

Редактор *И.М. Бокова*
Корректор *Л.А. Громова*
Компьютерная верстка *Д.В. Кардановская*

Подписано в печать 20.06.2006.
Формат 60×90 1/16. Гарнитура «SchoolBook». Печать офсетная. Печ. л. 5,75
Тираж экз. Заказ №
Педагогический университет «Первое сентября»,
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
http://edu.1september.ru

Учебный план курса

№ бр.	Название лекции
1	**Лекция 1.** *Общие сведения об уравнениях, неравенствах и их системах.* Равносильные уравнения и неравенства. ОДЗ. Общие методы решения уравнений. Алгебраические уравнения. Примеры
1	**Лекция 2.** *Методы решения неравенств.* Числовые неравенства и их свойства. Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов и свойства непрерывности
1	**Лекция 3.** *Методы решения систем уравнений.* Алгебраические уравнения и их системы. Метод подстановки при решении систем уравнений. Симметрические и однородные системы. ***Контрольная работа № 1***
1	**Лекция 4.** *Иррациональные уравнения и неравенства.* Методы решения иррациональных уравнений и неравенств и их систем. Уравнения и неравенства с модулем
2	**Лекция 5.** *Тригонометрические уравнения и неравенства.* Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств и их систем
2	**Лекция 6.** *Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.* Методы решения логарифмических и показательных уравнений и неравенств и их систем. ***Контрольная работа № 2***
2	**Лекция 7.** *Нестандартные методы решения уравнений и неравенств.* Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств. Тригонометрические подстановки. Векторы в алгебре
2	**Лекция 8.** *Уравнения и неравенства с параметром.* Примеры решения уравнений и неравенств с параметром. Геометрические интерпретации. ***Итоговая работа***

Лекция 1
Общие сведения об уравнениях, неравенствах и их системах

Краткое введение

Предлагаемый материал имеет, прежде всего, практическую направленность.

В связи с этим в тексте лекций содержится большое количество задач, некоторые из них — с решениями. Прежде чем изучать эти решения, желательно решить задачу самостоятельно, сравнить полученный ответ, а затем и само решение с решением, приведенным в конце лекции.

Последовательность изложения материала несколько отлична от школьной, поскольку лекции рассчитаны на учителей уже неоднократно «проходивших» школьный курс математики. Указанное обстоятельство позволяет считать некоторые теоретические сведения хорошо известными.

Например, рассматривая в первой лекции *уравнения*, мы будем почти без всяких оговорок преобразовывать их в так называемые смешанные системы, несмотря на то, что собственно *системы уравнений и неравенств* будут рассмотрены позднее.

Основные определения

Определим уравнение с одной переменной как равенство вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ — некоторые функции.

При этом:

(1.1.)[1] Решением (лучше — корнем) уравнения называют то значение переменной, при котором данное уравнение обращается в верное равенство.

(1.2.) Решить уравнение — значит найти все корни уравнения или доказать, что уравнение не имеет корней.

(1.3.) Областью допустимых значений уравнения (принятое сокращение — ОДЗ) называют числовое множество, на котором определены обе функции $f(x)$ и $g(x)$.

Понятие неравенства и сопутствующие ему понятия (решение неравенства, равносильные неравенства и т.д.) определяются аналогично.

Эти понятия мы подробнее рассмотрим во второй лекции, однако пользоваться некоторыми из них будем уже в первой.

Пример 1. Найдите ОДЗ уравнения $\sqrt{x-2} = \dfrac{1}{x-3}$

Решение. Функция $f(x) = \sqrt{x-2}$ определена при $x \geq 2$, функция $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$ — при $x \neq 3$.

Ответ: $[2;3) \cup (3;+\infty)$.

[1] Так мы будем нумеровать определения. (1.1.) означает — первое определение из первой лекции.

Также принято считать, что:

(1.4.) Два уравнения равносильны на множестве, если они имеют одни и те же корни, принадлежащие данному множеству. Следовательно, если уравнения не имеют корней на данном множестве, то они равносильны на нем.

Переход к равносильному уравнению принято обозначать знаком «$\Leftrightarrow$».

(1.5.) Данное уравнение является следствием некоторого другого уравнения, если каждый корень другого уравнения является корнем данного. Если уравнение не имеет корней, то из него следует любое другое уравнение.

Переход к уравнению-следствию принято обозначать знаком«$\Rightarrow$».

Пример 2. Верно ли, что уравнение $x^2 = 8$ равносильно уравнению $5x = 10\sqrt{2}$ на множестве а) действительных; б) рациональных чисел?

Решение. а) На множестве действительных чисел первое уравнение имеет корни $\pm 2\sqrt{2}$, а второе уравнение имеет единственный корень $2\sqrt{2}$. Уравнения не равносильны.

б) Из предыдущего следует, что на множестве рациональных чисел оба уравнения корней не имеют. Уравнения равносильны.

Ответ: а) нет; б) да.

Пример 3. Верно ли, что уравнение $5x = x^2$ является следствием уравнения $2x = 10$ на множестве действительных чисел?

Решение. Уравнение $2x = 10$ имеет единственный корень 5, который также является корнем уравнения $5x = x^2$. Следовательно, $2x = 10 \Rightarrow 5x = x^2$.

Ответ: да.

Как мы решаем уравнения? Примерно так: проводим некоторые преобразования исходного уравнения и постепенно приходим к некоторому уравнению, корни которого умеем находить. Корни последнего уравнения и записываем в ответ.

Но можно ли было так поступать? Другими словами, можем ли мы быть уверены в том, что корни последнего уравнения являются корнями исходного уравнения? То есть совпадают ли множества корней преобразованного и исходного уравнений? Как мы увидим в дальнейшем, это не всегда так, даже если проведенные преобразования не содержат вычислительных ошибок. Например, при приведении подобных слагаемых, при делении обеих частей уравнения на некоторое выражение, содержащее переменную, корни могут быть «потеряны», а при возведении обеих частей уравнения в квадрат, наоборот, могут появиться так называемые «посторонние корни». То есть решение уравнений предполагает не только после некоторых (возможно, непростых) преобразований получить стандартное уравнение и «найти x», но также *доказать*, что решено именно исходное уравнение или неравенство, а не то стандартное уравнение, которое мы получили в результате преобразований.

Поэтому, чтобы доказать, что найдены *все* корни исходного уравнения, необходимо либо следить, чтобы при каждом из проводимых преобразований в результате получались уравнения (или смешанные системы) равносильные исходному уравнению, либо, получив цепочку следствий из исходного уравнения, затем сделать проверку, подставляя полученные корни в исходное уравнение.

Перечислим основные свойства равносильности уравнений.

Теорема 1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же выражение, определенное на ОДЗ исходного уравнения, то получим уравнение равносильное данному уравнению.

Или в виде схемы:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+p(x)=g(x)+p(x), \\ x\in \text{ОДЗ}. \end{cases}$$

В частности, если перенести слагаемое из одной части в другую, то получим уравнение, равносильное исходному уравнению.

Требование $x\in$ ОДЗ в формулировке теоремы существенно. Если функция $p(x)$ определена не для всех x из ОДЗ, то равносильность, вобще говоря, нарушается, и преобразование может привести к потере корней.

Например, уравнения $x=1$ и $x+\dfrac{1}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$ не равносильны, поскольку второе уравнение корней не имеет, так как функция $p(x)=\dfrac{1}{x-1}$ не определена при $x=1$.

Теорема 2. Если обе части данного уравнения умножить на одно и то же не равное нулю выражение, определенное на ОДЗ исходного уравнения, то получим уравнение равносильное данному.

Или в виде схемы:

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ p(x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot p(x)=g(x)\cdot p(x), \\ x\in \text{ОДЗ}. \end{cases}$$

В частности, если поменять знаки в обеих частях уравнения (то есть умножить обе части уравнения на $p(x)=-1$), то получится уравнение, равносильное исходному уравнению.

Требования $x\in$ ОДЗ и $p(x)\neq 0$ в формулировке теоремы существенны. В частности, если $p(x)=0$ при некотором $x\in$ ОДЗ, то преобразование может привести к появлению посторонних корней.

(Соответствующий пример придумайте самостоятельно.)

Теорема 3. Если обе части данного уравнения разделить на одно и то же не равное нулю выражение, определенное на ОДЗ исходного уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Или в виде схемы:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)}{p(x)}=\dfrac{g(x)}{p(x)}, \\ p(x)\neq 0, x\in \text{ОДЗ}. \end{cases}$$

Как и в предыдущих случаях, нарушение требований $x\in$ ОДЗ и $p(x)\neq 0$ может привести к неравносильным преобразованиям.

Доказательства теорем 1–3 следуют из очевидных свойств числовых равенств. (Проведите их самостоятельно.)

Несколько слов об ОДЗ

Мы видели, что ОДЗ может быть полезно при обосновании равносильных переходов, но обязательно ли при решении уравнений и неравенств находить ОДЗ?

Иногда рекомендуют решать уравнения (неравенства, системы уравнений и неравенств) по следующей схеме:

1) Найти ОДЗ, то есть решить соответствующие неравенства и выписать в явном виде, на каком числовом множестве имеет смысл данное уравнение.

2) Решить уравнение с помощью тех или иных преобразований.

3) Проверить, принадлежат ли корни данного уравнения ОДЗ.

Попробуем ответить на этот вопрос, рассмотрев несколько примеров. Может ли такой способ решения привести к потере корней или появлению посторонних корней?

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{-x^5+x^2+1}=x+1$.

Решение. ОДЗ определяется из условия: $x^5-x^2-1\le 0$. Такое неравенство можно решить только приближенно. Но его и не нужно решать. Можно поступить иначе:

$$\sqrt{-x^5+x^2+1}=x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x^5+x^2+1=(x+1)^2,\\ x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^5+2x=0,\\ x\ge -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x^4+2)=0,\\ x\ge -1.\end{cases}$$

Ответ: 0.

Комментарий. Возможность первого равносильного перехода следует из определения арифметического квадратного корня. Такого рода равносильности рассмотрим подробнее в лекции 4.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{2x-1}=-x$.

Решение. ОДЗ получим из условия $2x-1\ge 0$. То есть $x\ge \frac{1}{2}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $2x-1=x^2$, $x^2-2x+1=0$, $x=1$. Полученный корень входит в ОДЗ, но, как легко проверить, не является корнем данного уравнения.

Ответ: нет корней.

Значит ли это, что нахождение ОДЗ в примере 5 совсем бесполезно? Нет. Несколько изменим рассуждения: поскольку $2x-1\ge 0$, то $-x\le -\frac{1}{2}<0$, следовательно, $\sqrt{2x-1}<0$, что противоречит определению арифметического квадратного корня.

Пример 6. Решите уравнение $\sqrt{3-x}=\sqrt[4]{x-3}+\lg(x-2)$.

Решение. ОДЗ данного уравнения определяется условиями $x\ge 3$ и $3\ge x$, откуда следует, что единственное значение, удовлетворяющее ОДЗ, $x=3$.

Проверка показывает, что $x=3$ — корень уравнения.

Ответ: 3.

Выводы:

1) Иногда найти ОДЗ труднее, чем решить уравнение, а может быть, и вовсе невозможно (см. пример 4).

2) То, что найденные корни входят в ОДЗ, вовсе не гарантирует, что они удовлетворяют исходному уравнению, даже если все преобразования выполнены без ошибок (пример 5).

3) Иногда использование ОДЗ полезно, поскольку дает возможность быстро решить уравнение (пример 6).

Получается, что чаще всего находить в явном виде ОДЗ не обязательно.

Так как же все-таки решать уравнения (неравенства, системы неравенств)?

Универсальных рецептов нет. Научиться выбирать наиболее эффективные пути решения можно только с опытом.

О системах и совокупностях уравнений и неравенств

При решении уравнений мы будем использовать так называемые *системы* и *совокупности* уравнений и неравенств.

Пусть дано два уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$.

(1.6.) Будем говорить, что задана *система* двух уравнений с одной переменной, если требуется найти все значения переменной, при которых оба уравнения системы обращаются в верные равенства. *Решением* системы уравнений называют значение переменной, обращающее оба уравнения системы в верные числовые равенства.

Стандартное обозначение системы: $\begin{cases}f_1(x)=g_1(x),\\ f_2(x)=g_2(x).\end{cases}$

(1.7.) Будем говорить, что задана *совокупность* уравнений с одной переменной, если требуется найти все такие значения переменной, при каждом из которых хотя бы одно из уравнений системы обращается в верное числовое равенство. *Решением* совокупности уравнений называют значение переменной, обращающее хотя бы одно из уравнений системы в верное числовое равенство.

Стандартное обозначение совокупности: $\left[\begin{array}{l}f_1(x)=g_1(x)\\ f_2(x)=g_2(x).\end{array}\right.$

Решить систему (или совокупность) уравнений — означает найти все решения или доказать, что система (или совокупность) решений не имеет.

При решении уравнений применяют и более сложные конструкции. Например, *системы* уравнений и неравенств, *совокупности* систем и так далее. Решая уравнения, мы в ходе преобразований будем получать не только уравнения, но и неравенства, а также системы (совокупности) уравнений и неравенств (смешанные системы).

Пример 7. Решите уравнение $(x+2)^2+(x-1)^2=0$.

Решение. Все слагаемые левой части данного уравнения неотрицательны. Следовательно, равенство возможно, только если каждое из слагаемых равно нулю.

Таким образом,

$$(x+2)^2+(x-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)^2=0,\\(x-1)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2,\\x=1.\end{cases}$$

Последние два равенства противоречат друг другу, следовательно, система не имеет решений. В этом случае говорят, что система *несовместна*.

Ответ: нет решений.

В дальнейшем мы не всегда будем использовать указанные обозначения для систем и совокупностей уравнений, в некоторых случаях мы будем записывать уравнения в одну строку, указывая при этом, что рассматривается система или совокупность.

В первой лекции мы будем говорить о решении алгебраических уравнений (целых и дробно-рациональных). Именно этот раздел представляется исключительно важным для понимания дальнейшего. Это обусловливается следующими причинами. Во-первых, именно на материале алгебраических уравнений (рациональных и дробно-рациональных) легче всего провести первое знакомство с основными понятиями теории и выработать навык работы с ними. Во-вторых, решение задач из других разделов элементарной математики (в частности, тригонометрических, показательных, логарифмических и других трансцендентных уравнений, неравенств и их систем) чаще всего сводится к решению алгебраических уравнений.

Напомним, что:

(1.8.) Уравнение $f(x)=g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ — многочлены, называют *целым рациональным* уравнением. Рациональные уравнения можно привести к виду

$$a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

Степень многочлена $a_0x^n+\ldots+a_1x+a_n$ называют степенью рационального уравнения. Наиболее пристальное внимание в школьном курсе математики уделяют рациональным уравнениям

первой и второй степени. В нашем курсе мы будем рассматривать, как правило, уравнения высших степеней.

(1.9.) Уравнение, $f(x)=g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ — дробные рациональные функции, называют *дробно-рациональным* уравнением.

Дробно-рациональные уравнения можно привести к виду

$$\frac{a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^k+\ldots+b_{n-1}x+b_k}=0.$$

Общие методы преобразования уравнений

Напомним наиболее часто используемые преобразования уравнений.

Разложение на множители (расщепление уравнений)

Метод разложения на множители основан на следующей схеме:

$$f(x)\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\g(x)=0,\end{array}\right.\\x\in \text{ОДЗ}.\end{cases}$$

Другими словами, при решении уравнения вида $f(x)\cdot g(x)=0$ можно заменить его совокупностью двух более простых уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$ при условии, что каждое из них рассматривается на ОДЗ исходного уравнения.

