И.М. СМИРНОВА, В.А. СМИРНОВ

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

В брошюре собраны комбинаторные задачи по геометрии, предназначенные для учащихся с седьмого по одиннадцатый классы, направленные на формирование комбинаторных представлений и развитие комбинаторного мышления школьников.

В последнее время интерес к комбинаторике в школьном курсе математики заметно возрос. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей включены в новые стандарты по математике для основной и профильной школ. Формирование комбинаторных представлений и развитие комбинаторного мышления школьников входит в число основных целей обучения математике.

Однако обычно, когда говорят об элементах комбинаторики, имеют в виду задачи алгебраического содержания. Здесь мы рассмотрим комбинаторные задачи по геометрии, решением которых можно заниматься, начиная с седьмого и по одиннадцатый класс. Часть из них имеется в учебниках геометрии:

1. И.М.Смирнова, В.А.Смирнов. Геометрия: Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2015.
2. И.М.Смирнова, В.А.Смирнов. Геометрия: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2015.

1. Точки и прямые на плоскости

Одной из первых аксиом геометрии, относящейся к взаимному расположению точек и прямых на плоскости, является аксиома о том, что через любые две точки плоскости проходит единственная прямая. Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием сложности.

1.1. Сколько прямых проходит через различные пары из трех точек, не лежащих на одной прямой?

Ответ: 3.

1.2. Сколько прямых проходит через различные пары из четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

Ответ: 6.

1.3. Сколько прямых проходит через различные пары из пяти точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

Ответ: 10.

1.4. Сколько прямых проходит через различные пары из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? Укажите способ построения таких точек.

Решение. Пусть A_1, …, A_n – n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Для построения таких точек достаточно отметить их на окружности.

Выясним, сколько прямых проходит через точку A_1 и оставшиеся точки. Так как число оставшихся точек равно n – 1 и через каждую из них и точку A_1 проходит одна прямая, то искомое число прямых будет равно n – 1. Заметим, что рассуждения, проведенные для точки A_1, справедливы для любой точки. Поскольку всего точек n и через каждую из них проходит n – 1 прямая, то число посчитанных прямых будет равно $n(n-1)$. Конечно, этот ответ, который могут дать учащиеся, не является верным. Например, при $n = 3$ получаем $n(n-1) = 6$, а число прямых на самом деле равно 3. Хорошо, если учащиеся сами догадаются, что при указанном выше подсчете мы каждую прямую посчитали дважды и поэтому число прямых, проходящих через различные пары из n данных точек, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Полученная формула числа прямых имеет большое значение, в дальнейшем будет появляться при решении различных комбинаторных задач. Поскольку каждая прямая однозначно задается двумя точками, мы, по существу, вычислили, сколько различных пар можно составить из n элементов. При этом не имеет значение, какие это элементы. Число таких пар называется числом сочетаний из n элементов по два и обозначается C_n^2. Например, если в классе 20 учеников, то число различных пар, которые можно образовать из учеников этого класса, равно $C_{20}^2 = 190$.

Следующая серия задач связана с числом попарных пересечений прямых на плоскости. Из сформулированной выше аксиомы непосредственно следует, что две прямые могут иметь не более одной общей точки.

Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием сложности.

1.5. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь три прямые?

Ответ: 3.

1.6. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь четыре прямые?

Ответ: 6.

1.7. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь пять прямых?

Ответ: 10.

1.8. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых? Укажите способ построения таких прямых.

Решение. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая прямая пересекается с каждой, и при этом никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Пример построения попарно пересекающихся прямых показан на рисунке 1.

Рис. 1

В этом случае каждая прямая имеет n – 1 точку пересечения с остальными прямыми, и мы находимся в ситуации, аналогичной ситуации задачи 1.4. Так как всего прямых n, и на каждой прямой n – 1 точка, то их общее число будет равно $n(n$ – 1). При этом, поскольку каждую точку мы подсчитали дважды, число точек пересечения будет равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Можно было бы рассуждать и короче. Действительно, для того, чтобы подсчитать количество точек пересечения, достаточно подсчитать, количество пар прямых, которые можно образовать из данных n прямых. Как мы знаем, это число равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Обратим внимание на то, что формулировка и решение задачи 1.8 похожи на формулировку и решение задачи 1.4.

Действительно, переформулируем утверждения этих задач.

Утверждение 1.4. Число прямых, проходящих через различные пары из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Утверждение 1.8. Число точек попарных пересечений n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Мы видим, что если слово "прямая" в утверждении 1.4* заменить на слово "точка", слово "точка" – на слово "прямая", прохождение прямой через две точки заменить на пересечение двух прямых, и принадлежность трех точек прямой – на пересечение трех прямых в одной точке, то получим утверждение 1.8*. Это же относиться и к доказательствам этих утверждений. Одно получается из другого указанной выше заменой. Такая аналогия называется двойственностью между точками и прямыми.

Еще одной аксиомой, относящейся к взаимному расположению прямых на плоскости, является аксиома о том, что прямая разбивает плоскость на две части. При этом, если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой, а если точки принадлежат одной части, то отрезок, их соединяющий, не пересекается с прямой.

Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием сложности.

1.9. На сколько частей разбивают плоскость две пересекающиеся прямые?

Ответ: 4.

1.10. На сколько частей разбивают плоскость три прямые, пересекающиеся в одной точке?

Ответ. 6.

1.11. На сколько частей разбивают плоскость три попарно пересекающиеся прямые, не пересекающиеся в одной точке?

Ответ: 7.

1.12. На сколько частей разбивают плоскость четыре попарно пересекающиеся прямые, никакие три из которых не пересекающиеся в одной точке?

Ответ: 11.

1.13. На сколько частей разбивают плоскость n прямых, пересекающихся в одной точке?

Ответ. $2n$.

1.14. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекающиеся в одной точке?

Решение. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой прямой к данным. Это увеличение происходит за счет того, что какие-то части плоскости разбиваются новой прямой на меньшие части. Так, если имелось две пересекающиеся прямые, то при добавлении третьей прямой три из имеющихся четырех частей плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно 7 = 4 + 3. Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой прямой, равно количеству частей новой прямой, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися прямыми. Каждая такая часть новой прямой разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Поскольку n-я прямая пересекается с n – 1 прямой, то она разбивается на n частей и поэтому число частей плоскости увеличивается на n. Таким образом, общее число частей, на которые n прямых разбивают плоскость, равно 4 + 3 + … + n.

Нахождение формулы для этой суммы может быть проведено чисто геометрическими методами. Укажем на один из них, позволяющий найти сумму 1 + 2 + … + n.

Рассмотрим квадрат (n + 1) х (n + 1). Число его клеток равно $(n + 1)^2$. Подсчитаем эти клетки по диагоналям. В первой диагонали имеется одна клетка. Во второй диагонали – 2. И так далее, в n-ой диагонали – n. Таким образом, общее число клеток в диагоналях, расположенных ниже (n + 1)– ой (большой) диагонали, равно 1 + 2 + … + n. Аналогично, общее число клеток в диагоналях, расположенных выше (n + 1)– ой (большой) диагонали, равно 1 + 2 + … + n. Поскольку в большой диагонали (n + 1) клеток, то общее число клеток в квадрате, подсчитанное по диагоналям равно 2(1 + 2 + … + n) + (n + 1). Следовательно, имеем равенство 2(1 + 2 + … + n) + (n + 1) = $(n + 1)^2$, из которого получаем

$$1+2+...+n=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}=\frac{(n+1)n}{2}.$$

Используя эту формулу, находим искомое число частей

$$4 + 3 +\ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}+1.$$

2. Окружности

Вместо прямых на плоскости можно рассмотреть окружности и выяснить количество их точек пересечения.

2.1. Какое наибольшее число точек пересечения могут иметь две окружности?

Учащиеся изображают в тетради две окружности и выясняют, что наибольшее число точек пересечения равно 2.

2.2. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь три окружности?

Решение аналогично предыдущему. Ответ: 6.

2.3. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь четыре окружности?

Решение аналогично предыдущему. Ответ: 12.

2.4. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n окружностей? Укажите способ построения таких окружностей.

Решение. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая окружность пересекается с каждой, и при этом никакие три окружности не пересекаются в одной точке. В этом случае каждая окружность имеет $2(n-1)$ точку пересечения с остальными окружностями. Число точек попарных пересечений будет равно $2 + 4 + 6 +\ldots+ 2(n-1) = n(n-1)$. Нетрудно доказать, что для любого $n > 1$ существует n попарно пересекающихся окружностей. Например, на рисунке 2 приведены пять попарно пересекающихся окружностей.

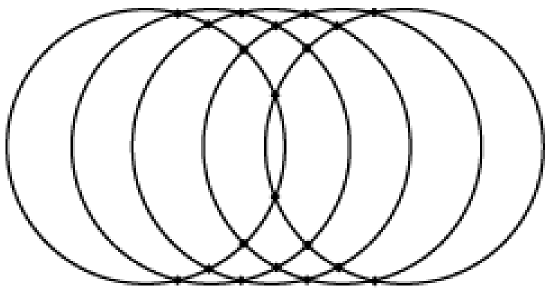


Рис. 2

Выясним теперь, на сколько частей окружности разбивают плоскость.