Заметим, что если $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, то ОДЗ исходного уравнения и каждого из уравнений совокупности совпадает с множеством действительных чисел, поэтому для рациональных уравнений схема разложения на множители выглядит проще:

$$f(x)\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=0\\g(x)=0.\end{array}\right.$$

Пример 8. Решите уравнение $x^3-4x^2-16x+64=0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители методом группировки. Получим:

$$x^2(x-4)-16(x-4)=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-16)=0 \Leftrightarrow (x-4)^2(x+4)=0.$$

Ответ: ±4.

Пример 9. Решите уравнение $x^2 - \frac{2}{3x} = \frac{13}{9}$.

Решение. Перепишем уравнение:

$$x^2 - \frac{4}{9} = \frac{1}{x}\left(x + \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{x}\left(x + \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3} - \frac{1}{x}\right) = 0,$$

что равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{aligned} & x + \frac{2}{3} = 0 \\ & x - \frac{1}{x} = \frac{2}{3}. \end{aligned}\right.$

Ответ: $-\frac{2}{3}$, $\frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$.

При разложении на множители левой части целого рационального уравнения применяют следующую теорему.

Теорема 4. Если x_0 — корень уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен степени n, то $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$, причем $g(x)$ — многочлен степени $n-1$.

Доказательство. Покажем, что $f(x)$ можно представить в виде $(x - x_0) \cdot g(x)$.

Пусть $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ и x_0 — корень уравнения $f(x) = 0$, тогда $f(x_0) = 0$, и

$$f(x) - f(x_0) = f(x) = a_0 (x^n - x_0^n) + \ldots + a_{n-1}(x - x_0).$$

Поскольку

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \ldots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}),$$

то в правой части равенства можно вынести за скобки выражение $x - x_0$, а выражение в скобках — многочлен степени $n - 1$.

Пример 10. Решите уравнение $x^3 + x - 10 = 0$.

Решение. Подстановкой убедимся, что 2 — корень уравнения. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^3 + x - 10 = (x^3 - 2x^2) + (2x^2 - 4x) + (5x - 10) =$$

$$= x^2(x - 2) + 2x(x - 2) + 5(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 5).$$

Получим уравнение:

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x - 2 = 0 \\ & x^2 + 2x + 5 = 0. \end{aligned}\right.$$

Второе уравнение совокупности корней не имеет.

Ответ: 2.

Рациональные корни уравнения

Каким же образом можно «угадать корень»? Можно попытаться воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 5. Если x_0 — целый корень уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, свободный член которого не равен 0, то x_0 — делитель свободного члена.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ и $f(x_0) = 0$.

То есть $a_0 x_0^n + \ldots + a_{n-1} x_0 = -a_n$, откуда следует, что $-(a_0 x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}) x_0 = a_n$, что означает, что x_0 — делитель a_n.

Пример 11. Найдите целые корни уравнения

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = 0.$$

Решение. Делители свободного члена: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16.

Подстановкой можно убедиться, что 1 и 4 — корни уравнения.

Ответ: 1; 4.

Можно доказать и более общую теорему.

Теорема 6. Если $x_0 = \frac{m}{n}$ — рациональный корень уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то m — делитель свободного члена, а n — делитель старшего члена.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 12. Найдите рациональные корни уравнения

$$4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0.$$

Решение. Целые и рациональные корни содержатся среди чисел: ± 1, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{4}$.

Подстановка показывает, что единственный рациональный корень уравнения $x = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

«Избавление» от знаменателя

Нередко можно упростить уравнение, умножив обе его части на общий знаменатель его дробных членов.

Схема метода:

$$\frac{f(x)}{p(x)} = \frac{g(x)}{p(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ p(x) \neq 0. \end{cases}$$

Пример 13. Решите уравнение $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = 0$.

Решение. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0. \end{cases}$

Корни уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Корень 1 — посторонний, так как $1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$.

Ответ: 2.

Пример 14. Решите уравнение $\dfrac{2}{x^2 - 2x - 3} + \dfrac{x - 5}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

Решение. Преобразуем знаменатели в произведение:

$$\frac{2}{(x+1)(x-3)} + \frac{x-5}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{(x-1)(x-3)}.$$

Составляем общий знаменатель: $(x+1)(x-1)(x-3)$.

Преобразуем:

$$\frac{2(x-1) + (x-5)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)(x-3)}.$$

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 13 = x + 1, \\ x - 1 \neq 0, \\ x + 1 \neq 0, \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0, \\ x \neq \pm 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения: 4 и 3.

Корень 3 — посторонний, поскольку $x \neq 3$.

Ответ: 4.

Замена переменной в уравнении

Метод замены переменной (или, иначе, метод введения нового неизвестного) состоит в следующем. Предположим, что уравнение $f(x) = p(x)$ удалось переписать в виде $f(g(x)) = p(g(x))$. Решение уравнения $f(x) = p(x)$ проведем в два этапа:

1) Будем считать, что $g(x) = u$, решим уравнение $f(u) = p(u)$.

Получим: $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни уравнения $f(u) = p(u)$.

2) Последовательно решим уравнения $g(x) = u_1$, $g(x) = u_2$, …, $g(x) = u_n$.

Полученные корни и будут корнями уравнения $f(x) = p(x)$.

Схема метода:

$$f(g(x)) = p(g(x)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = u_1 \\ g(x) = u_2 \\ \ldots \\ g(x) = u_n, \end{array}\right.$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни уравнения $f(u) = p(u)$.

Введение новой переменной позволяет «разбить задачу на подзадачи», то есть вместо одного сложного решать несколько простых уравнений.

Пример 15. Решите уравнение $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$.

Решение. Пусть $u = x^2 + x + 1$, тогда исходное уравнение принимает вид $(u+1)u = 12$, откуда $u^2 + u - 12 = 0$, $u_1 = 3$, $u_2 = -4$.

Рассмотрим два случая:

1) $x^2 + x + 1 = 3$, $x^2 + x - 2 = 0$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

2) $x^2 + x + 1 = -4$, $x^2 + x + 5 = 0$. Уравнение корней не имеет.

Ответ: -2; 1.

Пример 16. Решите уравнение $\dfrac{1}{x(x+4)}-\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{4}{5}$.

Решение. Пусть $u=x^2+4x$.

Перепишем исходное уравнение в виде $\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{u+4}=\dfrac{4}{5}$. Домножив обе части уравнения на общий знаменатель, получим систему

$$\begin{cases} u^2+4u-5=0, \\ u\neq 0, u\neq -4. \end{cases}$$

Решение системы: $u_1=1$, $u_1=-5$.

Осталось решить совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2+4x-1=0 \\ x^2+4x+5=0. \end{array}\right.$

Второе уравнение совокупности корней не имеет, корни первого: $-2\pm\sqrt{5}$.

Пример 17. Решите уравнение $x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=5$.

Решение. Заметим, что если a — корень уравнения, то $-\dfrac{1}{a}$ также корень уравнения. В этом легко убедиться подстановкой. В таких случаях полезно попробовать замену: $u=x-\dfrac{1}{x}$, тогда

$u^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2$, $u^2+2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$. Получим уравнение: $u^2+\dfrac{1}{2}u-3=0$, $2u^2+u-6=0$, корни которого -2 и $\dfrac{3}{2}$.

Осталось решить совокупность уравнений $x-\dfrac{1}{x}=-2$ и $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$, что равносильно: $\left[\begin{array}{l} x^2+2x-1=0 \\ 2x^2-3x-2=0. \end{array}\right.$

Корни первого уравнения: $-1\pm\sqrt{2}$, корни второго: 2; $-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: 2; $-\dfrac{1}{2}$; $-1\pm\sqrt{2}$.

Пример 18. Решите уравнение $(x^2+3x+3)(x^2-2x+3)=24x^2$.

Решение. Заметим, что $x=0$ не является решением данного уравнения. Разделим обе части уравнения на x^2.

Получим: $\left(x+3+\dfrac{3}{x}\right)\left(x-2+\dfrac{3}{x}\right)=24$.

Пусть $u=x+\dfrac{3}{x}$, тогда $(u+3)(u-2)=24$, $u^2+u-30=0$, откуда $u_1=5$, $u_2=-6$.

Осталось решить уравнения $x+\dfrac{3}{x}=5$ и $x+\dfrac{3}{x}=-6$.

Ответ: $\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$, $-3\pm\sqrt{6}$.

Пример 19. Решите уравнение

$$\frac{x+4}{x-1}+\frac{x-4}{x+1}=\frac{x+8}{x-2}+\frac{x-8}{x+2}-\frac{8}{3}.$$

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$1+\frac{5}{x-1}+1-\frac{5}{x+1}=1+\frac{10}{x-2}+1-\frac{10}{x+2}-\frac{8}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{5}{x-1}-\frac{5}{x+1}=\frac{10}{x-2}-\frac{10}{x+2}-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\ \frac{10}{x^2-1}=\frac{40}{x^2-4}-\frac{8}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{15}{x^2-1}=\frac{60}{x^2-4}-4.$$

Пусть $x^2=y$, тогда $\dfrac{15}{y-1}=\dfrac{60}{y-4}-4$, откуда $\dfrac{4y^2-65y+16}{(y-1)(y-4)}=0$ и $y_1=16$, $y_2=\dfrac{1}{4}$.

Исходное уравнение имеет четыре корня.

Ответ: ± 4, $\pm\frac{1}{2}$.

Рассмотрим некоторые специальные случаи замены в алгебраических уравнениях.

Биквадратные уравнения

Уравнения вида $x^4+bx^2+c=0$, будем называть *биквадратными уравнениями*.

Первый способ. Биквадратное уравнение можно заменой $y=x^2$ свести к квадратному уравнению $y^2+by+c=0$.

Пример 20. Решите уравнение $x^4-10x^2+1=0$.

Решение. Пусть $y=x^2$, $y^2-10y+1=0$, тогда $y_{1,2}=5\pm\sqrt{24}$.

Решив совокупность неполных квадратных уравнений $x^2=5+\sqrt{24}$ и $x^2=5-\sqrt{24}$, получим ответ.

Ответ: $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{5\pm\sqrt{24}}$.

Можно действовать иначе.

Второй способ. При $c>0$, можно воспользоваться заменой $y=x+\frac{1}{x}$.

Разделим обе части уравнения на x^2. Получим:

$$x^2+\frac{1}{x^2}-10=0,\ x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-12=0,\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=12,$$

откуда $x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{12}$.

Решим полученные уравнения:

1) $x+\frac{1}{x}=\sqrt{12}$, $x^2-\sqrt{12}x+1=0$, $x_{1,2}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$.

2) $x+\frac{1}{x}=-\sqrt{12}$, $x^2+\sqrt{12}x+1=0$, $x_{3,4}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$.

Интересно, что это те же самые корни, что и в предыдущем примере.

Пример 21. Решите уравнение $(x-1)^4+(x+3)^4=82$.

Решение. Пусть $y=x+1$, тогда исходное уравнение принимает вид $(y-2)^4+(y+2)^4=82$, оно равносильно уравнению $y^4+24y^2-25=0$, которое уже можно рассматривать как биквадратное уравнение. Решите его самостоятельно.

Ответ: 0 и -2.

Симметрические уравнения

Уравнения вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_kx^{n-k}+\ldots+a_kx^k+\ldots+a_1x+a_0=0,$$

где коэффициенты членов, равно отстоящих от концов, равны между собой, называют *симметрическими уравнениями*.

Симметрические уравнения обладают следующими свойствами:

1) симметрическое уравнение нечетной степени имеет корень $x=-1$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой;

2) уравнение четной степени $2n$ с помощью подстановки $v=x+\frac{1}{x}$ сводится к уравнению степени n.

Пример 22. Решите уравнение

$$2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0.$$

Решение. Заметим, что $x=-1$ — корень исходного уравнения. Пусть $x\neq-1$. Разделим левую часть уравнения на $x+1$ и получим симметрическое уравнение четвертой степени:

$$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0.$$

Разделим обе части уравнения на x^2:

$$2x^2+3x-16+3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}=0,$$

и сгруппируем члены уравнения:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0.$$

Пусть теперь $t=x+\frac{1}{x}$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, и после преобразований получим квадратное уравнение $2t^2+3t-20=0$.

Корни квадратного уравнения: $t_1 = \frac{5}{2}$ и $t_2 = -4$.

Таким образом, исходное уравнение четвертой степени равносильно совокупности уравнений $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ и $x + \frac{1}{x} = -4$. Решив уравнения, получим еще четыре корня исходного уравнения.

Ответ: -1, $-2 \pm \sqrt{3}$, 2, $\frac{1}{2}$.

Возвратные уравнения

Уравнения вида

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_n x^{n+1} + a_{n+1} x^n + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

называют *возвратными уравнениями нечетной степени*, если

$$\frac{a_{2n+1}}{a_0} = \lambda^{n+1},\ \frac{a_{2n}}{a_1} = \lambda^n,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

где λ — некоторое действительное число.

Уравнения вида

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{n-1} x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0$$

называют *возвратными уравнениями четной степени*, если

$$\frac{a_{2n}}{a_0} = \lambda^n,\ \frac{a_{2n-1}}{a_1} = \lambda^{n-1},\ \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = \lambda,$$

где λ — некоторое действительное число.

Таким образом, отношения коэффициентов возвратного уравнения, равноотстоящих от концов, пропорциональны степеням некоторого фиксированного числа.

Возвратные уравнения обладают следующими свойствами:

1) возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $x = -\lambda$, в чем можно убедиться подстановкой;

2) уравнение четной степени $2n$ с помощью подстановки $v = x + \frac{\lambda}{x}$ сводится к уравнению степени n.

Пример 23. Решите уравнение $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 12 = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x^2 и сгруппируем члены уравнения:

$$3x^2 - 2x + 4 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0,\ 3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) + 4 = 0.$$

Обозначим $x + \frac{2}{x} = p$, тогда $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = p^2$ и $x^2 + \frac{4}{x^2} = p^2 - 4$.

Получим уравнение $3(p^2 - 4) - 2p + 4 = 0$, откуда $3p^2 - 2p - 8 = 0$, и $p_1 = 2$, $p_2 = -\frac{4}{3}$.

Уравнения $x + \frac{2}{x} = 2$ и $x + \frac{2}{x} = -\frac{4}{3}$ корней не имеют, следовательно, исходное уравнение также не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Однородные уравнения

Уравнение вида

$$a_0 (u(x))^n + a_1 (u(x))^{n-1} v(x) + \ldots + a_k (u(x))^{n-k} (v(x))^k + \ldots + a_n (v(x))^n = 0$$

называют *однородным уравнением степени n относительно* $u(x)$ *и* $v(x)$.

Поделив обе части однородного уравнения на $(v(x))^n$, можно с помощью замены $p = \frac{u(x)}{v(x)}$ получить уравнение

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_k p^{n-k} + \ldots + a_n = 0,$$

что позволяет упростить исходное уравнение. Случай $v(x) = 0$ необходимо рассмотреть отдельно.

Пример 24. Решите уравнение

$$(x-2)^2(x+1)^2 - (x-2)(x^2-1) - 2(x-1)^2 = 0.$$

Решение. Пусть $u = (x-2)(x+1)$, $v = x - 1$, тогда исходное уравнение можно записать в виде $u^2 - uv - 2v^2 = 0$.

Рассмотрим случаи:

1) Пусть $v = 0$, тогда $x = 1$. Но проверка показывает, что 1 не является корнем исходного уравнения.

2) Пусть $v \neq 0$, тогда с помощью замены $p = \dfrac{u}{v}$ получим уравнение $p^2 - p - 2 = 0$, откуда $p_1 = -1$, $p_2 = 2$.