2.5. На сколько частей разбивают плоскость две пересекающиеся окружности?

Учащиеся изображают в тетради две пересекающиеся окружности и выясняют, что число частей плоскости равно 4.

2.6. На сколько частей разбивают плоскость три попарно пересекающиеся окружности, не пересекающиеся в одной точке?

Решение аналогично предыдущему. Ответ: 8.

2.7. На сколько частей разбивают плоскость четыре попарно пересекающиеся окружности, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Решение аналогично предыдущему. Ответ: 14.

2.8. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся окружностей, никакие три из которых не пересекающиеся в одной точке?

Решение. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой окружности к данным. Это увеличение происходит за счет того, что какие-то части плоскости разбиваются новой окружностью на меньшие части. Так, если имелось две пересекающиеся окружности, то при добавлении третьей окружности все четыре части плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно 8 = 4 + 4. При добавлении четвертой окружности шесть частей плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно 14 = 8 + 6. Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой окружностью, равно количеству дуг новой окружности, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися окружностями. Каждая такая дуга новой окружности разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Поскольку n-я окружность пересекается с $n – 1$ окружностью, то она разбивается на $2(n – 1)$ дуг и поэтому число частей плоскости увеличивается на $2(n – 1)$. Таким образом, общее число частей, на которые n окружностей разбивают плоскость, равно $4 + 4 + 6 + … + 2(n – 1) = 2(2 + 2 + 3 + … + (n – 1) = n(n – 1) + 2$.

3. Многоугольники

При изучении многоугольников и их общих свойств учащимся можно предложить следующие комбинаторные задачи.

3.1. Сколько диагоналей имеет четырехугольник?

Непосредственной проверкой убеждаемся, что число диагоналей равно 2.

3.2. Сколько диагоналей имеет пятиугольник?

Решение аналогично предыдущему. Число диагоналей равно 5.

3.3. Сколько диагоналей имеет шестиугольник?

Решение аналогично предыдущему. Число диагоналей равно 9.

3.4. Сколько диагоналей имеет n-угольник?

Решение. Зафиксируем какую-нибудь вершину n-угольника. Учитывая, что диагональю является отрезок, соединяющий не соседние вершины многоугольника, получаем, что через данную вершину проходит $n – 3$ диагонали. Поскольку общее число вершин равно n, через каждую из них проходит $n – 3$ диагонали, и при таком подсчете каждая диагональ считается дважды, получаем, что общее число диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

Приведем еще несколько комбинаторных задач на многоугольники.

3.5. Может ли многоугольник иметь: а) 10 диагоналей; б) 20 диагоналей; в) 30 диагоналей.

Решение. По результатам задачи 3.4 шестиугольник имеет 9 диагоналей, семиугольник – 14; восьмиугольник – 20; девятиугольник – 27; десятиугольник 35. Ясно, что многоугольники с большим числом сторон имеют большее число диагоналей. Поэтому многоугольник может иметь 20 диагоналей и не может иметь 10 или 30 диагоналей.

3.6. Существуют ли многоугольники, у которых число диагоналей равно числу сторон?

Решение. Один из такой многоугольник был рассмотрен в задаче 3.2. Покажем, что он единственен. Действительно, если число диагоналей n-угольника равно числу его сторон, то выполняется равенство $\frac{n(n-3)}{2}=n,$ из которого непосредственно следует, что $n = 5$.

3.7. Может ли прямая пересекать все стороны треугольника?

Ответ: Нет.

Для доказательства воспользуемся аксиомой геометрии о том, что каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части. При этом если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой. Если две точки принадлежат одной части, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с прямой.

Пусть прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC. Тогда точки A и B лежат по разные стороны от этой прямой. Точки A и C также лежат по разные стороны. Поэтому точки B и C лежат по одну сторону и, следовательно, отрезок BC не пересекается с этой прямой.

3.8. Может ли прямая пересекать все стороны четырехугольника?

Ответ: Да. Пример приведен на рисунке 3.

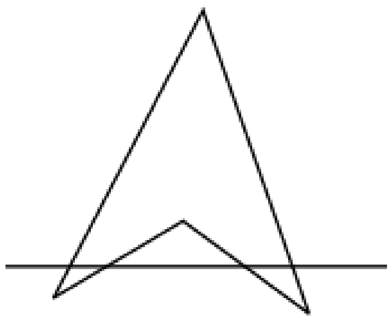


Рис. 3

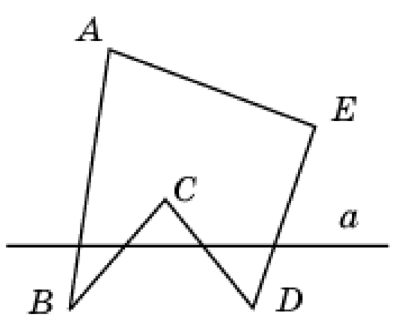


Рис. 4

3.9. Может ли прямая пересекать все стороны пятиугольника?

Ответ: Нет. Пусть *ABCDE* – пятиугольник и прямая *a* пересекает его стороны *AB, BC, CD* и *DE* (рис. 4). Покажем, что прямая *a* не пересекает сторону *AE*. Действительно, точки *A* и *B, B* и *C, C* и *D, D* и *E* лежат по разные стороны от прямой *a*. Следовательно, точки *A* и *E* лежат по одну сторону. Поэтому отрезок *AE* не пересекается с прямой *a*.

3.10. Может ли прямая пересекать все стороны $2n$-угольника?

Ответ: Да, пример приведен на рисунке 2.

3.11. Может ли прямая пересекать все стороны $(2n + 1)$-угольника?

Докажем более общее утверждение о том, что прямая может пересекать только четное число сторон многоугольника.

Пусть прямая *l* пересекает стороны многоугольника. Условимся называть одну из полуплоскостей, на которые прямая *l* разбивает плоскость, – верхней, а другую – нижней. Совершим обход ломаной, ограничивающей этот многоугольник, выйдя из некоторой ее точки верхней полуплоскости, и вернувшись в ту же точку (рис. 5). Если по пути нам встретится точка пересечения с прямой *l*, то проходя через эту точку мы перейдем из верхней полуплоскости в нижнюю. Однако в нижней полуплоскости мы не можем остаться до конца обхода, поскольку в конце обхода мы возвращаемся в начальную точку верхней полуплоскости. Следовательно, где-то мы выйдем из нижней полуплоскости в верхнюю. Вход в нижнюю полуплоскость и выход из нее в верхнюю дают пару точек пересечения с прямой *l*. Если при дальнейшем движении по ломаной мы все время остаемся в верхней полуплоскости, то общее число точек пересечения будет равно двум. Если в какой-то точке мы снова перейдем из верхней полуплоскости в нижнюю, то найдется и парная ей точка, в которой мы из нижней полуплоскости переходим в верхнюю. Таким образом, число точек пересечения прямой *l* со сторонами многоугольника должно быть четным.

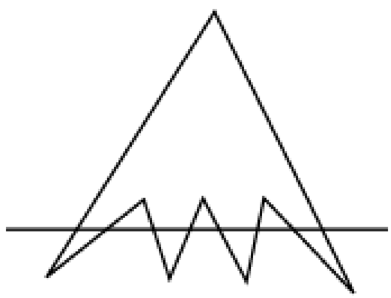


Рис. 5

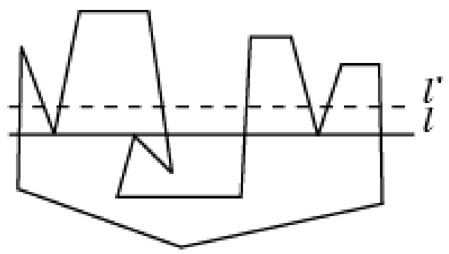


Рис. 6

3.12. Прямая имеет с простой замкнутой ломаной 2005 общих точек. Доказать, что найдется прямая, имеющая с этой ломаной большее число общих точек.

Решение. В силу предыдущей задачи, прямая должна пройти через нечетное число вершин ломаной (рис. 6). Немного сдвинем эту прямую, как показано на рисунке. Число общих точек прямой и ломаной при этом увеличится.

3.13. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная с пятью сторонами?

Решение. Каждая сторона ломаной может пересекаться только с не соседними сторонами. Таких сторон у пятисторонней ломаной две. Значит, число точек самопересечения не превосходит $\frac{5\cdot 2}{2}=5$. Пример замкнутой пятисторонней ломаной с пятью точками самопересечения дает пентаграмма (рис. 7).

3.13. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная с $(2n + 1)$-ой стороной? Приведите примеры для $n = 3$, $n = 4$.

Решение аналогично решению предыдущей задачи.

Ответ. $(2n + 1)(n - 2)$. Примеры ломаных приведены на рисунке 8.

3.14. Может ли общей частью (пересечением) двух треугольников быть: а) треугольник; б) четырехугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник; д) семиугольник?

Ответ. а), б), в), г) Да; д) нет.

3.15. Может ли общей частью (пересечением) треугольника и четырехугольника быть восьмиугольник?

Ответ. Да.

3.16. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь стороны двух выпуклых: а) треугольников; б) четырехугольников; в) пятиугольников; г) n-угольников?

Ответ. а) 6; б) 8; в) 10; г) $2n$ (см. рис. 9).

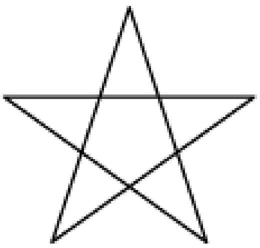


Рис. 7

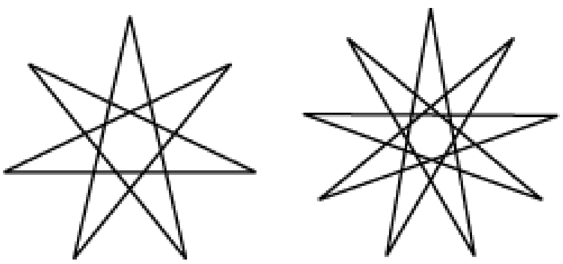


Рис. 8

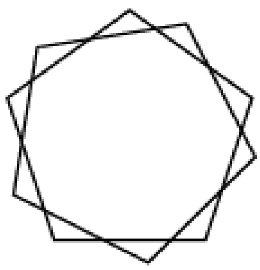


Рис. 9

3.17. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

Решение. Каждому внутреннему острому углу выпуклого многоугольника соответствует тупой внешний угол. Поскольку сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°, то тупых углов, а следовательно, и острых внутренних углов, не может быть больше трех.

3.18. Докажите, что в любом выпуклом 11-угольнике найдутся две диагонали, угол между которыми не превосходит 5°.

Решение. Согласно задаче 16 выпуклый 11-угольник имеет 44 диагонали. Проведем через фиксированную точку плоскости 44 прямых, параллельных этим диагоналям. Они разделяют угол в 360° на 88 частей, наименьшая из которых не превосходит $360°/88<5°$.

3.19. Сколькими различными способами треугольник можно вписать в: а) квадрат; б) пятиугольник; в) n-угольник? (Треугольник называется вписанным в многоугольник, если вершины треугольника являются вершинами многоугольника.)

Ответ. а) 4; б) 10; в) $n(n-3)$.

3.20. В правильном пятиугольнике проведи все диагонали. Сколько треугольников при этом образовалось.

Ответ. 35.

4. Задачи на разрезание

Задачи на разрезание традиционно используются при проведении кружков и факультативных занятий, включаются в конкурсы и турниры по математике. Они формируют геометрические представления учащихся о площади и ее свойствах, развивают практические навыки, воспитывают интерес к обучению геометрии.

Здесь мы предлагаем несколько задач на разрезание, первые из которых иллюстрируют вывод формул площади параллелограмма, треугольника, трапеции.

4.1. Параллелограмм разрежьте на две части, из которых можно сложить прямоугольник.

Решение показано на рисунке 9.

Рис. 9

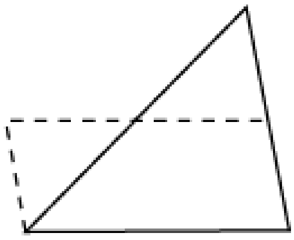


Рис. 10

4.2. Треугольник разрежьте на две части, из которых можно сложить параллелограмм.

Решение показано на рисунке 10.

4.3. Трапецию разрежьте на две части, из которых можно сложить треугольник.

Решение показано на рисунке 11.

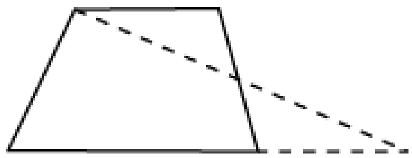


Рис. 11

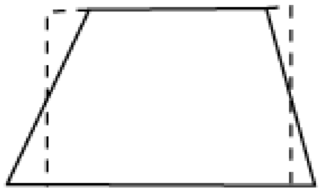


Рис. 12

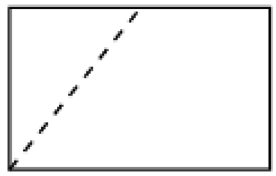


Рис. 13

4.4. Трапецию разрежьте на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

Решение показано на рисунке 12.

4.5. Данный прямоугольник разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить: а) треугольник; б) параллелограмм; в) трапецию.

Решение показано на рисунке 13.

4.6. Правильный шестиугольник разрежьте на две части, из которых можно составить параллелограмм.

Решение показано на рисунке 14.

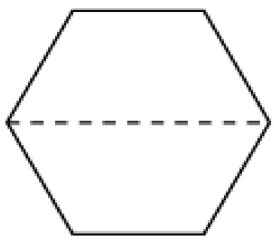


Рис. 14

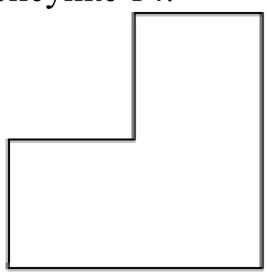


Рис. 15

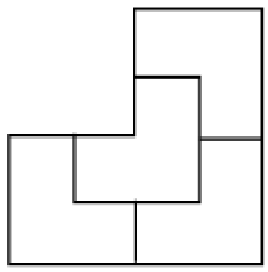


Рис. 16

Следующие задачи более сложные.

4.7. Разрежьте изображенную на рисунке 15 фигуру, составленную из трех квадратов, на четыре равные части.

Решение. Представим данную фигуру, составленной из 12 квадратиков. Каждая из трех искомых частей должна состоять из трех таких квадратиков. Соответствующие разрезы показаны на рисунке 16.

4.8. Греческий крест (рис. 17) разрежьте на несколько частей и составьте из них квадрат.

Решение. Заметим, что если стороны квадратов, из которых составлен греческий крест, равны 1, то сторона искомого квадрата равна $\sqrt{5}$. Требуемое разрезание показано на рисунке 18.

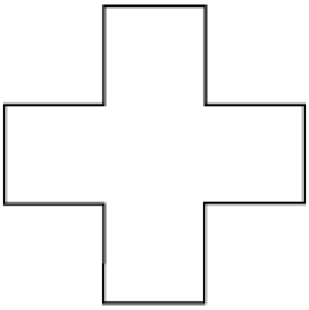


Рис. 17

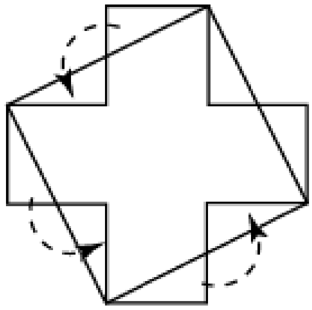


Рис. 18

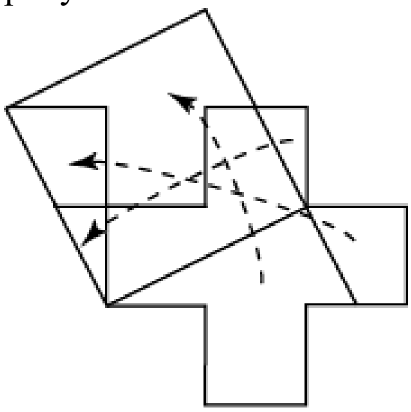


Рис. 19

4.9. Греческий крест разрежьте двумя разрезами и составьте из полученных частей квадрат.

Решение показано на рисунке 19.

4.10. Шестиугольник, изображенный на рисунке 20, разрежьте на две части, из которых можно сложить квадрат.

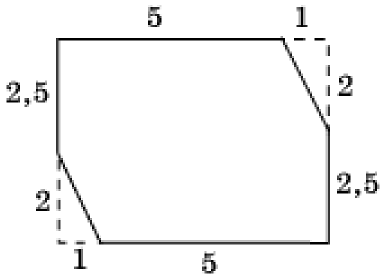


Рис. 20

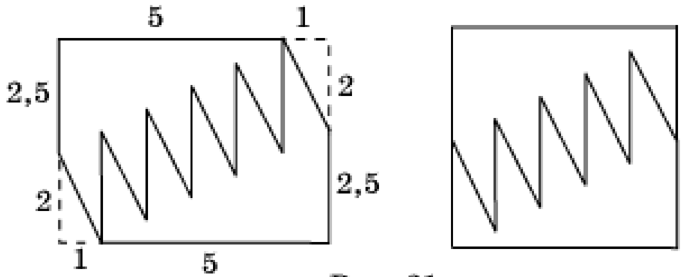


Рис. 21

Решение. Заметим, что площадь данного шестиугольника равна 25 и, следовательно, сторона квадрата должна равняться 5. Требуемое разрезание показано на рисунке 21.

4.11. Используя разрезания, докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей.

Решение. Разрезанием правильного восьмиугольника можно получить прямоугольник, сторонами которого являются наибольшая и наименьшая диагонали (рис. 22). Поэтому площадь правильного восьмиугольника равна произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей.

4.12. Стороны AB и CD параллелограмма $ABCD$ площади 1 разбиты на n равных частей, AD и BC - на m равных частей. Точки деления соединены так, как показано на рисунке 23, где $n = 3$, $m = 4$.