Осталось решить совокупность уравнений

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x-1} = -1 \text{ и } \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} = 2,$$

каждое из которых сводится к квадратному уравнению.

Ответ: 0, 3, $\pm\sqrt{3}$.

Упражнения для самостоятельной работы

Равносильны ли уравнения (1–3).

1. $\dfrac{x^2-1}{x-1} = 0$ и $x^2 - 1 = 0$.

2. $x^2 + 2x = 0$ и $x^2(x+2) = 0$.

3. $\sqrt{x} = -1$ и $x^2 + 3 = 0$?

Какое из двух уравнений, является следствием другого (4–5).

4. $x^2 = 9$ или $x = 3$.

5. $\dfrac{(x-3)^2}{x^2-9} = 0$ или $\dfrac{x-3}{x+3} = 0$?

Решите уравнение методом разложения на множители (6–7).

6. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

7. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

Решите дробно-рациональное уравнение (8–9).

8. $\dfrac{x^2+1}{x-4} - \dfrac{x^2-1}{x+3} = 23$.

9. $\dfrac{x^2+1}{2x+3} + \dfrac{2x+3}{x^2+1} = \dfrac{29}{10}$.

Решите уравнение методом замены переменных (10–19).

10. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$. **11.** $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2 = 0$.

12. $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x+3)^2} = 27$. **13.** $x(x+3)(x+5)(x+8) = 10$.

14. $(x+2)(x-3)(x-1)(x+6) = 40x^2$.

15. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$.

16. $3x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 10x + 12 = 0$.

17. $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \dfrac{3x}{x^2-6x+15}$.

18. $x^4 + (x-1)^4 = \dfrac{1}{8}$. **19.** $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{10}{9}$.

Решите уравнение методом замены переменных (20–24).

20. $(x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81$. **21.** $(x-2)(x-3)(x-4) = 6$.

22. $\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{2}{(x+2)^2} - \dfrac{3}{x^2+3x+2} = 0$.

23. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right)$. **24.** $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7} + \dfrac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$.

Ответы, указания, решения

1. Нет. **2.** Да. **3.** Да. **4.** Первое. **5.** Второе. **6.** 1; 2; 3. **7.** 0. Перемножим попарно первые и четвертые, а также вторые и третьи скобки в левой и правой частях уравнения:

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6).$$

Далее представим левую и правую части уравнения как разность квадратов:

$$(x^2 - 5x + 5)^2 - 1 = (x^2 + 5x + 5)^2 - 1,$$

откуда получим:

$$(x^2 - 5x + 5)^2 - (x^2 + 5x + 5)^2 = 0 \text{ и } -10x(2x^2 + 10) = 0.$$

8. $\dfrac{-55}{16}$; 5. **9.** $\dfrac{5 \pm \sqrt{51}}{2}$; 1; $-\dfrac{4}{5}$. **10.** 1; 2. **11.** -2; $-3 \pm \sqrt{5}$.

12. $\dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$. Прибавим к обеим частям уравнения $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x+3)^2} = 27$ выражение $-2x \cdot \dfrac{3x}{x+3}$. Получим:

$$\left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 = 27 - \frac{6x^2}{x+3}, \quad \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x+3} - 27 = 0.$$

Выполним замену $y = \frac{x^2}{x+3}$. Получим квадратное уравнение $y^2 + 6y - 27 = 0$, откуда $y_1 = -9$, $y_2 = 3$. Решим совокупность уравнений $\frac{x^2}{x+3} = -9$, $\frac{x^2}{x+3} = 3$. Первое из уравнений совокупности решений не имеет, а второе имеет корни $\frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

13. $-4 \pm \sqrt{6}$. **14.** -1; 6; $\frac{-9 \pm \sqrt{105}}{2}$. **15.** $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **16.** $\frac{1 \pm \sqrt{73}}{6}$, $-1 \pm \sqrt{3}$. **17.** $7 \pm \sqrt{34}$. **18.** $\frac{1}{2}$. **19.** -3 и 1. **20.** 3 и $3 \pm 2\sqrt{5}$.

21. 5. *Указание*. Пусть $t = x - 3$, тогда $x = t + 3$ и после подстановки исходное уравнение принимает вид: $(t^2 - 1)t = 6$, откуда $t^3 - t - 6 = 0$. Разложим полученное уравнение на множители: $t^3 - 2t^2 + 2t^2 - 4t + 3t - 6 = 0$, $(t-2)(t^2 + 2t + 3) = 0$, откуда $t = 2$.

22. 0. *Указание*. Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{3}{(x+1)(x+2)} = 0,$$

что равносильно уравнению $\frac{1}{(x+2)^2}\left(\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 - 3\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + 2\right) = 0$.

Воспользуемся заменой $y = \frac{x+2}{x+1}$.

23. $3 \pm \sqrt{21}$, -2, 6. *Решение*. Данное уравнение равносильно:

$$3\left(\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2}\right) = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right) \Leftrightarrow 3\left(\frac{x^2}{9} - 2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{4}{x} + \frac{16}{x^2}\right) = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right) - 8.$$

Воспользуемся заменой $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$. Получим: $3y^2 - 10y + 8 = 0$, откуда $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{4}{3}$.

Решим уравнения: 1) $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2$, откуда $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{21}$, и 2) $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3}$, откуда $x_3 = -2$, $x_4 = 6$.

24. $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{2}$. *Указание*. Разделите на x числители и знаменатели дробей. Воспользуйтесь заменой $y = 4x + \frac{7}{x} - 10$.

Лекция 2
Методы решения неравенств

Напомним определение и некоторые основные свойства числовых неравенств.

(2.1.) Число A больше числа B, если разность $A - B$ — положительное число.

(2.2.) Число A меньше числа B, если разность $A - B$ — отрицательное число.

Для чисел A и B верно одно и только одно утверждение: $A > B$, $A < B$ или $A = B$, причем число A равно числу B тогда и только тогда, когда разность $A - B$ равна нулю.

В виде схемы:

$$A > B \Leftrightarrow A - B > 0,$$
$$A < B \Leftrightarrow A - B < 0,$$
$$A = B \Leftrightarrow A - B = 0.$$

Некоторые свойства числовых неравенств

При решении неравенств наиболее часто применяются следующие свойства числовых неравенств.

1) Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

2) Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

3) Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

4) Если $a > b > 0$, а n — натуральное число, то $a^n > b^n$.

5) Если $a > b > 0$, а n — натуральное число, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Неравенства с переменной

Неравенство с одной переменной имеет вид

$$f(x) \vee g(x),$$

где $f(x)$, $g(x)$ — некоторые функции. При этом:

(2.3.) *Решением* неравенства называют значение переменной, при подстановке которого в данное неравенство получается верное числовое неравенство.

(2.4.) *Решить* неравенство — означает найти все его решения или доказать, что решений нет.

(2.5.) Областью допустимых значений неравенства (принятое сокращение — ОДЗ) называют множество, на котором определены обе функции $f(x)$ и $g(x)$.

(2.6.) Неравенства *равносильны*, если они имеют одно и то же множество решений. В частности, если неравенства не имеют решений, то они равносильны.

Переход к равносильному неравенству принято обозначать знаком «$\Leftrightarrow$».

(2.7.) Данное неравенство является следствием некоторого другого неравенства, если каждое решение другого неравенства является решением данного.

Пример 1. Равносильны ли неравенства:

а) $x^2 + 1 < 0$ и $x^2 - x + 1 < 0$? б) $x > 1$ и $x^2 > 1$?

Решение.

а) Докажем, что неравенство $x^2 - x + 1 < 0$ не имеет решений.

Действительно,

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

что противоречит неравенству $x^2 - x + 1 < 0$. Неравенство $x^2 + 1 < 0$ также не имеет решений.

Ответ: да.

б) Можно проверить, что среди решений второго неравенства есть число -2, не являющееся решением первого неравенства.

Ответ: нет.

Перечислим основные свойства равносильности неравенств:

Теорема 1. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же выражение, определенное на ОДЗ исходного неравенства, то получим неравенство, равносильное данному неравенству.

Или в виде схемы:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + p(x) > g(x) + p(x), \\ x \in \text{ОДЗ}. \end{cases}$$

В частности, если перенести слагаемое из одной части неравенства в другую, то получится неравенство, равносильное исходному неравенству.

Требование $x \in$ ОДЗ в формулировке теоремы существенно.

Если функция $p(x)$ определена не для всех x из ОДЗ, то равносильность нарушается, и преобразование может привести к потере корней.

Теорема 2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, большее нуля, определенное на ОДЗ исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное исходному неравенству.

Или в виде схемы:

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ p(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot p(x) > g(x)\cdot p(x), \\ x \in \text{ОДЗ}. \end{cases}$$

В частности, если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное исходному неравенству.

Теорема 3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, меньшее нуля, определенное на ОДЗ исходного неравенства, а затем поменять знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное исходному неравенству.

Или в виде схемы:

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ p(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot p(x) < g(x)\cdot p(x), \\ x \in \text{ОДЗ}. \end{cases}$$

В частности, если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, а затем поменять знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное исходному неравенству.

Некоторые неравенства удается путем преобразований свести к линейным неравенствам. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Решите неравенство

$$(x-6)^2 > (x-4)^2 .$$

Решение. Преобразуем исходное неравенство. Получим:

$$(x-6)^2 - (x-4)^2 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 12x + 36) - (x^2 - 8x + 16) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x + 20 > 0 \Leftrightarrow 4x < 20 \Leftrightarrow x < 5 .$$

Ответ: $(-\infty; 5)$.

(2.8.) Будем говорить, что задана *система* неравенств с одной переменной, если требуется найти все такие значения переменной, при которых неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Стандартное обозначение: $\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) \le g_2(x). \end{cases}$

(2.9.) *Решением* системы неравенств называют такое значение переменной, при котором неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

(2.10.) *Решить* систему неравенств — значит найти множество значений переменной, каждое из которых обращает неравенства системы в верные числовые неравенства.

Пример 3. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 > 7, \\ 4x > 16, \\ 2x \le 10. \end{cases}$

Решение. Из простейших свойств неравенств следует, что второе неравенство системы выполнено при $x > 4$, а третье — при $x \le 5$. При $x > 4$ $x^2 > 16$, а следовательно, и $x^2 > 7$.

Получим:

$$\begin{cases} x^2 > 7, \\ x > 4, \\ x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{7}, \\ 4 < x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \le 5.$$

Ответ: (4; 5].

Примечание. При решении мы учитывали, что неравенство $x^2 > 7$ равносильно неравенству $x > \sqrt{7}$ при x положительном.

(2.11.) Будем говорить, что задана *совокупность* неравенств с одной переменной, если требуется найти все такие значения переменной, при каждом из которых хотя бы одно из неравенств, образующих совокупность, обращается в верное числовое неравенство.

Стандартное обозначение: $\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) < g_2(x). \end{array}\right.$

(2.12.) Решением совокупности неравенств называют значение переменной, обращающее хотя бы одно из неравенств, образующих совокупность, в верное числовое неравенство.

(2.13.) Решить совокупность неравенств — означает найти все решения или доказать, что совокупность решений не имеет.

Пример 4. Решите совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x^2 > 7 \\ 4x > 16 \\ 2x \le 10. \end{array}\right.$$

Решение. Как указывалось ранее, второе неравенство системы выполнено при $x > 4$, а третье неравенство — при $x \le 5$.

Объединение множеств решений этих неравенств — вся числовая ось.

Ответ: $(-\infty;\ +\infty)$.

Применяют и более сложные конструкции.

Например, смешанные системы уравнений и неравенств, совокупности систем и так далее. Решая неравенства, мы в ходе преобразований будем получать не только неравенства, но и уравнения, а также системы (совокупности) уравнений и неравенств.

Квадратичные неравенства

Квадратичным неравенством (неравенством второй степени) будем называть неравенство вида $f(x) \vee 0$, где $f(x) = ax^2 + bx + c$, и $a \ne 0$. *Примечание*. Знак $\vee$ подразумевает один из знаков: $>$, $<$, $\ge$ или $\le$.

Пусть $D = b^2 - 4ac$, а x_1 и x_2 — корни $f(x)$ (если корни существуют), причем $x_1 < x_2$.

Верны следующие теоремы.

Теорема 4. Если $a < 0$ и $D < 0$, то для всех x выполнено неравенство $f(x) < 0$.

Теорема 5. Если $a > 0$ и $D < 0$, то для всех x выполнено неравенство $f(x) > 0$.

Действительно,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a^2}\right).$$

Таким образом, если $D < 0$, то $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a^2} > 0$, и знак $f(x)$ совпадает со знаком старшего коэффициента a.

Из доказанных утверждений также следует, что при условии $a \ne 0$, $D < 0$ неравенство $af(x) > 0$ выполнено при всех действительных x. Иначе говоря, если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, то при всех значениях аргумента знак квадратного трехчлена совпадает со знаком его старшего коэффициента.

Для доказательства следующих теорем достаточно разложить квадратный трехчлен на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Теорема 6. Если $a < 0$ и $D > 0$, то для всех действительных $x \in (x_1; x_2)$ выполнено неравенство $f(x) > 0$, а для всех $x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup\, (x_2; +\infty)$ выполнено неравенство $f(x) < 0$.

Теорема 7. Если $a > 0$ и $D > 0$, то для всех действительных $x \in (x_1; x_2)$ выполнено неравенство $f(x) < 0$, а для всех $x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup\, (x_2; +\infty)$ выполнено неравенство $f(x) > 0$.

Пусть, например, $a > 0$, $D > 0$; если $x \in (x_1; x_2)$, то $x - x_1 > 0$, а $x - x_2 < 0$, откуда $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) < 0$, что и требовалось доказать.

Следующие утверждения можно доказать, если воспользоваться разложением:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Теорема 8. Если $a < 0$ и $D = 0$, то для всех $x \ne -\frac{b}{2a}$ выполнено неравенство $f(x) < 0$.

Теорема 9. Если $a > 0$ и $D = 0$, то для всех $x \ne -\frac{b}{2a}$ выполнено неравенство $f(x) > 0$.

Сделайте это самостоятельно.

Решения квадратичного неравенства могут быть получены из графика квадратичной функции — параболы.

Пример 5. Решите неравенство $-x^2 - 2x + 8 < 0$.

Решение. Строим схематически график функции $f(x)$ (рис. 1).

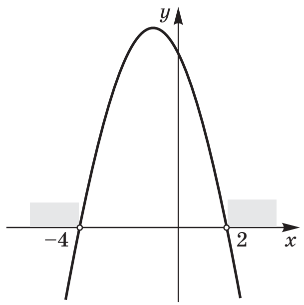

Рис. 1

Из рисунка видно, что $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $3x^2 - x + 1 < 0$.

Решение. Строим схематически график функции (рис. 2)

$$y = 3x^2 - x + 1 > 0.$$

Так как $a > 0$ и $D < 0$, то для всех действительных значений x выполнено неравенство $f(x) > 0$.

Ответ: нет решений.

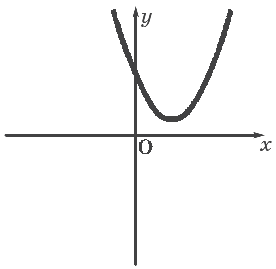

Рис. 2

Пример 7. Решите неравенство $3x^2 + 13x - 10 < 0$.

Решение. Строим схематически график функции (рис. 3)

$$y = 3x^2 + 13x - 10.$$

Из рисунка видно, что $f(x) < 0$ при $x \in (-5; \frac{2}{3})$.

Ответ: $(-5; \frac{2}{3})$.