Чему равны площади образовавшихся при этом маленьких параллелограммов?

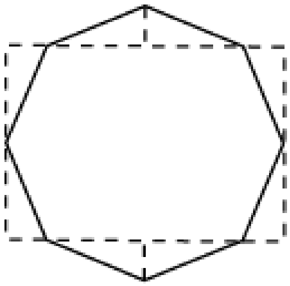


Рис. 22

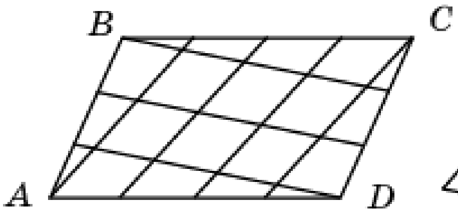


Рис. 23

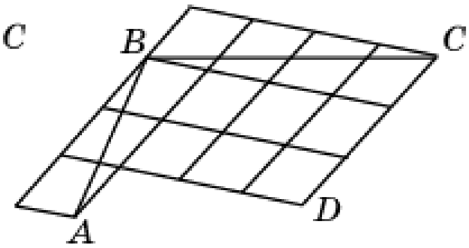


Рис. 24

Решение. Разрезанием, параллелограмм $ABCD$ можно превратить в фигуру, состоящую из $n \cdot m + 1$ маленьких параллелограммов (рис. 24). Следовательно, площади маленьких параллелограммов равны $1/(n \cdot m + 1)$.

4.13. Докажите, что никакой выпуклый 13-угольник нельзя разрезать на параллелограммы.

Доказательство. Заметим, что если выпуклый многоугольник разрезан на параллелограммы, то у каждой его стороны есть противоположная параллельная ей сторона. Таким образом, число сторон многоугольника должно быть четным.

4.14. Докажите, что всякий выпуклый центрально-симметричный многоугольник можно разрезать на параллелограммы.

Доказательство. Заметим, что у выпуклого центрально-симметричного многоугольника четное число сторон и противоположные стороны равны и параллельны. На рисунке 25 показано, как, отрезая параллелограммы от такого многоугольника, можно получить выпуклый многоугольник с меньшим числом сторон, у которого противоположные стороны также равны и параллельны. Продолжая этот процесс отрезания параллелограммов, мы, в конце концов, разрежем весь многоугольник.

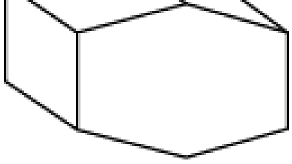


Рис. 25

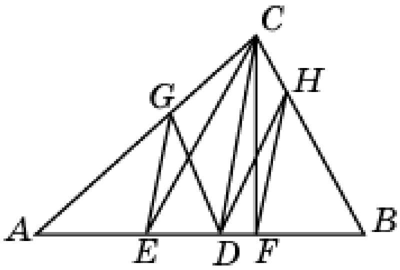


Рис. 26

14.15. Через точку на стороне треугольника проведите две прямые, делящие этот треугольник на три равновеликие части.

Решение. Пусть ABC – данный треугольник, точка D принадлежит стороне AB (рис. 26). Разделим сторону AB на три равные части точками E и F. Пусть, например, точка D лежит между E и F. Проведем прямые EG и FH параллельные CD Прямые DG и DH будут искомыми прямыми, делящими треугольник ABC на три равновеликие части. Действительно, площадь треугольника EGD равна площади треугольника EGC и следовательно, площадь треугольника ADG равна площади треугольника AEC, которая, в свою очередь равна одной третьей площади треугольника ABC. Аналогичным образом показывается, что площадь треугольника BFC равна одной третьей площади треугольника ABC.

5. Графы

Большое число комбинаторных задач связано с графами. Напомним, что графом называется фигура образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек (рис. 26, а). Точки называются ***вершинами***, а отрезки – ***ребрами*** графа.

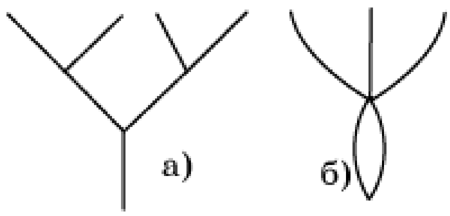


Рис. 26

Вместо отрезков в качестве ребер графов рассматриваются также кривые линии на плоскости (рис. 26, б).

Примерами графов могут служить схемы метрополитена, железных и шоссейных дорог, планы выставок и т.д.

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад.

Одной из таких задач-головоломок была задача о кенигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707-1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 до конца жизни).

Задача. В г. Кёнигсберге (ныне Калининград) было семь мостов через реку Прегель (рис. 27, где Л – левый берег, П – правый берег, А и Б – острова). Задача заключалась в следующем: можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через каждый мост ровно один раз?

Эта задача связана с другими головоломками, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т.е. «нарисовать одним росчерком». Такие контуры образуют так называемые ***уникурсальные графы***.

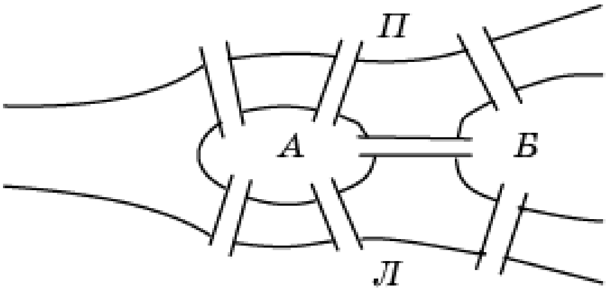


Рис. 27

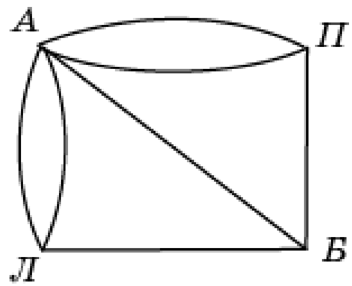


Рис. 28

Задаче о кёнигсбергских мостах Л. Эйлер посвятил целое исследование, которое в 1736 году было представлено в Петербургскую Академию наук.

На рисунке 28 изображен граф, соответствующий задаче о кёнигсбергских мостах. Требуется доказать, что этот граф является уникурсальным.

Для этого рассмотрим понятие ***индекса вершины*** – число ребер графа, сходящихся в данной вершине, и докажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Для уникурсального графа число вершин нечетного индекса равно нулю или двум.

Доказательство. Действительно, если граф уникурсален и его начало не совпадает с концом, то начало и конец являются единственными вершинами нечетного индекса. Остальные вершины имеют четный индекс, так как в каждую точку мы входим и выходим из нее. Если начало совпадает с концом, то вершин с нечетным индексом нет.

Приступим теперь к решению задачи. Определим четность вершин графа на рисунке 28. Вершина А имеет индекс 5, Б – 3, П – 3 и Л – 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечетного индекса, и, следовательно, данный граф не является уникурсальным. Отсюда получаем, что во время прогулки по городу нельзя пройти по каждому из семи мостов только один раз.

Учащимся можно предложить следующие задачи.

5.1. Нарисуйте графы, у которых имеются вершины индексов 1, 2, 3 и 4.

5.2. Нарисуйте граф, в котором каждая вершина имеет индекс, равный: а) двум; б) трем; в) четырем.

5.3. В графе 10 вершин, каждая из которых имеет индекс 3. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.

Ответ. 15.

5.4. В графе 5 вершин, каждая из которых имеет индекс 4. Сколько у него ребер? Нарисуйте такой граф.

Ответ. 10.

5.5. Определите, какие графы, изображенные на рисунке 29, являются уникурсальными?

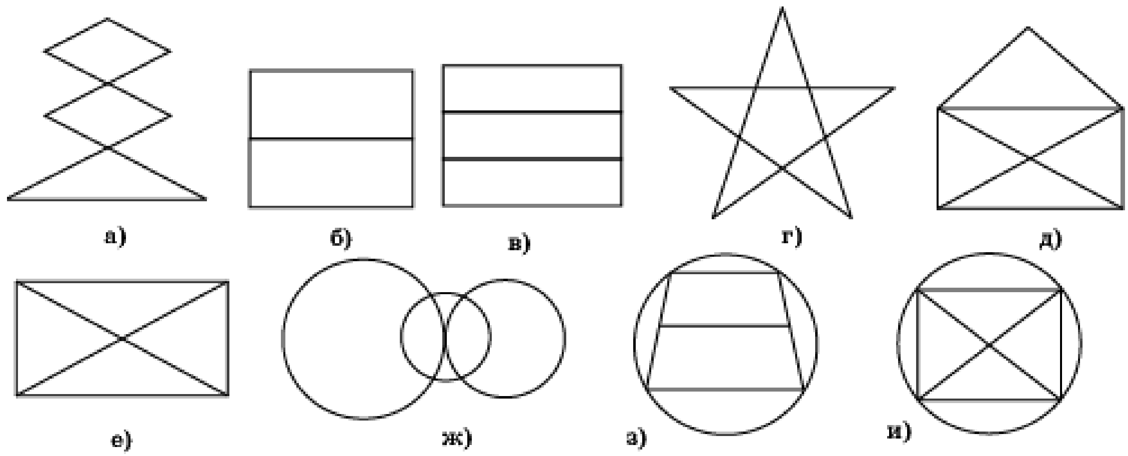


Рис. 29

Ответ. а), б), г), д), з).

5.6. Нарисуйте одним росчерком фигуры, изображенные на рисунке 30.

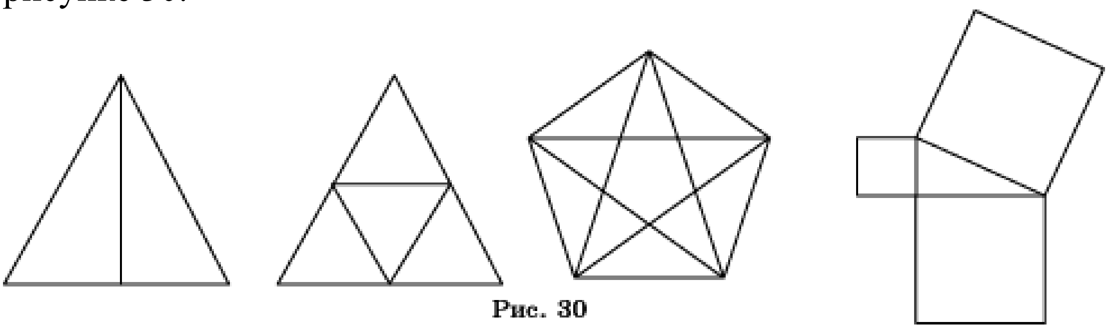


Рис. 30

5.7. Может ли граф иметь только одну вершину нечетного индекса?

Ответ. Нет.

5.8. Докажите, что в любом графе сумма индексов всех его вершин – число четное, равное удвоенному числу ребер графа. Выведите из этого, что число вершин с нечетными индексами четно.

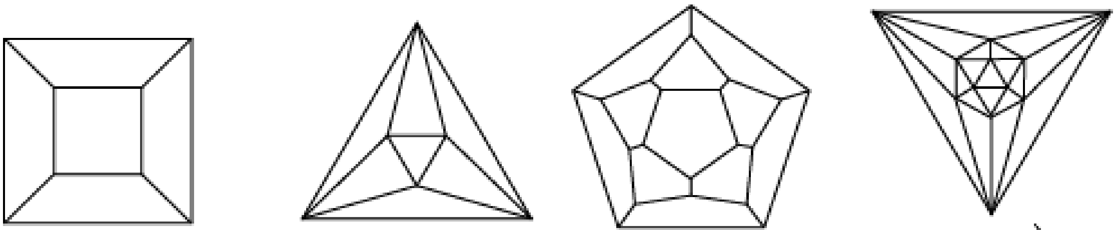
5.9. Докажите, что во всяком графе, ребрами которого являются отрезки, найдутся, по крайней мере, две вершины одинакового индекса.

5.10. Какое наименьшее число мостов в задаче о кёнигсбергских мостах придется пройти дважды, чтобы пройти по каждому мосту?

Ответ. Один.

5.11. Докажите, что если в задаче о кёнигсбергских мостах убрать или добавить один мост в любом месте реки Прегель, то полученный граф будет уникурсальным.

5.12. Какое наименьшее число ребер придется обвести дважды, чтобы нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, графы, изображенные на рисунке 31?



а) б) в) г)

Рис. 31

Ответ. а) 3; б) 0; в) 9; г) 5.

5.13. Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке, план которой приведен на рисунке 32, так, чтобы они побывали в каждом зале только один раз?

Вершины графа – это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрестки, а ребра – залы и коридоры. Где на выставке следовало бы сделать вход и выход, чтобы можно было провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом из них в точности один раз?

5.14. На рис. 33 изображен план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря.

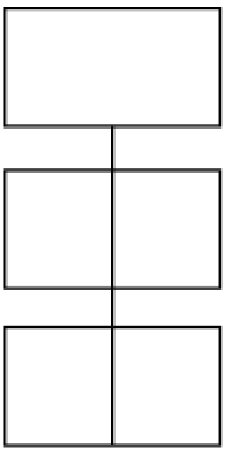


Рис. 32

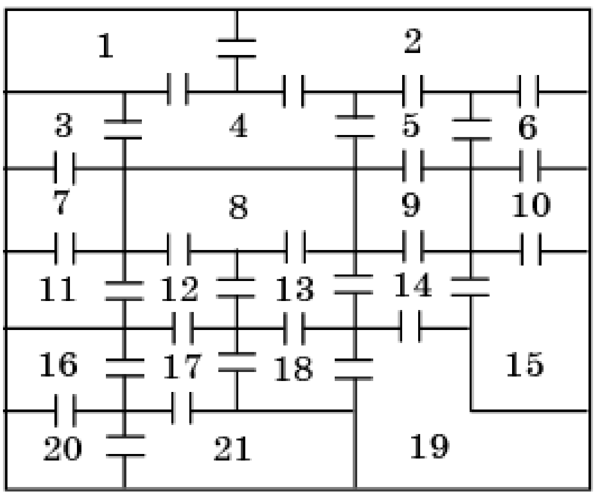


Рис. 33

После его смерти наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причем в точности по одному разу через каждую. Сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

6. Теорема Эйлера для многоугольников

Еще одной задачей-головоломкой, связанной с графами и с именем Эйлера, является задача о трех домиках и трех колодцах.

Задача. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу (рис. 34)?

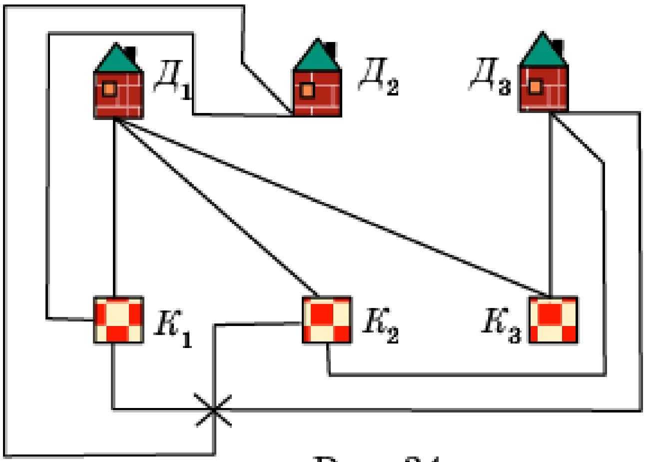


Рис. 34

Для решения этой задачи воспользуемся теоремой, доказанной Леонардом Эйлером в 1752 году.

Теорема. Если многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что любые два многоугольника разбиения или не имеют общих точек, или имеют общие вершины, или имеют общие ребра, то имеет место равенство

$$В - Р + Г = 1, (*)$$

где В - общее число вершин, Р - общее число ребер, Г - число многоугольников (граней).

Доказательство. Докажем, что равенство (*) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике данного разбиения провести диагональ (рис. 35, а).

Действительно, после проведения такой диагонали в новом разбиении будет В вершин, Р+1 ребер и количество многоугольников увеличится на единицу. Следовательно, имеем

$$В - (Р + 1) + (Г+1) = В – Р + Г.$$

Пользуясь этим свойством, проведем диагонали, разбивающие входящие многоугольники на треугольники, и для полученного разбиения покажем выполнимость соотношения (*) (рис. 35, б).

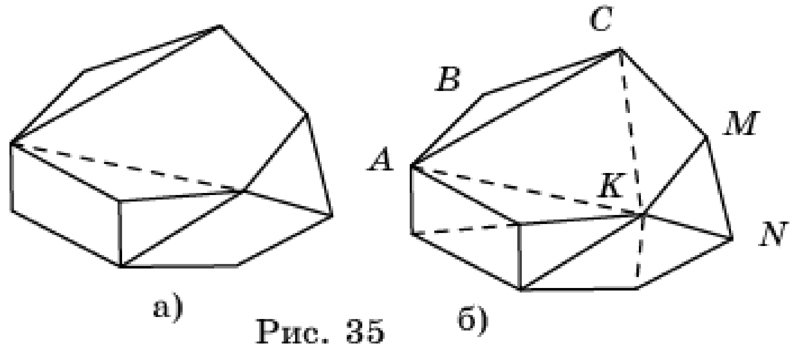


Рис. 35

Для этого будем последовательно убирать внешние ребра, уменьшая количество треугольников. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника *ABC* требуется снять два ребра, в нашем случае *AB* и *BC*;

б) для удаления треугольника *MKN* требуется снять одно ребро, в нашем случае *MN*.

В обоих случаях равенство (*) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника граф будет состоять из В-1 вершин, Р-2 ребер и Г-1 многоугольника:

$$(В - 1) - (Р + 2) + (Г -1) = В – Р + Г.$$

Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет равенства (*). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы придем к разбиению, состоящему из одного треугольника. Для такого разбиения В = 3, Р = 3, Г = 1 и, следовательно, В - Р + Г= 1. Значит, равенство (*) имеет место и для исходного разбиения, откуда окончательно получаем, что для данного разбиения многоугольника справедливо соотношение (*).

Заметим, что соотношение Эйлера не зависит от формы многоугольников. Многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Соотношение Эйлера при этом не изменится.