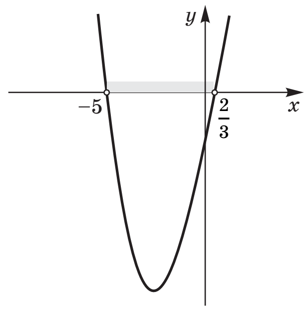

Рис. 3

Пример 8. Решите неравенство $x^2 - 5x \le -4$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $x^2 - 5x + 4 \le 0$.

1) $f(x) = 0$ при $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$;

2) из рисунка видно, что $f(x) \le 0$ при $1 \le x \le 4$ (рис. 4).

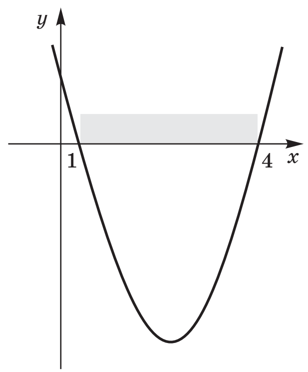

Рис. 4

Иногда свойствами квадратичных неравенств удается воспользоваться при решении более сложных неравенств.

Пример 9. Решите неравенство

$$(x^2 + 5x + 9)(x - 1) \le 7(x^2 + 5x + 9).$$

Решение. Разделим обе части неравенства на выражение $x^2 + 5x + 9 > 0$. Получим равносильное неравенство: $x - 1 < 7$.

Ответ: $(-\infty; 8)$.

Метод интервалов для рациональных неравенств

Рациональными называют неравенства, содержащие только целые рациональные и дробно-рациональные функции.

Целое рациональное неравенство можно привести к виду $P(x) \vee 0$, а дробно-рациональное — к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ — приведенные многочлены.

Рациональные неравенства можно решать *методом интервалов*, основываясь на простом наблюдении: *знак произведения (частного) зависит только от знаков каждого из множителей (делимого и делителей)*.

Применим метод интервалов к неравенству вида

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \vee 0,$$

причем будем считать, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

1) Отметим на числовой оси корни левой части неравенства, то есть числа x_1, x_2, ..., x_n (рис.5).

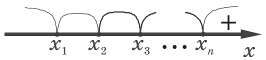

Рис. 5

2) Выясним знаки левой части неравенства на каждом из промежутков $(x_n; +\infty)$, $(x_{n-1}; x_n)$, $(x_{n-2}; x_{n-1})$, ..., $(x_2; x_3)$, $(x_1; x_2)$, $(-\infty; x_1)$.

Рассмотрим случаи:

— На промежутке $(x_n; +\infty)$ все множители левой части неравенства положительные, а потому и все произведение будет положительно.

— На промежутке $(x_{n-1}; x_n)$ один множитель $(x - x_n)$ отрицательный, а все остальные положительные, а потому все произведение будет отрицательно (сменит знак).

— На промежутке $(x_{n-2}; x_{n-1})$ уже два множителя отрицательные, а все остальные положительные, а потому все произведение положительно (вновь сменит знак). И так далее.

И наконец, на промежутке $(-\infty; x_1)$ уже все множители отрицательные, и произведение сменит знак последний раз и станет положительным или отрицательным, в зависимости от числа смен знака.

Ответ можно просто «считать с рисунка».

Пример 10. Решите неравенство $(x-1)(x-2)(x-4) < 0$.

Решение. Отметим на числовой оси корни каждого из линейных множителей (рис 6):

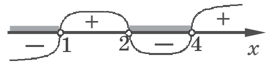

Рис. 6

Выясним знаки левой части неравенства на каждом из промежутков: $(4; +\infty)$, $(2; 4)$, $(1; 2)$, $(-\infty; 1)$. Результаты исследования представим в таблице.

	$(4; +\infty)$	$(2; 4)$	$(1; 2)$	$(-\infty; 1)$
$(x-4)$	+	−	−	−
$(x-2)$	+	+	−	−
$(x-1)$	+	+	+	−
$P(x)$	+	−	+	−

На промежутке $(4; +\infty)$ все множители левой части неравенства положительны, а потому и все произведение будет положительно.

На промежутке $(2; 4)$ один множитель $(x-4)$ меняет знак, а все остальные остаются положительными, а потому произведение будет отрицательным (сменит знак).

На промежутке $(1; 2)$ уже два множителя $(x-4)$ и $(x-2)$ станут отрицательными, а множитель $(x-1)$ останется положительным, а потому все произведение будет положительно (вновь сменит знак).

И наконец, на промежутке $(-\infty; 1)$ уже все три множителя станут отрицательными, произведение сменит знак последний раз (станет отрицательным).

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; 4)$.

Краткий комментарий:

1) Не принято (но не будет ошибкой), если множество решений данного неравенства записано в виде $2 < x < 4$, $x < 1$.

2) Отметим, что при выполнении рисунка масштаб на координатной оси соблюдать необязательно, поскольку важен *порядок* расположения корней, а не расстояния между ними. Более того, если, например, два корня расположены на оси совсем близко друг к другу, но далеко от третьего корня, невозможно построить чертеж, все расстояния на котором пропорциональны истинным расстояниям.

Немного усложним ситуацию. Пусть $P(x)$ произвольный многочлен, и рассмотрим неравенство $P(x) \vee 0$.

Как известно, $P(x)$ можно представить в виде произведения нескольких линейных и квадратичных множителей, которые уже не разлагаются на линейные множители (всегда положительны):

$$(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_kx+q_k)^{\beta_k} \vee 0.$$

Последнее неравенство можно привести к виду

$$(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n} \vee 0.$$

Пусть для определенности $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Отметим на числовой оси все корни левой части неравенства, то есть: x_1, x_2, ..., x_n. Выясним знаки левой части неравенства на каждом из промежутков:

$$(-\infty; x_1),\ (x_1; x_2),\ (x_2; x_3),\ \ldots,\ (x_{n-2}; x_{n-1}),\ (x_{n-1}; x_n),\ (x_n; +\infty).$$

На каждом из интервалов каждый из множителей сохраняет постоянный знак.

Тем самым, знак произведения на каждом из интервалов определяется однозначно по числу отрицательных множителей. Неравенство $P(x) > 0$ выполняется в тех интервалах, в которых число отрицательных множителей четно.

В остальных интервалах имеет место неравенство $P(x) < 0$.

Пример 11. Решите неравенство $(x-1)^2(x-2)^2(3-x) \le 0$.

Решение. Отметим на числовой оси корни левой части неравенства (рис. 7) и определим знаки левой части неравенства в каждом из интервалов.

При $x > 3$, выполнены неравенства

$$3-x<0,\ (x-1)^2>0,\ (x-2)^2>0,$$

поэтому значение выражения отрицательно. В точке 3 выражение $3-x$ меняет знак, следовательно, и все выражение меняет знак, то есть принимает положительные значения на интервале $2 < x < 3$.

В точках 1 и 2 выражение не меняет знак, то есть сохраняет в соответствующих интервалах положительные значения.

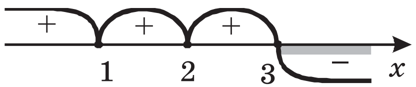

рис. 7

Неравенство нестрогое, поэтому числа 1 и 2 — решения.

Ответ: $x \in \{1; 2\} \cup [3; +\infty)$.

При решении дробных неравенств (неравенств вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$) можно поступать аналогично:

1) найти корни числителя и знаменателя, а затем разложить многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ на множители;

2) заменить квадратичные множители на 1 или -1 (в зависимости от знака);

3) отметить на числовой оси корни числителя и знаменателя;

4) определить знак дроби в каждом из интервалов, на которые корни числителя и знаменателя разбивают числовую ось.

Пример 12. Решите неравенство $\dfrac{(x-1)(x-2)}{3-x} \le 0$.

Решение. Отметим на числовой оси корни числителя и знаменателя (рис. 8):

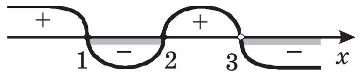

Рис. 8

При $x > 3$, выполнены неравенства $3-x<0$, $x-1>0$, $x-2>0$, поэтому дробь отрицательна. В каждом из корней числителя и знаменателя дробь меняет свой знак. Неравенство нестрогое, поэтому числа 1 и 2 — решения неравенства.

Ответ: $x \in [1; 2] \cup (3; +\infty)$.

Пример 13. Решите неравенство

$$\frac{(x-1)(x^2-4)(x^2-x-6)}{x^2(x^2-1)} \ge 0.$$

Запишем разложение левой части неравенства на линейные множители:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x+2)^2(x-3)}{x^2(x-1)(x+1)} \ge 0.$$

Расставим на оси корни левой части неравенства (рис. 9):

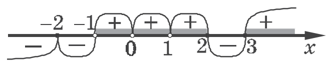

Рис. 9

Обратим внимание, что в точках -2; 0 и 1 левая часть неравенства знака не меняет, а в точках -1, 2 и 3 знак меняет.

Неравенство нестрогое, поэтому корни соответствующего уравнения (± 2 и 3) входят в множество решений неравенства.

Ответ: $\{-2\} \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (1;2] \cup [3;+\infty)$.

Перед тем, как применить метод интервалов, иногда приходится преобразовывать исходное неравенство.

Пример 14. $\dfrac{2x^2+17x+36}{x^2+6x+5} \ge \dfrac{x+4}{x+1}$.

Решение. Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{2x^2+17x+36}{x^2+6x+5} \ge \frac{x+4}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x^2+17x+36}{(x+1)(x+5)} - \frac{x+4}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+17x+36-(x^2+9x+20)}{(x+1)(x+5)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+8x+16}{(x+1)(x+5)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+4)^2}{(x+1)(x+5)} \ge 0.$$

Применим метод интервалов.

Ответ: $(-\infty;-5) \cup \{-4\} \cup (-1;+\infty)$.

Нередко при решении неравенств применяется метод замены переменных.

Пример 15. $(x^2-3x+2)(x^2-9x+20) < 180$.

Решение. Преобразуем исходное неравенство.

Разложим оба квадратных трехчлена на множители. Перемножим полученные множители. Получим:

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) < 180 \Leftrightarrow (x^2-6x+5)(x^2-6x+8) < 180.$$

Обозначим $a = x^2-6x+5$. Тогда

$$a(a+3) < 180 \Leftrightarrow a^2+3a-180 < 0 \Leftrightarrow (a+15)(a-12) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -15 < a < 12.$$

Таким образом, исходное неравенство сводится к системе:

$$\begin{cases} x^2-6x+5 > -15, \\ x^2-6x+5 < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+20 > 0, \\ x^2-6x-7 < 0. \end{cases}$$

Первое неравенство системы верно при всех значениях x, а второе можно привести к виду $(x+1)(x-7) < 0$.

Ответ: $(-1;\ 7)$.

Метод интервалов как следствие свойств непрерывности

Метод интервалов для непрерывных функций может быть основан на следующем утверждении.

Теорема 10. Непрерывная функция, не обращающаяся в нуль на некотором интервале, сохраняет на этом интервале постоянный знак.

Данное утверждение можно доказать, опираясь на следующее утверждение, смысл которого (но не доказательство) легко увидеть из рисунка, а доказательство приводится в курсе математического анализа.

Теорема 11 (*Больцано–Коши*). Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и числа $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то на отрезке $[a;b]$ найдется такое число c, что $f(c)=0$.

Доказательство теоремы 10 проведем методом от противного.

Предположим, что существуют числа c и d из интервала $(a;b)$ такие, что $c<d$, $f(c)>0$, $f(d)<0$. Тогда согласно теореме Больцано–Коши, существует такое число p, что $c<p<d$ и $f(p)=0$. Противоречие.

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале $(a;b)$, то знак функции $f(x)$ на этом интервале можно выяснить следующим образом:

1) Найдем x_1, x_2, …, x_n — корни уравнения $f(x)=0$. Интервал $(a;b)$ разбивается на интервалы $(a;x_1)$, $(x_1;x_2)$, …, $(x_n;b)$, на каждом из которых функция f сохраняет постоянный знак.

2) Теперь достаточно вычислить значение функции в одной точке для каждого такого интервала.

Таким образом, для решения неравенства вида $f(x) \vee 0$ можно поступить следующим образом:

1) выяснить промежутки непрерывности функции $f(x)$;

2) решить уравнение $f(x)=0$ на каждом таком промежутке; корни уравнения вместе с граничными точками промежутков непрерывности разбивают область определения на интервалы, на каждом из которых функция сохраняет знак;

3) вычислить по одному значению функции $f(x)$ для каждого такого интервала;

4) записать ответ.

Пример 16. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x+11}}{x^2+2x} \geq 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+11}}{x^2+2x}$.

1) Область определения функции $f(x)$ находим из системы неравенств $x \geq -11$, $x^2+2x \neq 0$.

Область определения: $[-11,-2) \cup (-2;0) \cup (0;+\infty)$.

2) Уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень: -11.

Таким образом, область определения функции $f(x)$ состоит из следующих интервалов знакопостоянства $(-11, -2)$, $(-2; 0)$, $(0;+\infty)$.

3) Определим знак функции $f(x)$ на каждом из интервалов знакопостоянства. Получим:

$$f(-3) = \frac{\sqrt{8}}{9-6} > 0, \quad f(-1) = \frac{\sqrt{10}}{1-2} < 0, \quad f(1) = \frac{\sqrt{12}}{1+2} > 0.$$

Неравенство нестрогое, поэтому -11 входит в множество решений.

Ответ: $[-11;2) \cup (0;+\infty)$.

Метод замены множителей

Если области определения, нули и промежутки знакопостоянства функций $f(x)$ и $f_1(x)$ совпадают, то иногда бывает выгодно вместо неравенства $f(x)\cdot g(x) \vee 0$ решать неравенство $f_1(x)\cdot g(x) \vee 0$.

В частности, можно разность значений монотонных функций заменить разностью значений их аргументов.

Теорема 12. Если функция $p(x)$ возрастает на некотором промежутке, то неравенства $p(a)-p(b)>0$ и $a-b>0$ равносильны на ОДЗ.

Или в виде схемы:

$$p(a)-p(b)>0 \Leftrightarrow a-b>0;$$
$$p(a)-p(b)<0 \Leftrightarrow a-b<0;$$
$$p(a)-p(b)=0 \Leftrightarrow a-b=0.$$

Теорема 13. Если функция $p(x)$ убывает на некотором промежутке, то неравенства $p(a)-p(b)>0$ и $a-b<0$ равносильны на ОДЗ.

В виде схемы:

$$p(a)-p(b)>0 \Leftrightarrow a-b<0,$$
$$p(a)-p(b)<0 \Leftrightarrow a-b>0,$$
$$p(a)-p(b)=0 \Leftrightarrow a-b=0.$$

Пример 17. Решите неравенство $\dfrac{(3x-2)^{11}-x^{22}}{x-6} > 0$.

Решение. Данное неравенство имеет вид $f(x)\cdot g(x)>0$, где

$$f(x) = (3x-2)^{11} - (x^2)^{11}.$$

Пусть $p(x) = x^{11}$, $p(x)$ — возрастает на множестве всех действительных чисел. Тогда промежутки знакопостоянства $f(x)$ совпадают с промежутками знакопостоянства $f_1(x) = (3x-2)-x^2$, и неравенство $f(x)\cdot g(x)>0$ равносильно неравенству $f_1(x)\cdot g(x)>0$.

Следовательно, $p(3x-2)-p(x^2)>0 \Leftrightarrow (3x-2)-x^2>0$, и

$$\frac{(3x-2)^{11}-(x^2)^{11}}{x-6} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2-x^2}{x-6} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x-6} < 0.$$

Далее, воспользовавшись методом интервалов для рациональных функций, получим *ответ*: $(-\infty;1)\cup(2;6)$.

Проверьте это самостоятельно.