Приступим теперь к решению задачи о трех домиках и трех колодцах.

Решение. Предположим, что это можно сделать. Отметим домики точками $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, а колодцы - точками $К_1$, $К_2$, $К_3$ (рис. 34). Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять ребер, которые попарно не пересекаются.

Эти ребра образуют на плоскости многоугольник, разделенный на более мелкие многоугольники. Поэтому для этого разбиения должно выполняться соотношение Эйлера В - Р + Г= 1. Добавим к рассматриваемым граням еще одну - внешнюю часть плоскости по отношению к многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид В - Р + Г = 2, причем В = 6 и Р = 9. Следовательно, Г = 5. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку, по условию задачи, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро лежит ровно в двух гранях, то количество ребер должно быть не меньше (5·4)/2 = 10, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен - нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

Учащимся можно предложить следующие задачи.

6.1. Укажите какое-нибудь разбиение выпуклого четырехугольника на выпуклые четырехугольники.

6.2. Докажите, что для произвольного разбиения четырехугольника на четырехугольники выполняется равенство В – Г = 3.

6.3. Укажите какое-нибудь разбиение выпуклого пятиугольника на выпуклые пятиугольники.

6.4. Укажите какое-нибудь разбиение треугольника на семиугольники.

6.5. Два соседа имеют: а) три общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

6.6. Три соседа имеют: а) два общих колодца; б) четыре общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

6.7. Внутри n - угольника взяты m точек. Эти точки и вершины многоугольника соединены отрезками так, что исходный многоугольник разбивается на треугольники. Докажите, что при этом число треугольников равно $n + 2m - 2$.

6.8. Многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что в каждой вершине сходится три ребра. Сколько при этом имеется вершин и граней, если число ребер равно: а) 6; б) 12; в) 15? Нарисуйте такие разбиения.

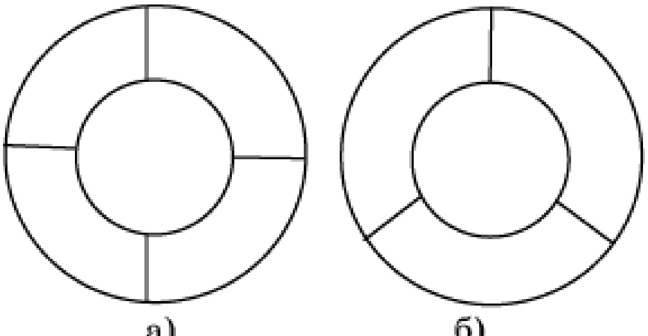
6.9. Докажите, что для любого разбиения n-угольника на m-угольники выполняется равенство 2В + $(2 – m)$Г = $n + 2$.

6.10. В многоугольнике вырезали дырку в форме многоугольника. Оставшуюся часть разбили на многоугольники. Чему равно В – Р + Г для этого разбиения.

7. Раскрашивание карт

Задача раскрашивания карт имеет почти 150-летнюю историю. Она заключается в том, чтобы раскрасить данную географическую карту так, чтобы пограничные страны были окрашены в разные цвета (непограничные страны можно окрашивать одним цветом), использовав при этом наименьшее число красок.

На рисунке 36, а изображена карта, для раскраски которой требуется три цвета. На рисунке 36, б изображена карта, для раскраски которой трех цветов недостаточно и требуется четыре цвета.



а) б)

Рис. 36

В 1850 году шотландский физик Фредерик Гутри обратил внимание на то, что задачи раскрашивания карт очень популярны среди студентов-математиков в Лондоне, а сформулировал проблему четырех красок его брат Фрэнсис Гутри, который, раскрасив карту графств Англии четырьмя цветами, выдвинул гипотезу о том, что этого количества цветов достаточно для раскраски любой карты. Он привлек к проблеме внимание своего преподавателя математики А.Де Моргана, а тот сообщил о ней своему другу В. Гамильтону и тем самым способствовал ее широкому распространению.

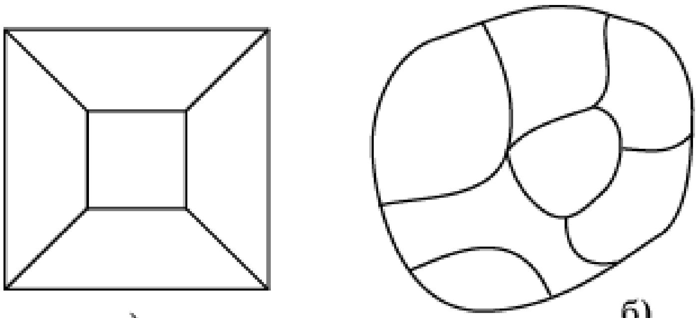
Однако годом рождения проблемы четырех красок считается 1878 год (в некоторых изданиях указывается 1879). Именно тогда на одном из заседаний Британского географического общества выдающийся английский математик А.Кэли четко сформулировал поставленную задачу: "Доказать, что любую географическую карту на плоскости (или на глобусе) можно правильно закрасить четырьмя красками". Раскраска карты называется правильной, если любые две страны, имеющие на карте общую границу, окрашены в различные цвета. Именно с этого момента проблема привлекла к себе внимание многих крупных математиков.

В 1890 году английский математик П.Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить в пять цветов. Однако долгое время проблема четырех красок не поддавалась решению. В 1968 году американские математики Оре и Стемпл показали, что любую карту, имеющую не более 40 стран, можно раскрасить в четыре цвета.

В настоящее время для решения этой проблемы существенно используются компьютеры, что связано с выполнением огромного количества вычислений. В 1976 году американскими учеными К.Аппелем и В.Хакеном было получено первое машинное решение. С помощью машины они просматривали различные типы карт, и для каждого из них машина решала, может ли в данном типе найтись карта, которая не раскрашивается в четыре цвета. Учеными было просмотрено почти 2000 типов карт, и для всех был получен ответ: "Нет", - что и позволило объявить о машинном решении проблемы четырех красок.

Учащимся можно предложить следующие задачи.

7.1. Раскрасьте карты, изображенные на рисунке 6. Какое минимальное число красок для этого потребуется? (при раскрашивании карты требуется, чтобы соседние страны имели разные цвета).

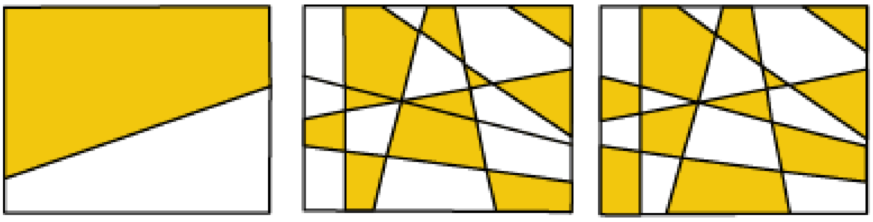


а) Рис. 37 б)

Ответ. а) 3; б) 3.

7.2. Докажите, что все возможные карты на плоскости, образованные прямыми, могут быть раскрашены в два цвета.

Решение. Ясно, что карту, образованную одной прямой можно раскрасить в два цвета (рис. 38,а). Докажем, что если карта, образованная прямыми, раскрашена в два цвета, то карта, полученная из нее добавлением новой прямой также может быть раскрашена в два цвета (рис. 38,б). Действительно, новая прямая делит раскрашенную карту на две карты, каждая из которых раскрашена в два цвета. Причем к самой прямой примыкают пары областей, закрашенные в один цвет. Перекрасим одну из карт-половинок (безразлично, какую именно), изменив цвет каждой ее области на противоположный. Получим раскраску в два цвета всей карты (рис. 38, в). Поскольку любую карту, образованную прямыми, можно получить последовательным добавлением прямых, то всякая такая карта может быть раскрашена в два цвета.



а) б) в)

Рис. 38

7.3. Докажите, что всевозможные карты на плоскости, образованные окружностями, могут быть раскрашены в два цвета.

Доказательство аналогично предыдущему.

7.4. Докажите, что если карту, заполняющую всю плоскость, можно раскрасить в два цвета, то она имеет вершины только четного индекса.

Решение. Если бы в карте имелась вершина нечетного индекса, то страны, расположенные вокруг этой вершины нельзя было бы раскрасить двумя цветами.

7.5. Сколько красок достаточно взять, чтобы раскрасить карту, образованную двумя концентрическими окружностями, имеющими n перегородок (рис. 39)?

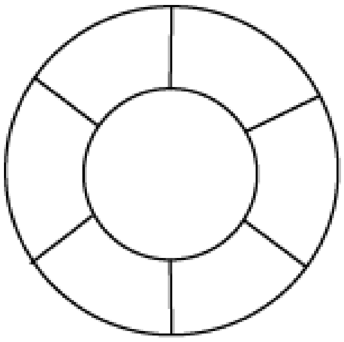


Рис. 39

Ответ. 3 краски, если n четно; 4 краски, если n нечетно.

7.6. Какое наибольшее число клеток в квадрате nхn, нарисованном на клечатой бумаге, можно закрасить так, чтобы ни в одном квадрате 2х2 не оказалось трех закрашенных клеток?

Решение. $n^2/2$, если n четно, и $(n^2 + n)/2$, если n нечетно. Такие числа получаются, если закрасить целиком все строки с нечетными номерами: 1-ю, 3-ю и т.д. Докажем, что большего количества клеток закрасит нельзя.

Если $n=2k$, то разобьем квадрат $2k$x$2k$ на k^2 квадратов 2x2. В каждом из них может быть не более двух закрашенных клеток. Следовательно, общее число закрашенных клеток не превосходит $2k^2 = n^2/2$.

Если $n=2k+1$, то рассмотрим k^2+k квадратов 2x2, указанных на рисунке 40. В каждом из них может быть не более двух закрашенных клеток. Даже если дополнительно закрасить $k+1$ клеток, лежащих на диагонали и не покрытых квадратами 2x2, то все равно общее число закрашенных клеток не превосходит $2(k^2+k)+k = (n^2+n)/2$.

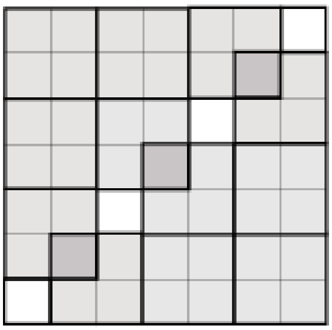


Рис. 40

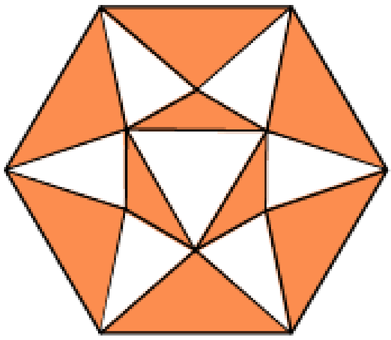


Рис. 41

7.7. Можно ли закрасить на клеточной бумаге 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечетное число закрашенных соседей? (Соседними считаются клетки, у которых есть общая сторона.)

Решение. Пусть $n(k)$ - число окрашенных клеток, имеющих ровно k окрашенных соседей. Обозначим через N число общих сторон окрашенных клеток. Так как каждая из этих общих сторон содержится ровно в двух окрашенных клетках, то $N=(n(1)+2n(2)+3n(3)+4n(4))/2=(n(1)+n(3))/2 + n(2)+n(3)+2n(4)$. Так как N - целое число, то $n(1)+n(3)$ четно. Таким образом, число окрашенных клеток, имеющих нечетное число соседей, четно. Поэтому нельзя окрасить 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечетное число окрашенных соседей.

7.8. На рисунке 41 изображена карта, раскрашенная в два цвета, полученная разбиением шестиугольника на треугольники. Причем треугольники, примыкающие к сторонам шестиугольника, закрашены в один цвет. Докажите, что карту, полученную разбиением 10-угольника на треугольники, нельзя раскрасить в два цвета так, чтобы треугольники, примыкающие к сторонам 10-угольника были закрашены в один цвет.

Решение. Предположим, что мы раскрасили карту в черный и белый цвета. Обозначим n - число сторон черных треугольников, m - число сторон белых треугольников. Так как каждая сторона черного треугольника (кроме сторон 10-угольника) является также и стороной белого треугольника, то n-m=10. С другой стороны, оба числа n и m делятся на три. Противоречие.

8. Прямые и плоскости в пространстве

Приведем несколько комбинаторных задач, относящихся к взаимному расположению прямых и плоскостей в пространстве.

8.1. Сколько плоскостей проходит через различные пары из трех параллельных прямых в пространстве, не лежащих в одной плоскости?

Задача аналогична задаче 1.1. Учащиеся рисуют в тетради три попарно параллельные прямые, и, проводя плоскости через различные пары из этих прямых, убеждаются, что количество таких плоскостей равно трем.

8.2. Сколько плоскостей проходит через различные пары из четырех параллельных прямых в пространстве, никакие три из которых не лежат в одной плоскости?

Задача аналогична задаче 1.2. Ответ: 6.

8.3. Сколько плоскостей проходит через различные пары из пяти параллельных прямых в пространстве, никакие три из которых не лежат в одной плоскости?

Задача аналогична задаче 1.3. Ответ: 10.

8.4. Сколько плоскостей проходит через различные пары из n параллельных прямых в пространстве, никакие три из которых не лежат в одной плоскости?

Задача аналогична задаче 1.4. Ответ: $\frac{n(n-1)}{2}$.

8.5. Какое наибольшее число прямых может получиться при попарных пересечениях трех плоскостей?

Решение. Задача аналогична задаче 1.5. Наибольшее число прямых получается, если каждая плоскость пересекается с двумя другими плоскостями. Ответ: 3.

8.6. Какое наибольшее число прямых может получиться при попарных пересечениях четырех плоскостей?

Задача аналогична задаче 1.6. Ответ: 6.

8.7. Какое наибольшее число прямых может получиться при попарных пересечениях пяти плоскостей?

Задача аналогична задаче 1.7. Ответ: 10.

8.8. Какое наибольшее число прямых может получиться при попарных пересечениях n плоскостей?

Задача аналогична задаче 1.8. Ответ: $\frac{n(n-1)}{2}$.

8.9. Сколько плоскостей проходит через различные тройки из четырех точек в пространстве, не лежащих в одной плоскости.

Учащиеся рисуют в тетради четыре точки и, проводя плоскости через каждые три из них, убеждаются, что число таких плоскостей равно четырем.

8.10. Сколько плоскостей проходит через различные тройки из пяти точек в пространстве, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости.

Решение аналогично предыдущему. Ответ: 10.

8.11. В пространстве даны n точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Сколько плоскостей проходит через различные тройки из этих точек?

Решение. Поскольку плоскость однозначно задается тремя точками, не лежащими на одной прямой, то число плоскостей равно числу сочетаний из n по три, т.е. равно $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

8.12. Сформулируйте и решите задачу, двойственную к задаче 8.11 (двойственными считать точки и плоскости).

Решение. Двойственной будет следующая формулировка. В пространстве даны n плоскостей, каждые три из которых пересекаются в одной точке и никакие четыре плоскости не имеют общей точки. Каково общее число точек пересечения?

Ответ: $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

8.13. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство две плоскости?

Задача аналогична задаче 1.9. Учащиеся изображают в тетради две плоскости и выясняют, что если плоскости параллельны, то число частей пространства равно 3, если же плоскости пересекаются, то число частей пространства равно 4. Ответ: 4.

8.14. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство три плоскости?

Решение аналогично предыдущему. Наибольшее число частей пространства получается в случае, если плоскости имеют только одну общую точку. Ответ: 8.

8.15. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство четыре плоскости?

Решение аналогично предыдущему. Ответ: 15.

8.16. На сколько частей делят пространство n плоскостей, проходящих через одну точку, никакие три из которых не проходят через одну прямую?

Решение. Выясним, на сколько увеличиваться число частей пространства при добавлении новой n-ой плоскости к уже имеющимся (n – 1) плоскостям, пересекающимся в одной точке. Это увеличение происходит за счет того, что какие-то части пространства разбиваются новой плоскостью на меньшие части. Количество частей пространства, которые разбиваются на две части новой плоскостью, равно количеству частей новой плоскости, на которые она разбивается линиями пересечения с имеющимися (n – 1)-ой плоскостью. Каждая такая часть новой плоскости разбивает соответствующую часть пространства на две части. Поскольку n-я плоскость пересекается с (n – 1)-ой плоскостью по прямым, проходящим через одну точку, то число частей равно 2(n – 1). Следовательно, наибольшее число частей пространства равно сумме $2 + 2 + 4 + \ldots + 2(n - 1) = 2 + n(n - 1) = n^2 - n + 2$.

8.17. На какое наибольшее число частей могут разбивать пространство n плоскостей?

Решение. Выясним, на сколько может увеличиваться число частей пространства при добавлении новой n-ой плоскости к уже имеющимся (n – 1) плоскости. Количество частей пространства, которые разбиваются на две части новой плоскостью, равно количеству частей новой плоскости, на которые она разбивается линиями пересечения с имеющимися (n – 1)-ой плоскостью. Каждая такая часть новой плоскости разбивает соответствующую часть пространства на две части. Поскольку n-я плоскость пересекается с (n – 1)-ой плоскостью, то наибольшее число частей равно $\frac{n(n-1)}{2}+1$. Следовательно, наибольшее число частей пространства равно сумме

$$1 + 1 + 2 + 4 + 7 + \ldots + \left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right).$$

Самостоятельно попробуйте упростить полученное выражение.

9. Многогранники

Приведем несколько примеров комбинаторных задач на многогранники. Начнем с простых задач.

9.1. Может ли в пирамиде быть 21 ребро?

Ответ: Нет. В пирамиде число ребер четно.

9.2. Может ли в призме быть 16 ребер?

Ответ: Нет. В призме число ребер делится на три.

9.3. Чему равно число диагоналей в n-угольной призме?

Ответ: $n(n$-3).

9.3. Сколько осей симметрии имеет куб?

Ответ. 3 оси симметрии 4-го порядка; 4 оси симметрии 3-го порядка; 6 осей симметрии 2-го порядка.