В дальнейшем мы не раз убедимся, что применение метода замены множителей для сведения решения неравенства к методу интервалов существенно снижает объем решения.

Упражнения для самостоятельной работы

Решите квадратичные неравенства (1–4).

1. $3x^2-4x+2 \leq 0$.

2. $x^2-6x+9 \leq 0$.

3. $7x^2-x+1>0$.

4. $x^2-3x+2>0$.

Решите неравенства методом интервалов (5–9).

5. $\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-2)} > 0$.

6. $\dfrac{(x+2)(x-2)^2}{x+5} \leq 0$.

7. $\dfrac{14x-13}{(3x-1)(x+1)} \geq 1$. **8.** $\dfrac{x+2}{3x+1} \leq \dfrac{x-2}{2x-1}$.

9. $(x^2-6x+8)(x^2-11x+28) < 0$. **10.** $\dfrac{x^2+3x+4}{x^2+4x+3} \leq x$.

11. $\dfrac{(2x^2-5x-3)(x-1)}{(3x-7)(x-2)^2(3x^2-4x+2)} \geq 0$.

При решении неравенства воспользуйтесь методом замены переменных (12–13).

12. $2x^4+x^2-3 \geq 0$. **13.** $x^2-7x+16-\dfrac{20}{x^2-7x+17} \leq 0$.

Укажите и исправьте ошибки в решении неравенства (14–15).

14. Решите неравенство $\dfrac{x-2}{x+2} \geq \dfrac{2x-3}{4x-1}$.

Решение.

$$\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1} \Leftrightarrow (x-2)(4x-1) \geq (2x-3)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2x^2-10x+8 \geq 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-5x+4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \geq 0.$$

Ответ: $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

15. Решите неравенство $\dfrac{(x-5)^2}{x-1} > 0$.

Решение. Воспользуемся методом интервалов (рис. 10), получим:

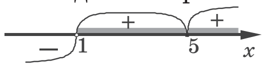

Рис. 10

Ответ: $(1;+\infty)$.

Ответы, указания, решения

1. Нет решений. **2.** 3. **3.** $(-\infty;\infty)$. **4.** $(-\infty;1)\cup(2;\infty)$.

5. $(-\infty;-3)\cup(-1;2)\cup(4;+\infty)$. **6.** $(-5;-2]\cup\{2\}$. **7.** $(-1;\frac{1}{3})\cup\{2\}$.

8. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup(8;+\infty)$. **9.** $(2;4)\cup(4;7)$. **10.** $(-3;-1)\cup[1;+\infty)$.

11. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup[1;2)\cup\left(2;\dfrac{7}{3}\right)\cup[3;+\infty)$. **12.** $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

13. [3; 4]. **14.** В ходе преобразований обе части неравенства умножили на общий знаменатель. При этом не было учтено, что выражение $(x+2)(4x-1)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Правильное решение:

$$\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1} \Leftrightarrow \frac{(x-2)(4x-1)-(2x-3)(x+2)}{(x+2)(4x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{(x+2)(4x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(4x-1)} \geq 0.$$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(\dfrac{1}{4};1\right]\cup[4;+\infty)$.

15. Неравенство строгое, поэтому число 5, при котором левая часть неравенства обращается в 0, не является его решением. Правильный рисунок (рис. 11):

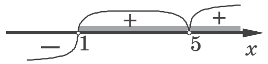

Рис. 11

Ответ: $(1;5)\cup(5;+\infty)$.

Лекция 3
Методы решения систем уравнений

Задача о решении систем уравнений с несколькими переменными трудна, и в общем случае ее нельзя решить средствами элементарной алгебры.

Однако иногда, комбинируя некоторые известные методы решения: подстановки и алгебраического сложения, замены переменных, удается найти путь к решению системы. При этом в каждом отдельном случае приходится использовать частные особенности задачи для того, чтобы найти удачный метод решения.

Вначале мы рассмотрим некоторые вопросы теории систем уравнений. Для простоты ограничимся системами уравнений с двумя неизвестными.

Системы алгебраических уравнений

Напомним основные определения.

Пусть даны два уравнения с двумя переменными:

$$f(x,y)=g(x,y) \text{ и } f_1(x,y)=g_1(x,y).$$

(3.1.) *Решением* системы уравнений называют упорядоченную пару чисел (x_0, y_0), при которой оба уравнения системы обращаются в верные равенства.

(3.2.) *Решить* систему уравнений — означает найти все решения или доказать, что решений нет.

(3.3.) Две системы уравнений называют *равносильными*, если множества их решений совпадают. Принято считать, что системы уравнений, не имеющие решений, равносильны.

(3.4.) Система уравнений является *следствием* некоторой другой системы, если каждое решение другой системы является решением данной системы.

При решении систем уравнений их заменяют более простыми, но равносильными системами. При этом чаще всего выполняют преобразования, основанные на следующих утверждениях.

Теорема 1. Если одно из уравнений системы заменить на равносильное уравнение, а второе уравнение оставить неизменным, то получим систему, равносильную исходной.

Или, в виде схемы:

Если $f_1(x,y)=g_1(x,y) \Leftrightarrow f_2(x,y)=g_2(x,y)$, то

$$\begin{cases} f(x,y)=g(x,y), \\ f_1(x,y)=g_1(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)=g(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y). \end{cases}$$

Пример 1. Если в системе уравнений $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2-2x=2y^2 \end{cases}$ уравнение $x+y=6$ заменить на уравнение $x=6-y$, то получим равносильную систему $\begin{cases} x=6-y, \\ x^2-2x=2y^2. \end{cases}$

Теорема 2. Если одно из уравнений системы заменить на сумму уравнений системы, то полученная система уравнений будет равносильна исходной.

В виде схемы:

$$\begin{cases} f(x,y)=g(x,y), \\ f_1(x,y)=g_1(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)+f_1(x,y)=g(x,y)+g_1(x,y), \\ f_1(x,y)=g_1(x,y). \end{cases}$$

Пример 2. Если в системе уравнений $\begin{cases} 3x+y=4, \\ x^2-y=0 \end{cases}$ уравнение $x^2-y=0$ заменить на уравнение $x^2+3x=4$, то получим равносильную систему $\begin{cases} 3x+y=4, \\ x^2+3x=4. \end{cases}$

Теорема 3. Если в одном из уравнений системы выразить одну из переменных через другую, подставить полученное выражение во второе уравнение, то полученная система будет равносильна исходной системе.

В виде схемы:

Если $f_1(x,y)=g_1(x,y) \Leftrightarrow x=p(y)$, то

$$\begin{cases} f(x,y)=g(x,y), \\ f_1(x,y)=g_1(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=p(y), \\ f_1(p(y),y)=g_1(p(y),y). \end{cases}$$

Последнее преобразование служит основой так называемого *метода подстановки* (или иначе: метод последовательного исключения неизвестных), который сводит решение системы уравнений к решению уравнения с одной переменной.

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y^2 - 1 = 0, \\ y^2 + y^3 = xy. \end{cases}$$

Решение. Применим метод подстановки. Преобразуем исходную систему:

$$\begin{cases} x = y^2 + 1, \\ y^2 + y^3 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ y^2 + y^3 = (y^2 + 1)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ y^2 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1, \\ x = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (1; 0), (2; 1).

Пример 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y^2x = -2, \\ x^2 - x^2y = 1. \end{cases}$$

Решение. Умножим второе уравнение на 3.

Полученное уравнение сложим с первым уравнением:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2y + 3y^2x = 1, \\ x^2 - x^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^3 = 1, \\ x^2 - x^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 - x^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 - x^2y = 1. \end{cases}$$

Выполним подстановку $y = x - 1$ во втором уравнении.

Получим: $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.

Корни уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: (1; 0), $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

Теорема 4. Если уравнение $p(x, y) = s(x, y)$ является следствием некоторой системы уравнений, то система, полученная присоединением уравнения $p(x, y) = s(x, y)$ к исходной системе, ей равносильна.

В виде схемы:

$$\text{Если } \begin{cases} f(x, y) = g(x, y), \\ f_1(x, y) = g_1(x, y) \end{cases} \Rightarrow p(x; y) = s(x; y), \text{ то}$$

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y), \\ f_1(x, y) = g_1(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = g(x, y), \\ f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ p(x, y) = s(x, y). \end{cases}$$

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2y^2 + x^2 - 3xy - 7 = 0, \\ 10x^2y^2 + 3x^2 - 20xy - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Если первое уравнение системы умножить на –3, а затем сложить со вторым, то получим уравнение $x^2y^2 - 11xy + 18 = 0$, которое является следствием исходной системы (подумайте почему).

Таким образом,

$$\begin{cases} 3x^2y^2 + x^2 - 3xy - 7 = 0, \\ 10x^2y^2 + 3x^2 - 20xy - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y^2 + x^2 - 3xy - 7 = 0, \\ 10x^2y^2 + 3x^2 - 20xy - 3 = 0, \\ x^2y^2 - 11xy + 18 = 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение $x^2y^2 - 11xy + 18 = 0$ с помощью подстановки $xy = a$, получим: $a^2 - 11a + 18 = 0$, откуда $a_1 = 9$ и $a_2 = 2$.

Исходная система равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} 3x^2y^2 + x^2 - 3xy - 7 = 0, \\ 10x^2y^2 + 3x^2 - 20xy - 3 = 0, \\ xy = 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x^2y^2 + x^2 - 3xy - 7 = 0, \\ 10x^2y^2 + 3x^2 - 20xy - 3 = 0, \\ xy = 9. \end{cases}$$

Решим первую систему. Так как $xy = 2$, то первое уравнение системы можно переписать в виде: $12 + x^2 - 6 - 7 = 0$, откуда $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -2. \end{cases}$

Проверка показывает, что оба решения удовлетворяют исходному уравнению.

Вторая система решений не имеет.

Ответ: (1; 2), (−1; −2).

Некоторые преобразования сохраняют равносильность систем при определенных ограничениях.

Теорема 5. Если в системе уравнений с двумя переменными одно из уравнений представлено в виде произведения, равного нулю, то система равносильна совокупности двух систем на их общей области допустимых значений.

Если $x, y \in$ ОДЗ исходной системы, то

$$\begin{cases} f(x,y)\cdot g(x,y) = 0, \\ p(x,y) = s(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,y) = 0, \\ p(x,y) = s(x,y) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x,y) = 0, \\ p(x,y) = s(x,y). \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ xy + x^2 = 6. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем исходную систему:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ xy + x^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)(x+2y) = 0, \\ xy + x^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2y = 0, \\ xy + x^2 = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2y = 0, \\ xy + x^2 = 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -2y, \\ 2y^2 = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y, \\ 6y^2 = 6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (2; 1), (−2; −1), $(-2\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(2\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

Замена переменных

При решении систем уравнений часто используется метод введения новых переменных (метод замены).

Суть метода состоит в следующем:

Поскольку:

$$\begin{cases} f(p(x,y), s(x,y)) = g(p(x,y), s(x,y)), \\ f_1(p(x,y), s(x,y)) = g_1(p(x,y), s(x,y)), \\ p(x,y) = a, \\ s(x,y) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(a,b) = g(a,b), \\ f_1(a,b) = g_1(a,b), \\ p(x,y) = a, \\ s(x,y) = b, \end{cases}$$

то можно вместо системы

$$\begin{cases} f(p(x,y), s(x,y)) = g(p(x,y), s(x,y)), \\ f_1(p(x,y), s(x,y)) = g_1(p(x,y), s(x,y)) \end{cases}$$

решить более простую систему

$$\begin{cases} f(a,b) = g(a,b), \\ f_1(a,b) = g_1(a,b). \end{cases} \qquad (*)$$

А затем совокупность систем

$$\begin{cases} p(x,y) = a_1, \\ s(x,y) = b_1, \end{cases} \begin{cases} p(x,y) = a_2, \\ s(x,y) = b_2, \end{cases} \cdots \begin{cases} p(x,y) = a_n, \\ s(x,y) = b_n, \end{cases}$$

где $(a_1; b_1)$, $(a_2; b_2)$, …, $(a_n; b_n)$ — решения системы (*).

Иногда с помощью замены переменных удается упростить одно из уравнений системы.

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 12. \end{cases}$

Решение. Пусть $\dfrac{x+y}{x-y} = a$, тогда первое уравнение системы примет вид $a + \dfrac{1}{a} = 3\dfrac{1}{3}$, откуда легко получить, что $a_1 = 3$, $a_2 = \dfrac{1}{3}$.

Следовательно, первое уравнение системы равносильно совокупности уравнений $\dfrac{x+y}{x-y} = 3$ и $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{1}{3}$, а исходная система равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 3, \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{1}{3}, \\ x^2 - y^2 = 12. \end{cases}$$

Указание. Далее воспользуйтесь методом подстановки.

Ответ: (−4; −2), (−4; 2), (4; −2), (4; 2).

Пример 8. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}, \\ xy^2 - x^2y = 6. \end{cases}$

Решение. Преобразуем систему к виду $\begin{cases} \dfrac{y-x}{xy} = \dfrac{1}{6}, \\ xy(y-x) = 6. \end{cases}$

Введем новые переменные: $u = y - x$, $v = xy$.

Получим более простую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{u}{v} = \dfrac{1}{6}, \\ uv = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6u, \\ uv = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6u, \\ u^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6, \\ u = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} v = -6, \\ u = -1. \end{cases}$$

Осталось решить совокупность двух систем:

$$\begin{cases} yx = 6, \\ y - x = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} yx = -6, \\ y - x = -1. \end{cases}$$

Вторая система решений не имеет, а первую легко решить методом подстановки.

Ответ: (2; 3), (−3; −2).

Системы уравнений, одно из которых является линейным уравнением

Системы уравнений, из которых одно первой степени, а другое квадратное, как правило, решают с помощью метода подстановки.

Пример 9. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x + 2y = 8. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения системы выразим одну переменную через другую, затем подставим полученное выражение в

первое уравнение. Решив его, найдем значения x и y:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x = 8 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (8-2y)^2 + (8-2y)y + y^2 = 19, \\ x = 8 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 24y + 45 = 0, \\ x = 8 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 8y + 15 = 0, \\ x = 8 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ x = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 5, \\ x = -2. \end{cases}$$

Ответ: (2; 3), (−2; 5).

Однородные системы

Системы уравнений второй степени, хотя бы одно из которых является однородным уравнением, решаются методом подстановки по следующей схеме:

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D, \\ A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 = 0, \\ C_1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D, \\ x = k_1 y \end{cases} \\ \begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D, \\ x = k_2 y. \end{cases} \end{array} \right.$$

где k_1, k_2 — корни уравнения $A_1k^2 + B_1k + C_1 = 0$.

Пример 10. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 3xy + 5y^2 = 3, \\ 2x^2 + xy - 3y^2 = 7. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение на 7, а второе на 3, после вычитания получим:

$$x^2 - 24xy + 44y^2 = 0.$$

Откуда $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 24\left(\dfrac{x}{y}\right) + 44 = 0$. Далее, воспользовавшись заменой $\dfrac{x}{y} = k$, получим квадратное уравнение $k^2 - 24k + 44 = 0$, корни которого $k_1 = 22$ и $k_2 = 2$.

Таким образом, уравнение $x^2 - 24xy + 44y^2 = 0$ равносильно совокупности уравнений $x = 22y$ и $x = 2y$. Таким образом

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 5y^2 = 3, \\ 2x^2 + xy - 3y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy + 5y^2 = 3, \\ x^2 - 24xy + 44y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 3xy + 5y^2 = 3, \\ x = 22y \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 3xy + 5y^2 = 3, \\ x = 2y. \end{cases} \end{array} \right.$$

Далее решим каждую из полученных систем методом подстановки.

Ответ: $\left(\frac{22}{\sqrt{141}}; \frac{1}{\sqrt{141}}\right)$, $\left(-\frac{22}{\sqrt{141}}; -\frac{1}{\sqrt{141}}\right)$, (2; 1), (−2; −1).

Использование теоремы Виета

Систему уравнений вида $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b \end{cases}$ можно свести к квадратному уравнению $z^2 - az + b = 0$.

Пример 11. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$

Решение. Найдем корни квадратного уравнения $z^2 - 5z + 6 = 0$. Получим: $z_1 = 2$, $z_2 = 3$.

Ответ: (2; 3), (3; 2).

Пример 12. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ xy = 35. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся заменой: $2x = m$, $-3y = n$.

Получим систему $\begin{cases} m + n = -1, \\ mn = -210. \end{cases}$

Найдем корни квадратного уравнения $z^2 + z - 210 = 0$. Корни квадратного уравнения $z_1 = 14$, $z_2 -15$.

Осталось решить системы $\begin{cases} 2x = 14, \\ -3y = -15 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x = -15, \\ -3y = 14. \end{cases}$

Ответ: (7; 5), $\left(-7\frac{1}{2}; -\frac{14}{3}\right)$.

Симметрические системы

Систему уравнений вида $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$ где $f(x, y)$, $g(x, y)$ — симметрические многочлены, решают с помощью замены: $x + y = a$, $xy = b$. Смысл такой замены заключается в том, что степени уравнений, входящих в систему после замены, как правило, уменьшаются: одночлен второй степени xy переходит в одночлен первой степени.

Пример 13. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся заменой: $x + y = a$, $xy = b$.

Поскольку $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$, то данную систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} a^3 - 3ab = 35, \\ a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 125 - 15b = 35, \\ a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6, \\ a = 5. \end{cases}$$

Далее смотри пример 11.
Ответ: (2; 3), (3; 2)
Пример 14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + y + xy = 5. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся заменой: $x + y = a$, $xy = b$.

$$\begin{cases} a^3-3ab+b^3=17, \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3-3ab+b^3=17, \\ a^3+b^3+3ab(a+b)=125, \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3-3ab+b^3=17, \\ a^3+b^3+15ab=125, \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18ab=108, \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=6, \\ a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2, \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=3, \\ b=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Осталось решить систему $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=3. \end{cases}$

Сделайте это самостоятельно.

Ответ: (1; 2), (2; 1).

Иногда бывает, что система, состоящая из несимметрических уравнений, может быть сведена к системе симметрических уравнений подходящей заменой.

Пример 15. Решите систему $\begin{cases} x-y=2, \\ x^3-y^3=8. \end{cases}$

Решение. Пусть $p=-y$. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x+p=2, \\ x^3+p^3=8. \end{cases}$$

Теперь система симметрична. Воспользовавшись стандартной заменой $x+p=a$, $xp=b$ получим:

$$\begin{cases} a=2, \\ a^3-3ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2, \\ 6b=0. \end{cases}$$

Следовательно, $xp=0$.

Рассмотрим два случая

1) $x=0$, $y=-2$;

2) $p=0$, тогда $y=0$, $x=2$.

Ответ: (0; –2), (2; 0).

Еще несколько примеров

Пример 16. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y}, \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x}. \end{cases}$

Решение. Заметим, что поскольку $xy\neq 0$, то, перемножив уравнения, получим уравнение-следствие из данной системы: $(xy+24)(xy-6)=x^2y^2$, что равносильно $xy=8$.

Присоединим уравнение $xy=8$ к исходной системе и решим полученную систему методом подстановки.

Ответ: (4; 2), (–4; –2).

Пример 17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$$

Решение. Представим первое уравнение системы как квадратное относительно x. Получим:

$$10x^2-2(y+19)x+5y^2-6y+41=0.$$

Уравнение имеет корни, если $(y+19)^2-10(5y^2-6y+41)\geq 0$, откуда $-49y^2+98y-49\geq 0$ и $-49(y-1)^2\geq 0$, то есть $y=1$.

После подстановки во второе уравнение системы получим: $x^2-4x+4=0$. Остается проверить, что пара чисел (2; 1) является решением системы. Сделайте это самостоятельно.

Для систем трех (и более) уравнений с тремя (и более) переменными применяются методы решения и справедливы результаты, аналогичные тем, что были рассмотрены для систем двух уравнений с двумя переменными.

Пример 18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+3y+z=1, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9. \end{cases}$$

Решение. Вычтем первое уравнение из второго, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x=-2y-1, \\ x+y+z=2, \\ 2x+3y+z=1, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1, \\ z=3+y, \\ 2x+3y+z=1, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1, \\ z=3+y, \\ 2x+3y+z=1, \\ (2y+1)^2+(y+2)^2+(y+2)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1, \\ z=3+y, \\ 2x+3y+z=1, \\ y(y+2)=0. \end{cases}$$

Подставив $y=0$ в первое и второе уравнения, получим: $x=-1$, $z=3$.

Если $y=2$, то $x=-5$, $z=5$.

Ответ: (−5; 2; 5), (−1; 0; 3).

Пример 19. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy=2, \\ yz=9, \\ zx=2. \end{cases}$$

Симметричная структура уравнений подсказывает следующий прием. Перемножим уравнения системы: $x^2y^2z^2=36$. Следовательно, $xyz=\pm 6$.

Рассмотрим случаи:

$$1) \begin{cases} xyz=6, \\ xy=2, \\ yz=9, \\ zx=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3, \\ x=\dfrac{2}{3}, \\ y=3; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} xyz=-6, \\ xy=2, \\ yz=9, \\ zx=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3, \\ x=-\dfrac{2}{3}, \\ y=-3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{2}{3};\ 3;\ 3\right), \left(-\dfrac{2}{3};\ -3;\ -3\right)$.

Навык решения систем уравнений приходит постепенно. Рассмотрим несколько более трудных примеров.

Пример 20. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=5, \\ \dfrac{yz}{y+z}=4, \\ \dfrac{zx}{x+z}=3. \end{cases}$$

Решение. Здесь тоже поможет симметрия:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{z+x}{xz}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{47}{120} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{z}=\dfrac{47}{120}-\dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{47}{120}-\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{47}{120}-\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{47}{120} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{z}=\dfrac{23}{120}, \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{17}{120}, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{120}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{47}{120}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{120}{17};\dfrac{120}{7};\dfrac{120}{23}\right)$.

Пример 21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2z^2+yz+10x^2y=0, \\ yz+z^2+9x^3y^2=3xy^2, \\ 2y^2+18xy^2-z^2=10x^2z. \end{cases}$$

Решение. Умножим первое уравнение системы на z, второе — на $6y$, третье — на y. Получим:

$$\begin{cases} 2z^3 + yz^2 + 10x^2yz = 0, \\ 6y^2z + 6yz^2 + 54x^3y^3 = 18xy^3, \\ 2y^3 + 18xy^3 - z^2y = 10x^2zy. \end{cases}$$

Сложим все три уравнения:

$$2z^3 + 6yz^2 + 6y^2z + 2y^3 = -54x^3y^3, \ (z+y)^3 = (-3xy)^3,$$

$$z + y = -3xy, \ z = -y(3x+1).$$

Последнее уравнение является следствием исходной системы. Запишем систему уравнений, равносильную исходной системе:

$$\begin{cases} 2z^2 + yz + 10x^2y = 0, \\ yz + z^2 + 9x^3y^2 = 3xy^2, \\ 2y^2 + 18xy^2 - z^2 = 10x^2z, \\ z = -y(3x+1). \end{cases}$$

Подставим во второе уравнение $z = -y(3x+1)$:

$$-y^2(3x+1) + y^2(3x+1)^2 + 9x^3y^2 = 3xy^2,$$

$$y^2(-3x - 1 + 9x^2 + 6x + 1 + 9x^3 - 3x) = 0, \ 9x^2y^2(1+x) = 0.$$

Осталось рассмотреть случаи:

$$1) \begin{cases} x = 0, \\ 2z^2 + yz + 10x^2y = 0, \\ z + y = -3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 2z^2 + yz = 0, \\ z + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 2z^2 + yz = 0, \\ y = -z. \end{cases}$$

Получим решение: $x = y = z = 0$.

$$2) \begin{cases} y = 0, \\ 2z^2 + yz + 10x^2y = 0, \\ z + y = -3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ 2z^2 = 0, \\ z + y = -3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \\ 0 = -3x \cdot 0. \end{cases}$$

Получим решение: x — произвольное действительное число, $y = z = 0$.

$$3) \begin{cases} x = -1, \\ 2z^2 + yz + 10x^2y = 0, \\ z + y = -3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ 2z^2 + yz + 10y = 0, \\ z + y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ 2z^2 + yz + 10y = 0, \\ z = 2y. \end{cases}$$

Получим два решения: $x = y = -1$, $z = -2$ и $x = -1$, $y = z = 0$.

Ответ: $(-1; -1; -2)$, $(a; 0; 0)$, где a — произвольное действительное число.

Упражнения для самостоятельной работы

Решите систему уравнений методом подстановки (1–2).

1. $\begin{cases} 3x + 4y = -19, \\ x^2 - 9xy + y^2 + 19 = 0. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2), \\ x + y = 6. \end{cases}$

Решите систему уравнений методом сложения (3–4).

3. $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 3x + 3y + 2xy = -3, \\ x + y - xy = -11. \end{cases}$

Решите систему уравнений методом замены (5–7).

5. $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{3}{x-2y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x-y} - \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - 3y + \dfrac{1}{3x+5y} = \dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{2x-3y}{3x+5y} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Решите симметрическую систему (8–10).

8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 102 + x + y, \\ xy + x + y = 69. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases}(x^2+1)(y^2+1)=10,\\(x+y)(xy-1)=3.\end{cases}$

Решите систему уравнений (11–14).

11. $\begin{cases}x^2+y^2=2xy+4,\\x+y=6.\end{cases}$ **12.** $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6},\\x+y=5.\end{cases}$

13. $\begin{cases}x^2-xy+y^2=7,\\x^2-y^2=5.\end{cases}$

Решите систему уравнений с тремя неизвестными (14–16).

14. $\begin{cases}\dfrac{xy}{z}=2,\\\dfrac{yz}{x}=3,\\\dfrac{xz}{y}=6.\end{cases}$ **15.** $\begin{cases}x(x+y+z)=70,\\y(x+y+z)=28,\\z(x+y+z)=98.\end{cases}$

16. $\begin{cases}6x+y^2-z^2=6,\\x^2-y-4z=-4,\\21x^2-2y^2+3y=22z^2.\end{cases}$

Ответы, указания, решения

1. (–1; –4), (–5; –1). **2.** (4; 2), (2; 4) **3.** (–3; –2), (3; 2). **4.** (–2; –3), (–3; –2). **5.** (5; –2). **6.** (–2; –1), (2; 1). **7.** $\left(\dfrac{14}{19};\dfrac{3}{19}\right)$, $\left(\dfrac{14}{57};\dfrac{1}{19}\right)$. **8.** (6; 9), (9; 6). **9.** (0; 2), (2; 0). Перепишем систему $\begin{cases}x^3+y^3=8,\\x^2+y^2=4\end{cases}$ в виде

$\begin{cases}(x+y)^3-3xy(x+y)=8,\\(x+y)^2-2xy=4\end{cases}$ и воспользуемся заменой: $x+y=a$, $xy=b$.

Получим:

$$\begin{cases}a^3-3ab=8,\\a^2-2b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a^3-6ab=16,\\2b=a^2-4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a^3-3a(a^2-4)=16,\\2b=a^2-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-12a+16=0,\\2b=a^2-4.\end{cases}$$

Найдем целый корень уравнения $a^3-12a+16=0$ и представим левую часть полученного уравнения в виде произведения: $(a-2)(a^2+2a-8)=0$ и $(a-2)^2(a+4)=0$, откуда $a_1=2$, $a_2=-4$. Им соответствуют значения: $b_1=0$, $b_2=6$.

Осталось решить совокупность систем уравнений

$$\begin{cases}x+y=2,\\xy=0\end{cases}\text{ и }\begin{cases}x+y=-4,\\xy=6.\end{cases}$$

10. (2; 1), (1; 2). **11.** (4; 2), (2; 4). **12.** (3; 2), (2; 3). **13.** (–3; –2), (3; 2), $\left(-\dfrac{4}{\sqrt3};-\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{\sqrt3};\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$.

14. $\left(2\sqrt3;\sqrt6;3\sqrt2\right)$. *Указание*. Перемножив уравнения системы, получим: $xyz=36$. **15.** (5; 2; 7) и (–5; –2; –7). *Указание*. Сложив уравнения системы, получим: $(x+y+z)^2=196$. Рассмотрим два случая: 1) если $x+y+z=14$, то $x=5$, $y=2$, $z=7$; 2) $x+y+z=-14$, то $x=-5$, $y=-2$, $z=-7$.

16. К первому уравнению, умноженному на 2, прибавим второе уравнение, умноженное на 3, и третье уравнение. Получим:

$$\begin{cases}6x+y^2-z^2=6,\\x^2-y-4z=-4,\\21x^2-2y^2+3y=22z^2,\\12x-24z^2+24x^2-12z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+y^2-z^2=6,\\x^2-y-4z=-4,\\21x^2-2y^2+3y=22z^2,\\(x-z)(1+2x+2z)=0.\end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) Подставим выражение $x=z$ в первое и второе уравнения системы, а затем сложим: $(z-1)^2+(y-1)^2=0$. Получим: $x=y=z=1$. Проверка показывает, что это решение системы.

2) В случае, когда $1+2x+2z=0$, тогда $x=-\frac{1}{2}-z$. Подставим в первое уравнение системы: $-3-6z+y^2-z^2=0$, откуда

$$y^2-(z+3)^2=0,\ (y+z+3)(y-z-3)=0.$$

Пусть $y=z+3$. Подставим во второе уравнение и после преобразований получим: $4z^2-16z+5=0$. Результатом решения полученного квадратного уравнения будет $z=\frac{4\pm\sqrt{11}}{2}$.

Если же $y=-z-3$, то $4z^2-8z+29=0$, и уравнение решений не имеет.

Ответ: (1; 1; 1), $\left(\frac{-5+\sqrt{11}}{2};\frac{10+\sqrt{11}}{2};\frac{4+\sqrt{11}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{11}}{2};\frac{10-\sqrt{11}}{2};\frac{4-\sqrt{11}}{2}\right)$.

Лекция 4
Иррациональные уравнения и неравенства

Уравнение или неравенство, содержащее переменные (неизвестные) под знаком корня или дробной степени, принято называть *иррациональным*.

Например, уравнения $\sqrt{x+3}=x$, $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{3}$, $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-6=0$ — иррациональные, а уравнения $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=x(1+\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{2+\sqrt{2}}x^2+x\sqrt[3]{5}-\sqrt{2}=0$ – нет, поскольку в них *переменные* (неизвестные) не содержатся под знаком корня или дробной степени.

Методы решения иррациональных уравнений
Возведение в степень

Часто используемый «специфический» прием решения иррациональных уравнений — *возведение в степень*. Наиболее распространенный случай — возведение обеих частей уравнения в квадрат.

Заметим, что уравнение $f(x)=g(x)$, вообще говоря, неравносильно уравнению $f^2(x)=g^2(x)$. Действительно:

$$f^2(x)=g^2(x)\ \Leftrightarrow\ f^2(x)-g^2(x)=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)=0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}f(x)-g(x)=0\\ f(x)+g(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x).\end{array}\right.$$

То есть решая уравнение $f^2(x)=g^2(x)$, мы находим корни двух уравнений $f(x)=g(x)$ и $f(x)=-g(x)$. Это означает, что уравнение $f^2(x)=g^2(x)$ является следствием уравнений $f(x)=g(x)$ и $f(x)=-g(x)$. Последнее означает, что среди корней уравнения $f^2(x)=g^2(x)$ содержатся *все* корни уравнения $f(x)=g(x)$, но могут оказаться корни, посторонние для этого уравнения.