9.4. Сколько плоскостей симметрии имеет куб?

Ответ. 9 плоскостей симметрии.

9.5. В правильном тетраэдре закрасили одну грань. В результате каких преобразований, оставляющих на месте закрашенную грань, он самосовместится?

Ответ. Поворот на $120°$ вокруг высоты опущенной на закрашенную грань, симметрия относительно плоскости, проходящей через высоту закрашенной грани и противоположную ей вершину тетраэдра.

9.6. В кубе закрасили одну грань. В результате каких преобразований, оставляющих на месте закрашенную грань, он самосовместится?

Ответ. В результате поворота на $90°$ вокруг оси, проходящей через центр закрашенной грани; в результате симметрий относительно плоскостей, перпендикулярных закрашенной грани.

9.7. Оси симметрии какого порядка имеет: а) правильный тетраэдр; б) октаэдр; в) додекаэдр; г) икосаэдр?

Ответ. а) оси симметрии второго и третьего порядка; б) оси симметрии второго, третьего и четвертого порядков; в) оси симметрии второго, третьего и пятого порядков; г) оси симметрии второго, третьего и пятого порядков.

9.8. Сколько имеется различных движений, переводящих в себя: а) правильный тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

Ответ. а) 24; б) 48; в) 48; г) 120; д) 120.

9.9. Может ли у многогранника быть семь ребер.

Решение. Нет. В вершинах такого многогранника не может сходиться четыре ребра, так как в этом случае число ребер этого многогранника было бы больше семи. Если же в каждой вершине многогранника сходится по три ребра, то число ребер этого многогранника должно делиться на три.

9.10. Докажите, что для любого n, большего семи существует многогранник с n ребрами.

Решение. Если $n = 2k$ – четно, то искомым многогранником является k-угольная пирамида. Если $n = 2k + 3$ – нечетно, то искомый многогранник получается из k-угольной пирамиды отрезанием одного угла при основании.

9.11. Докажите, что у любого многогранника число граней с нечетным числом ребер четно.

Решение. Предположим, что число граней с нечетным числом ребер нечетно. Тогда общее число ребер в этих гранях будет нечетным. Общее число ребер в гранях с четным числом ребер четно. Поэтому число ребер всех граней будет нечетно. Однако каждое ребро входит ровно в две грани, и при подсчете ребер, входящих в грани, мы считали каждое ребро дважды, т.е. одно должно быть четным. Противоречие. Следовательно, число граней с нечетным числом ребер должно быть четно.

9.12. Докажите, что у любого многогранника число вершин, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

Решение. Каждое ребро многогранника соединяет две его вершины. Поэтому суммарное число ребер, выходящих из каждой вершины многогранника, четно. Следовательно, число нечетных слагаемых в этой сумме должно быть четным.

9.13. Докажите, что для числа вершин В, числа ребер Р и числа граней Г многогранника выполняются неравенства: 2Р $\geq$ 3В, 2Р $\geq$ 3Г.

Решение. В каждой вершине многогранника сходятся, по крайней мере, три ребра. Поэтому выполняется неравенство 2Р $\geq$ 3В. Аналогично, каждая грань многогранника имеет, по крайней мере, три ребра. Поэтому выполняется неравенство 2Р $\geq$ 3Г.

9.14. Сколько пар параллельных ребер имеется у: а) тетраэдра (рис. 1); б) куба (рис. 2); в) октаэдра (рис. 3); г) икосаэдра (рис. 4); д) додекаэдра (рис. 5)?

Ответ.

9.15. Сколько пар скрещивающихся ребер имеется у: а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра?

Ответ.

9.16. Какие и сколько граней имеет: а) усеченный тетраэдр (рис. 1); усеченный куб (рис. 2); в) усеченный октаэдр (рис. 3); г) усеченный икосаэдр (рис. 4); д) усеченный додекаэдр (рис. 5)?

Ответ.

9.17. Какие и сколько граней имеет: а) кубооктаэдр (рис. 1); б) икосододекаэдр (рис. 1); в) усеченный кубооктаэдр (рис. 1); г) усеченный икосододекаэдр (рис. 1)?

Ответ.

9.18. Какие и сколько граней имеет: а) ромбокубооктаэдр (рис. 1); б) ромбоикосододекаэдр (рис. 1); в) курносый куб (рис. 1); г) курносый додекаэдр (рис. 1)?

Ответ.

9.19. Можно ли склеить поверхность многогранника из: а) пяти треугольников; б) десяти треугольников; в) пятнадцати треугольников; г)* n треугольников.

Ответ: а), в) Нет; б) да, пятиугольная бипирамида; г) да, если n четно и больше двух, нет, если n нечетно.

9.20. Докажите, что у любого многогранника найдутся, по крайней мере, две грани с одинаковым числом ребер. Приведите пример многогранника, у которого нет трех граней с одинаковым числом ребер.

Доказательство.

9.21. Докажите, что у любого многогранника есть, по крайней мере, две вершины, в которых сходится одинаковое число ребер. Приведите пример многогранника, у которого нет трех вершин, в которых сходится одинаковое число ребер.

Доказательство.

9.22. Какое минимальное число красок потребуется для окраски граней куба, при которой соседние грани имели бы различные цвета?

Ответ. 3.

9.23. Через ребра тетраэдра, параллельно противоположным ребрам проведены плоскости. На сколько частей делят пространство все эти плоскости?

Ответ. 27.

9.24. Через ребра куба, перпендикулярно диагональным сечениям, проходящим через эти ребра, проведены плоскости. Сколько вершин, ребер и граней имеет многогранник, ограниченный этими плоскостями.

Ответ. В = 14, Р = 24, Г = 12.

9.25. Сколькими различными способами в куб можно вписать тетраэдр? (Тетраэдр называется вписанным в многогранник, если его вершинами являются вершины многогранника.)

Ответ. 58.

10. Теорема Эйлера для многогранников

Решение большого класса комбинаторных задач по геометрии основывается на теореме Эйлера о числе вершин, ребер и граней выпуклого многогранника.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место соотношение

$$В - Р + Г = 2,$$

где В - число вершин, Р - число ребер и Г - число граней данного многогранника.

Доказательство. Представим поверхность данного многогранника сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Получим многоугольник, разбитый на Г’ = Г - 1 многоугольников (которые, по-прежнему, будем называть гранями), В вершин и Р ребер. Как было доказано ранее, для него выполняется соотношение В - Р + Г’ = 1. Поэтому для исходного многогранника будет иметь место требуемое соотношение В - Р + Г = 2.

Приведем несколько задач на теорему Эйлера.

10.1. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер?

Ответ: а) В = 6, Г = 8; б) В = 7, Г = 10.

10.2. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно: а) 12; б) 15?

Ответ: а) В = 8, Г = 6; б) В = 10, Г = 7.

10.3. Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

Ответ: В = 8, Г = 6. Например, куб.

10.4. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

Ответ: В = 6, Г = 8. Например, октаэдр.

10.5. Докажите, что в любом выпуклом многограннике есть треугольная грань или в какой-нибудь его вершине сходятся три ребра.

Решение. Обозначим $Г_n$ – число n-угольных граней, $В_n$ – число вершин, в которых сходится n ребер. Предположим, что $Г_3=0$, $В_3=0$. Тогда $2Р = 4Г_4+5Г_5+\ldots \geq 4Г$, $2Р = 4В_4+5В_5+\ldots \geq 4В$. Следовательно, будет выполняться неравенство $4В-4Р+4Г \leq 0$, что противоречит соотношению Эйлера. Поэтому или $Г_3 \neq 0$ или $В_3 \neq 0$.

10.6. Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдется грань, у которой менее шести ребер.

Решение. Предположим, что грани выпуклого многогранника имеют более пяти сторон. Тогда $2Р=6Г_6+7Г_7+\ldots \geq 6Г$, $2Р = 3В_3+4В_4+\ldots \geq 3В$. Следовательно, $6В-6Р+6Г \leq 2Р-6Р+4Р = 0$, что противоречит соотношению Эйлера.

10.7. Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6 или 7 ребер, и в каждой вершине сходятся по три ребра. Докажите, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.

Решение. Имеем, $2Р = 5Г_5+6Г_6+7Г_7$, $3В = 5Г_5+6Г_6+7Г_7$. Следовательно, $6В-6Р+6Г = 2(5Г_5+6Г_6+7Г_7) - 3(5Г_5+6Г_6+7Г_7) + 6(Г_5+Г_6+Г_7) = Г_5 - Г_7$. В силу соотношения Эйлера, последняя разность равна 12.

10.8. Докажите, что для числа вершин В и числа граней Г выпуклого многогранника выполняются неравенства $В + 4 \leq 2Г \leq 4В – 8$.

Решение. В силу соотношения Эйлера, имеем 2Г = 4 –2В + 2Р. Воспользуемся неравенствами 2Р $\geq$ 3В и 2Р $\geq$ 3Г из задачи 9.13. Получим 2Г = 4 – 2В +2Р $\geq$ 4 – 2В +3В = 4 + В; 2Г = 4 – 2В + 2Р $\geq$ 4 – 2В + 3Г и, следовательно, Г $\leq$ 2В – 4.

СОДЕРЖАНИЕ