То есть если при решении уравнения используется возведение в квадрат, то необходимо делать проверку или рассматривать дополнительные условия, при которых уравнения $f(x) = g(x)$ и $f^2(x) = g^2(x)$ равносильны.

Уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно $f^2(x) = g^2(x)$, в следующих случаях

1) $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

В первом и втором случаях уравнение $f(x) = -g(x)$ не имеет корней, а в третьем — корни уравнений $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$ совпадают.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Если уравнение, обе части которого одновременно неотрицательны (или одновременно неположительны), возвести в квадрат, то получится уравнение, равносильное исходному уравнению.

Или в виде схемы:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0, g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \le 0, g(x) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x).$$

Замечание. В теореме 1 речь идет только об одном преобразовании — возведении в квадрат. Последующие преобразования могут привести к расширению (или сужению) ОДЗ уравнения, что необходимо исследовать отдельно.

Следствие 1. Для уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ получим:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

Следствие 2. Для уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ получим:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \ge 0$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$.

Решение. Возведем исходное уравнение в квадрат. Получим:

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1 \Rightarrow x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3.$$

Выполним проверку:

1) $x = 0$, тогда $\sqrt{1} = -1$, что неверно — корень посторонний;

2) $x = 3$, тогда $\sqrt{3^2 + 5 \cdot 3 + 1} = 2 \cdot 3 - 1$, откуда $\sqrt{25} = 5$, что верно.

Ответ: 3.

Решение примера 1 можно оформить иначе.

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2, \\ 2x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 9x = 0, \\ x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3, \end{array}\right. \\ x \ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Корень уравнения $x = 0$ не удовлетворяет условию $x \ge \frac{1}{2}$.

Пример 2. Решите уравнение $3\sqrt{x + 2} = x + 3$.

Решение.

$$3\sqrt{x + 2} = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 9(x + 2) = (x + 3)^2, \\ x + 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 9 = 0, \\ x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 \pm \sqrt{45}}{2}, \\ x \ge -3. \end{cases}$$

Проверим выполнение условия $x \ge -3$.

1) Неравенство $\dfrac{3 + \sqrt{45}}{2} \ge -3$ очевидно.

2) $\frac{3-\sqrt{45}}{2} \ge -3 \Leftrightarrow 3-\sqrt{45} \ge -6 \Leftrightarrow 9 \ge \sqrt{45}$, неравенство верно, следовательно, оба корня уравнения удовлетворяют условию $x \ge -3$.

Ответ: $x = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2}$.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - x - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2, \\ x^2 - 1 \ge 0. \end{cases}$$

После приведения подобных слагаемых получим уравнение $x^2 + x - 1 = 0$, откуда

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Проверим, выполняется ли условие $x^2 - 1 \ge 0$.

Для этого запишем уравнение $x^2 + x - 1 = 0$ в виде $x^2 - 1 = -x$.

Тогда, так как $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$, $x_1^2 - 1 = -x_1 < 0$, что означает, что корень x_1 — посторонний.

А так как $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$, то $x_2^2 - 1 = -x_2 > 0$, откуда следует, что x_2 — корень исходного уравнения.

Ответ: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Замена переменных

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{x-2} = 8 - x$.

Решение. Пусть $t = \sqrt{x-2}$, тогда исходное уравнение равносильно:

$$\begin{cases} t = 6 - t^2, \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t - 6 = 0, \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

Следовательно, $\sqrt{x-2} = 2$.

Ответ: 6.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$.

Пусть $\sqrt[3]{2+x} = a$, $\sqrt[3]{2-x} = b$, тогда $a^3 + b^3 = 4$ и $a + b = 1$.

Решим систему:

$$\begin{cases} a^2 - ab + b^2 = 4, \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 3ab = 4, \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -1, \\ a + b = 1. \end{cases}$$

Откуда $b = 1 - a$.

После подстановки в первое уравнение: $a^2 - a - 1 = 0$.

Далее, получим: $a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ и $\sqrt[3]{x+2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Возведем обе части последнего уравнения в куб:

$$8(x+2) = (1+\sqrt{5})^3 \Leftrightarrow 8x + 16 = 1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5} \Leftrightarrow x = \sqrt{5}.$$

Аналогично:

$$8(x+2) = (1-\sqrt{5})^3 \Leftrightarrow 8x + 16 = 1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5} \Leftrightarrow x = -\sqrt{5}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{5}$.

Пример 6. Решите уравнение $4x^2 + 5x\sqrt{x+5} = 44(x+5)$.

Решение. Пусть $a = \sqrt{x+5}$, $a \ge 0$.

Уравнение принимает вид:

$$4x^2 + 5ax - 44a^2 = 0.$$

Решаем его относительно x: $D = 25a^2 + 16 \cdot 44a^2 = 729a^2$.

Далее, $x_1 = \frac{-5a + 27a}{8} = \frac{11}{4}a$ и $x_2 = \frac{-5a - 27a}{8} = -4a$.

Рассмотрим случаи:

1) Если $x = -4a$, тогда $x = -4\sqrt{x+5}$, откуда следует, что $x^2 = 16x + 80$ при условии, что $x \le 0$.

Корни квадратного уравнения $x^2 - 16x - 80 = 0$ равны 20 и −4, первый из них — посторонний.

2) Если $x = \frac{11}{4}a$, тогда $4x = 11\sqrt{x+5}$, откуда следует, что

$16x^2 = 121x + 605$ при условии, что $x \ge 0$.

Один из корней квадратного уравнения $16x^2 - 121x - 605 = 0$ равен 11, а другой — отрицателен; следовательно, второй корень — посторонний.

Ответ: 11 и −4.

Пример 7. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 8x + 4} - \sqrt{3x^2 + 6x + 4} = x.$$

Решение. Пусть $\sqrt{3x^2 + 8x + 4} = a$, $\sqrt{3x^2 + 6x + 4} = b$, тогда $a^2 - b^2 = 2x$ и $a - b = x$, откуда $x(a+b) = 2x$.

Рассмотрим случаи:

1) $x = 0$ — корень исходного уравнения;

2) $x \ne 0$, тогда $\begin{cases} a - b = x, \\ a + b = 2, \end{cases}$ и $2a = 2 + x$.

3) Далее, решим уравнение $2\sqrt{3x^2 + 8x + 4} = 2 + x$.

Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 4(3x^2 + 8x + 4) = (2+x)^2, \\ x + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x^2 + 28x + 12 = 0, \\ x + 2 \ge 0. \end{cases}$$

Откуда $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{6}{11}$.

Ответ: 0; −2; $-\frac{6}{11}$.

Пример 8. Решите уравнение

$$\sqrt{x + 8 + 2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x + 1 - \sqrt{x+7}} = 4.$$

Решение. Пусть $y = \sqrt{x+7}$, тогда $y \ge 0$, и уравнение принимает следующий вид:

$$\sqrt{y^2 + 2y + 1} + \sqrt{y^2 - y - 6} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{y^2 - y - 6} = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |y+1| + \sqrt{y^2 - y - 6} = 4.$$

Учитывая, что $y \ge 0$, $\sqrt{y^2 - y - 6} = 3 - y$.

Решим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - y - 6} = 3 - y, \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 6 = (3-y)^2, \\ 3 \ge y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3,$$

откуда $\sqrt{x+7} = 3$.

Ответ: 2.

Три решения одного уравнения

Пример 9. Решите уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 3$.

Решение 1. Возведем обе части уравнения в квадрат и преобразуем полученное уравнение:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 + 2\sqrt{x(x+1)} = 9, \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(x+1)} = 4 - x, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Вновь возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} x^2 + x = x^2 - 8x + 16, \\ 4 - x \ge 0, \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 16, \\ 4 \ge x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{16}{9}.$$

Ответ: $\frac{16}{9}$.

Решение 2. Пусть $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{x+1}$.

Получим систему:

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ b^2 - a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3, \\ b - a = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = \frac{8}{3}, \\ 2b = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, $a = \frac{4}{3}$, откуда $\sqrt{x} = \frac{4}{3}$ и $x = \frac{16}{9}$.

Проверка показывает, что $\frac{16}{9}$ — корень исходного уравнения.

Решение 3. Пусть $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$.

Заметим, что $f(x)$ — возрастающая функция на своей области определения.

Из курса алгебры и начал анализа известно, что возрастающая функция принимает каждое из своих значений только при одном значении аргумента, а следовательно, имеет не более одного корня:

$$f\left(\frac{16}{9}\right)=\sqrt{\frac{16}{9}}+\sqrt{\frac{16}{9}+1}=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=3.$$

Следовательно, $\frac{16}{9}$ — единственный корень исходного уравнения.

Некоторые иррациональные уравнения можно решить, сводя их с помощью той или иной замены к однородным уравнениям, относительно двух переменных.

Пример 10. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(x-2)^2}=2\sqrt[3]{(7+x)^2}+\sqrt[3]{14-5x-x^2}.$$

Решение. Пусть $a=\sqrt[3]{2-x}$, $b=\sqrt[3]{7+x}$, тогда данное уравнение примет вид $a^2=2b^2+ab$, откуда

$$a^2-ab-2b^2=0,\ a_1=-b,\ a_2=2b.$$

В первом случае получаем уравнение $\sqrt[3]{2-x}=-\sqrt[3]{7+x}$, что равносильно уравнению $2-x=-x-7$, которое корней не имеет.

Во втором случае:

$$\sqrt[3]{2-x}=2\sqrt[3]{7+x}\Leftrightarrow 2-x=8x+56\Leftrightarrow 9x=-54\Leftrightarrow x=-6.$$

Ответ: -6.

Примеры решения систем уравнений

Пример 11. Решите систему уравнений $\begin{cases}x+y=10,\\ \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}.\end{cases}$

Решение. Выполним замену $u=\sqrt{\frac{x}{y}}$ в уравнении $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}$.

Получим: $u+\frac{1}{u}=2\frac{1}{2}$, откуда $u_1=2$, $u_2=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим случай $u_1=2$:

$$\begin{cases}x+y=10,\\ \sqrt{\frac{x}{y}}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10,\\ x=4y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2,\\ x=8.\end{cases}$$

Случай $u_2=\frac{1}{2}$ можно рассмотреть аналогично.

Ответ: (2; 8), (8; 2).

Иррациональные неравенства

Напомним, что при решении неравенств используются те же идеи, что и при решении уравнений. Основное отличие: проверка при решении неравенств, как правило, невозможна, и приходится использовать равносильность.

Пример 12. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x^2+2x+3}>0.$$

Решение. Заметим, что $x^2+2x+3>0$ при любых значениях переменной, и умножим на него обе части данного неравенства:

$$\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x^2+2x+3}>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x-2}>0\Leftrightarrow x^2-x-2>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+1)(x-2)>0.$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Возведение в степень

Как и в случае уравнений, наиболее часто встречающийся прием решения иррациональных неравенств — *возведение в степень*.

Чаще всего встречается возведение обеих частей неравенства в квадрат.

Так как функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0;+\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty;0]$, то имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. Если обе части неравенства неотрицательны, то при возведении в квадрат получится неравенство, равносильное исходному.

Или в виде схемы:

$$f(x) > g(x) > 0 \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x).$$

Теорема 3. Если обе части неравенства неположительны, то при возведении неравенства в квадрат и замене знака неравенства на противоположный получится неравенство, равносильное исходному.

Или в виде схемы:

$$f(x) < g(x) < 0 \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x).$$

Приведем схемы решения некоторых основных типов иррациональных неравенств.

1) Неравенство $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$:

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \geq 0.$$

2) Неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

3) Неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 13. Решите неравенство

$$\sqrt{2x - x^2 + 1} > 2x - 3.$$

Решение. Исходное неравенство равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - x^2 + 1 > (2x-3)^2, \\ 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - x^2 + 1 \geq 0, \\ 2x - 3 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x^2 - 14x + 8 < 0, \\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \leq 0, \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{4}{5} < x < 2, \\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 1 + \sqrt{2} \geq x \geq 1 - \sqrt{2}, \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{2} \leq x < 2, \\ 1 - \sqrt{2} \leq x < \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[1 - \sqrt{2}; 2\right)$.

Пример 14. Решите неравенство

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{x+3}.$$

Решение. Так как $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} \geq 0$ и $\sqrt{x+3} \geq 0$, то исходное неравенство равносильно:

$$\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1}\right)^2 > \left(\sqrt{x+3}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 + 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2} > x + 3, \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(x-1)(x-2)} > 6 - x, \\ x - 2 \geq 0, \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(x-1)(x-2)} > 6 - x, \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4(x-1)(x-2) > (6-x)^2, \\ 6 \geq x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1)(x-2) \geq 0, \\ x > 6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases}4(x-1)(x-2) > (6-x)^2,\\ 2 \le x \le 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4(x^2-3x+2) > x^2-12x+36,\\ 2 \le x \le 6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-28>0,\\ 2 \le x \le 6\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{28}{3}} \le x \le 6.$$

Решим вторую систему. Заметим, что при $x > 6$ неравенство $(x-1)(x-2) \ge 0$ выполнено, поэтому $x > 6$.

Ответ: $\left(\sqrt{\frac{28}{3}};+\infty\right)$.

Замена переменных в неравенствах

Пример 15. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-4x} > 1.$$

Решение. Пусть $a=\sqrt{x^2-4x}$, тогда для решения исходного неравенства достаточно решить систему неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+3} > 1+a,\\ a \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+3 > 1+2a+a^2,\\ a \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 > a,\\ a \ge 0.\end{cases}$$

Следовательно, $0 \le \sqrt{x^2-4x} < 1$.

Полученное двойное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}x^2-4x<1,\\ x^2-4x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2-\sqrt{5} < x < 2+\sqrt{5},\\ x(x-4) \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2-\sqrt{5} < x < 2+\sqrt{5},\\ x \ge 4,\ \ x \le 0.\end{cases}$$

Ответ: $(2-\sqrt{5};0] \cup [4;2+\sqrt{5})$.

Пример 16. Решите неравенство

$$\frac{4-3x}{2x-1}+11\sqrt{\frac{3x-4}{2x-1}} > 24.$$

Решение. Пусть $a=\sqrt{\frac{3x-4}{2x-1}}$, тогда для решения исходного неравенства можно решить систему:

$$\begin{cases}11a-a^2 > 24,\\ a \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-3)(a-8) < 0,\\ a \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 3 < a < 8.$$

Далее получим: $9 < \frac{3x-4}{2x-1} < 64$.

Рассмотрим случаи:

1) Если $2x-1>0$, то данное неравенство приводится к системе, не имеющей решений:

$$\begin{cases}18x-9 < 3x-4,\\ 3x-4 < 128x-64,\\ 2x-1 > 0.\end{cases}$$

2) Если $2x-1<0$, то данное неравенство приводится к системе:

$$\begin{cases}18x-9 > 3x-4,\\ 3x-4 > 128x-64,\\ 2x-1 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}15x > 5,\\ 60 > 125x,\\ 2x-1 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > \frac{1}{3},\\ \frac{12}{25} > x,\\ x < \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{12}{25}.$$

Ответ: $(\frac{1}{3};\ \frac{12}{25})$.

Два решения одного неравенства

Пример 17. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-3x+6} \le 3x-4.$$

Решение 1. Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}x^2-3x+6 \le (3x-4)^2,\\ x^2-3x+6 \ge 0,\\ 3x-4 \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x^2-21x+10 \ge 0,\\ x \ge \frac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}8(x-2)(x-\frac{5}{8}) \ge 0,\\ x \ge \frac{4}{3}.\end{cases}$$

Условие $x^2 - 3x + 6 \ge 0$ можно не учитывать, поскольку оно выполнено для всех x.

Первое неравенство системы выполнено, если $x \ge 2$ и $x \le \frac{5}{8}$.

Далее рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} x \ge 2, \\ x \ge \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$; 2) $\begin{cases} x \le \frac{5}{8}, \\ x \ge \frac{4}{3} \end{cases}$ — противоречие.

Ответ: $[2; +\infty)$.

Решение 2. Решим данное неравенство методом интервалов.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 6} - 3x + 4$.

1) $D(f) = R$, поскольку $x^2 - 3x + 6 \ge 0$ для любого x;

2) функция $f(x)$ – непрерывна на R;

3) найдем корни уравнения $f(x) = 0$.

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 6 = (3x - 4)^2, \\ 3x - 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 21x + 10 = 0, \\ x \ge \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Получаем единственный корень $x = 2$. Таким образом, $f(x)$ сохраняет знак на промежутках $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$.

Определим знак $f(x)$ на каждом из указанных промежутков:

1) $f(x) > 0$ на $(-\infty; 2)$, так как $f(0) = \sqrt{6} + 4 > 0$;

2) $f(x) < 0$ на $(2; +\infty)$, так как

$$f(3) = \sqrt{27 - 9 + 6} - 9 + 4 = \sqrt{24} - 5 < 0.$$

Ответ: $[2; +\infty)$.

Напомним, что метод интервалов сводит решение неравенства к решению уравнения.

Какой из этих методов лучше? Выбор за вами.

Еще несколько примеров

Пример 18. Решите неравенство $\sqrt{2 + x - x^2} > x - 3$.

Решение. Можно решать «как обычно», а можно использовать ОДЗ:

$$\text{ОДЗ: } 2 + x - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2.$$

Но при этих значениях x правая часть исходного неравенства отрицательна, и следовательно, неравенство выполнено.

Ответ: $[-1; 2]$.

Пример 19. Решите неравенство $\sqrt[3]{2x + 4} + \sqrt[3]{x - 3} > 1$.

Решение. Заметим, что $f(x) = \sqrt[3]{2x + 4} + \sqrt[3]{x - 3}$ возрастает, и $f(2) = 1$. Следовательно, для любого $x > 2$, $f(x) > f(2) = 1$. Аналогично, для любого $x < 2$, $f(x) < f(2) = 1$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

Уравнения и неравенства с модулем

Решая уравнения и неравенства с модулем, нередко используют приемы, напоминающие приемы решения иррациональных уравнений и неравенств.

Так, уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно $f^2(x) = g^2(x)$, поскольку $|f(x)| \ge 0$ и $|g(x)| \ge 0$, то равносильно совокупности уравнений $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$.

Или в виде схемы:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right.$$

Пример 20. Решите уравнение

$$|x - 6| = |x^2 - 2x|.$$

Решение.

$$|x - 6| = |x^2 - 2x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 6 = x^2 - 2x \\ 6 - x = x^2 - 2x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 6 = 0 \\ x^2 - x - 6 = 0. \end{array} \right.$$

Первое уравнение системы корней не имеет.

Ответ: –2; 3.

Встречается и такая схема:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \end{cases}$$

над ее обоснованием подумайте самостоятельно.

Пример 21. Решите уравнение

$$|x^2 - 6| = 4 - x.$$

Решение.

$$|x^2 - 6| = 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 6 = 4 - x \\ x^2 - 6 = x - 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \ge x, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 10 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

Корни первого уравнения: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}$, корни второго: −1 и 2.

Все корни удовлетворяют условию $4 - x \ge 0$.

Ответ: −1; 2; $\dfrac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Пример 22. Решите уравнение

$$x^2 + 3x + |x + 3| = 0.$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $x \ge -3$, тогда данное уравнение равносильно уравнению $x^2 + 4x + 3 = 0$, которое имеет корни −3 и −1. Оба корня удовлетворяют условию $x \ge -3$.

2) $x < -3$, тогда $x^2 + 2x - 3 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Оба корня не удовлетворяют условию $x < -3$.

Заметим, что в каждом случаев неравенство — это условие, при котором исходное уравнение с модулем превращается в уравнение без модуля. Типичная ошибка — школьники и абитуриенты «забывают» воспользоваться этим условием.

Ответ: −3 и −1.

При решении некоторых уравнений можно избежать полного перебора.

Пример 23. Решите уравнение

$$|x - 2| + |x - 1| = x - 8.$$

Решение. Заметим, что $|x - 2| + |x - 1| \ge 0$, следовательно, $x \ge 8$ и исходное уравнение равносильно уравнению $(x - 2) + (x - 1) = x - 8$, откуда $x = -5$, что противоречит условию $x \ge 8$.

Ответ: нет корней.

При решении следующего уравнения может быть полезной геометрическая интерпретация модуля $|a - b|$ как расстояния на координатной прямой между точками с координатами a и b.

Пример 24. Решите уравнение

$$|x^2 - 4| + |x^2 - 1| = 3.$$

Решение. На геометрическом языке: требуется найти точки с координатами x^2 такие, что сумма расстояний от этих точек до точек с координатами 4 и 1 равна 3. Из рисунка видна, что эти точки расположены на отрезке [1; 4].

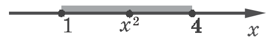

Рис. 12

Следовательно, $1 \le x^2 \le 4$.

Ответ: $[-2;-1] \cup [1;2]$.

Иногда к уравнениям с модулем сводятся иррациональные уравнения.

Пример 25. Решите уравнение

$$\sqrt{x(x-2)+1} + \sqrt{x(x+2)+1} = 2.$$

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow |x - 1| + |x + 1| = 2.$$

Ответ: [−1; 1].

Схемы решения неравенств с модулем аналогичны схемам решения соответствующих уравнений, так неравенство $|f(x)| > |g(x)|$ равносильно неравенству $f^2(x) > g^2(x)$.

Пример 26. Решите неравенство

$$|x - 5| > |x + 1|.$$

Решение.

$$|x-5|>|x+1| \Leftrightarrow (x-5)^2>(x+1)^2 \Leftrightarrow (x-5)^2-(x+1)^2>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -6(2x-4)>0 \Leftrightarrow x<2.$$

Ответ: $(-\infty;2)$.

Подумайте над обоснованием следующих схем решения неравенств:

$$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f^2(x)>g^2(x) \end{cases} \\ g(x)\le 0 \end{array}\right. \text{ и } |f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f^2(x)<g^2(x). \end{cases}$$

Пример 27. Решите неравенство

$$|x^2-2x|\le x-1.$$

Решение.

$$|x^2-2x|\le x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0, \\ \left(x^2-2x\right)^2-(x-1)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ (x^2-x-1)(x^2-3x+1)\le 0. \end{cases}$$

Далее воспользуйтесь методом интервалов.

Ответ: $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Нередко при решении неравенств с модулем применяют разбор случаев.

Пример 28. Решите неравенство

$$2|x-4|+|3x+5|\ge 16.$$

Решение. Рассмотрим три случая:

$$1)\ \begin{cases} x<-\dfrac{5}{3}, \\ 2(4-x)-(3x+5)\ge 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{5}{3}, \\ -5x+3\ge 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{5}{3}, \\ x\le -\dfrac{13}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x\le -\frac{13}{5};$$

$$2)\ \begin{cases} -\dfrac{5}{3}\le x<4, \\ 2(4-x)+(3x+5)\ge 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{3}\le x<4, \\ x\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le x<4;$$

$$3)\ \begin{cases} x\ge 4, \\ 2(x-4)+(3x+5)\ge 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4, \\ x\ge \dfrac{19}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 4.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{13}{5}\right]\cup[3;+\infty)$.

При решении неравенств с модулем может применяться метод интервалов для непрерывных функций.

Пример 29. Решите неравенство $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\le 1$.

Решение. Пусть $f(x)=\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|-1$, тогда $D_f=(-\infty;-2)\cup$ $\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

Решим уравнение $f(x)=0$. Получим:

$$\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|=1 \Leftrightarrow |x^2-5x+4|=|x^2-4| \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x+4=x^2-4 \\ x^2-5x+4=4-x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=8 \\ 2x^2-5x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{8}{5} \\ x=0 \\ x=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Осталось установить знак $f(x)$ на промежутках: $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;\frac{8}{5})$, $(\frac{8}{5};2)$, $(2;\frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2};+\infty)$.

Ответ: $\left[0;\dfrac{8}{5}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2};\infty\right)$.

Метод замены множителей

Рассмотрим пример применения метода замены множителей для иррациональных неравенств и неравенств с модулем.

Воспользуемся тем, что $y = x^2$ возрастает на промежутке $(0;+\infty)$, а убывает на промежутке $(-\infty;0)$,

Следовательно, если $a > 0$, $b > 0$, то знак выражения $a^2 - b^2$ совпадает со знаком $a - b$. Аналогично, если $a < 0$, $b < 0$, то знак выражения $a^2 - b^2$ совпадает со знаком $b - a$.

Пример 30. Решите неравенство

$$\frac{\left(|x-1|-4-x^2\right)\left(|x+4|-\sqrt{x^2-x-2}\right)}{\left(|1-x|-4\right)\left(|3+x|-|x-5|\right)} > 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно:

$$\begin{cases} \dfrac{\left((x-1)^2-\left(4+x^2\right)^2\right)\left((x+4)^2-(x^2-x-2)\right)}{\left((1-x)^2-16\right)\left((3+x)^2-(x-5)^2\right)} > 0, \\ x^2-x-2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(x^2+x+3\right)\left(x-x^2-5\right)\left(7x+14\right)}{(5-x)(-3-x)(2x-2)8} > 0, \\ x^2-x-2 \ge 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $x^2 + x + 3 > 0$, $x - x^2 - 5 < 0$ при всех действительных значениях x, получим равносильную систему

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{(5-x)(3+x)(x-1)} > 0, \\ (x+1)(x-2) \ge 0. \end{cases}$$

Если теперь $x \ge 2$, то система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5-x} > 0, \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 > x, \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x < 5.$$

Если же $x \le -1$, то $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3+x} < 0, \\ x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < -2$.

Ответ: $(-3;-2) \cup [2;5)$.

Упражнения для самостоятельной работы

Решите уравнение, предварительно исследовав ОДЗ.

1. $\sqrt{x^2+x-6} + 2\sqrt{x} = \sqrt{2-x} + 2$.

Решите уравнение методом замены (2–4).

2. $\sqrt{7x+2} + \sqrt{7x-3} = \sqrt{5x+4} + \sqrt{5x-1}$.

3. $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

4. $x^2 + 11 + \sqrt{x^2+11} = 42$.

Решите уравнение (5–13).

5. $\sqrt{2x-x^2} = x-1$.

6. $\sqrt{5-2x} + \sqrt{x-1} = 2$.

7. $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$.

8. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$.

9. $(x+1)(x+4) - \sqrt{3x^2+5x+2} = 6$.

10. $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

11. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

12. $|1-2x| = 3x-2$.

13. $|x-3| - |x-2| = 5$.

14. $|3x+4| + 2|x-3| = 16$.

Найдите и исправьте ошибки в решении уравнения (15–16).

15. *Решение.* $(x^2-4)\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4=0 \\ \sqrt{x+1}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Ответ: $\pm 2; -1$.

16. *Решение.*

$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = (x+5)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(\sqrt{x-1} - (x+5)\sqrt{\frac{1}{x-1}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=0 \\ \left(\sqrt{x-1}-(x+5)\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \sqrt{x-1}=(x+5)\sqrt{\dfrac{1}{x-1}} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \left(\sqrt{x-1}\right)^2=x+5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x-1=x+5. \end{array}\right.$$

Ответ: -1.

Решите неравенство методом интервалов (17–18).

17. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1$. **18.** $\dfrac{|2x-1|}{x^2-x-2}>\dfrac{1}{2}$.

Решите неравенство (19–23).

19. $\sqrt{4+3x-x^2}>-2$. **20.** $\sqrt{x^2-5x-24}>x-2$.

21. $(x-3)\cdot\sqrt{(2-x)(x-5)}\ge 0$.

22. $\left||2x-1|-3\right|>3$. **23.** $\left|x^2-5x+9\right|<|x-6|$.

24. $|x-2|+|x+4|<10$.

Ответы, указания, решения

1. 2. **2.** 1. **3.** 1; 2; 10. **4.** ± 5 .**5.** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\dfrac{10}{9}$; 2. **7.** 10. **8.** 0. **9.** 2; —7. **10.** (3; 2), (2; 3). **11.** [5; 10]. **12.** 1. **13.** $(-\infty;-2)$. **14.** $-\dfrac{14}{5}$; $\dfrac{18}{5}$.

15. *Указание*. Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из его сомножителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл. Число -2 не является корнем уравнения, так как при $x=-2$ выражение $\sqrt{x+1}$ не имеет смысла. **16.** При переходе от выражения $\sqrt{(x+1)(x-1)}$ к выражению $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$ сужается ОДЗ, в результате чего потерян корень -2. Правильно рассмотреть два случая: $x>1$ и $x<1$. В уравнении фактически рассмотрен первый случай. Во втором случае уравнение принимает вид $\sqrt{-x-1}\left(\sqrt{1-x}-(x+5)\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}\right)=0$. **17.** $\left[-\dfrac{1}{2\sqrt{2}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

18. $(-4;-1)\cup(2;5)$. **19.** $[-1;\ 4]$. **20.** $(-\infty;-3]$. **21.** $\{2\}\cup[3;5]$.

22. $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(3;+\infty)$. **23.** (1; 3) .**24.** [−6; 4]. *Указание*. Воспользуйтесь геометрической интерпретацией.

Литература

1. *Башмаков М.И.* Уравнения и неравенства. — М.: Наука, 1971.

2. *Блох А.Ш., Трухан Т.Л.* Неравенства. — Минск: Народная асвета, 1972. — 222 с.

3. *Дорофеев Г.В., Муравин Г.К., Седова Е.А.* Подготовка к письменному экзамену за курс средней школы: Решение задач с методическими комментариями. — 2-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2001.

4. *Кисунько А.Г., Головин Ю.О.* Алгебраические уравнения. — М.: Издательство МИРЭА, 2002.

5. *Колосов В.А.* Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. — М.: Гелиос АРВ, 2001.

6. *Кравцев С.В., Макаров Ю.Н., Максимов В.Ф.* и др. Методы решения задач по алгебре. — М.: Экзамен, 2003.

7. *Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Задачник-практикум по математике. Алгебра. Тригонометрия. — М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Издательство «Мир и Образование», 2005.

8. *Ляпин С.Е., Баранова И.В., Борчугова З.Г.* Сборник задач по элементарной алгебре. — М.: Просвещение, 1973.

9. *Моденов В.П.* Математика для школьников и абитуриентов. — М.: ИКИ, Наука, Физматлит, 2002.

10. *Мордкович А.Г.* Беседы с учителями математики: Учебно-методическое пособие. — 2-е изд., доп. и перераб. — М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Издательство «Мир и образование», 2005.

11. *Петров К.* Сборник задач по алгебре: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1984.

12. *Сивашинский И.Х.* Неравенства в задачах. — М.: Наука, 1967.

13. *Ткачук В.В.* Математика абитуриенту. — 12-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство МЦНМО, 2005. — 944 с.

14. *Шабунин М.И.* Математика для поступающих в вузы. Неравенства и системы неравенств. — М.: Аквариум, 1997.

Содержание