Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Школьная математика с точки зрения высшей

Е.А. Седова, к.п.н.,

проф. кафедры элементарной математики

Школьная математика с точки зрения высшей

ПЛАН

- Структура курса.
- Азбука квадратного трёхчлена:
  - определение,
  - дискриминант,
  - формулы для решения квадратного уравнения,
  - формулы Виета,
  - разложение квадратного трёхчлена на множители.
- Алгебраический справочник:
  - многочлен с одной переменной и его стандартный вид,
  - значение многочлена,
  - равенство многочленов,
  - поиск рациональных корней многочлена,
  - разложение многочлена на множители.

Для связи используется мессенджер Telegram: https://t.me/joinchat/SaWIdjAW924T36qH

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Объём курса

- 12 практических занятий
- 2 контрольные работы
- Зачёт
- Самостоятельная работа студентов

Максимальное количество баллов

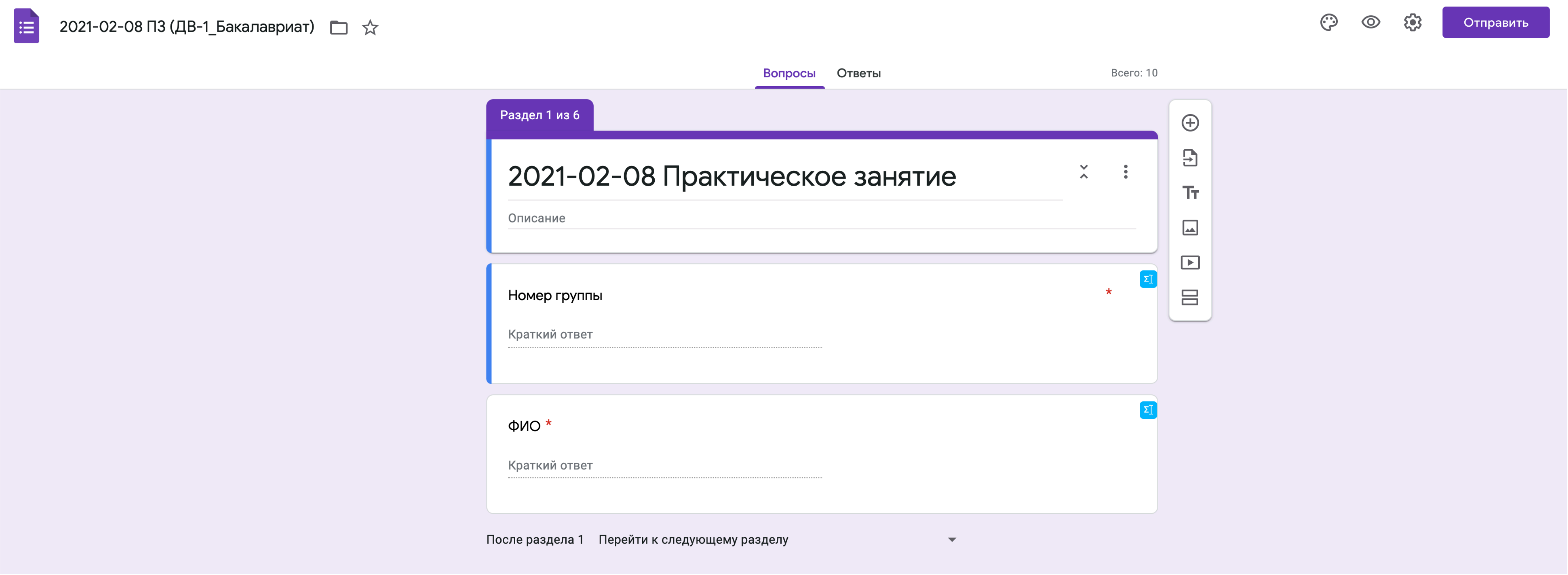
• Практические занятия (присутствие и тест)	12 ∙ 10 = 120
• Контрольные работы	2 ∙ 30 = 60
• Зачёт	20
• Другое (реферат)	по факту
• Итого	200 баллов

Шкала оценок

БАЛЛЫ НА АТТЕСТАЦИИ (%)

- Не зачтено 0-49 баллов – «неудовлетворительно»
- Зачтено 50-64 баллов – «удовлетворительно»
- Зачтено 65-84 баллов – «хорошо»
- Зачтено 85-100 баллов – «отлично»

Текущий контроль: Google Forms



Азбука квадратного трёхчлена

Работа в группах:

- Выпишите понятия школьной математики, связанные с квадратным трёхчленом.
- Выпишите теоремы школьной математики, описывающие свойства квадратного трёхчлена.
- Приведите примеры задач на квадратный трёхчлен.

Определение квадратного трёхчлена

Квадратным трёхчленом с переменной x называется выражение

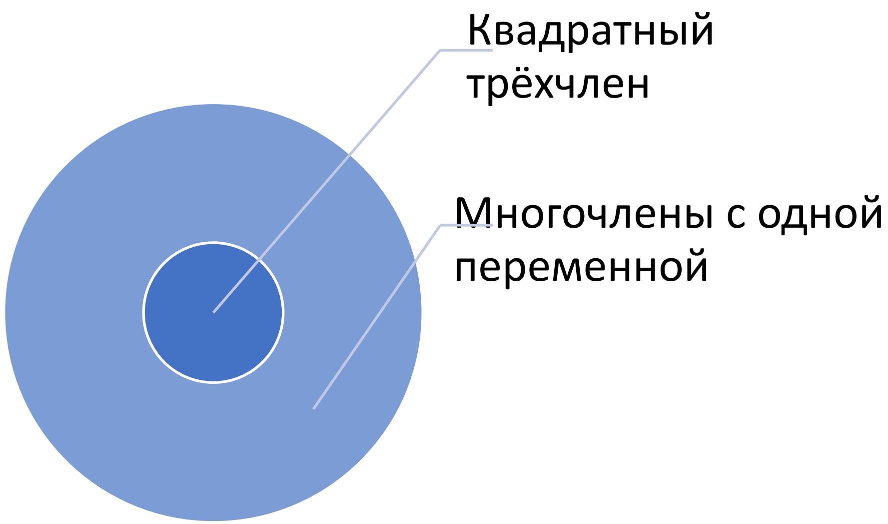
$$f\colon ax^2 + bx + c,$$

где a, b и c – некоторые числа, $a \neq 0$.

Значения, при которых f обращается в нуль, называются корнями трёхчлена.

Для нахождения корней квадратного трёхчлена нужно решить квадратное уравнение

$$E\colon ax^2 + bx + c = 0.$$



Дискриминант квадратного трёхчлена

Для решения квадратного уравнения используют приём «выделение полного квадрата» в квадратном трёхчлене:

$$f = ax^2 + bx + c =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Тогда уравнение E равносильно уравнению

$$E_1:\ a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Дискриминант

$$D = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

составлен из коэффициентов квадратного уравнения и знаков арифметических действий. По нему определяют, имеет ли уравнение действительные корни.

Формулы для решения квадратного уравнения

Для решения квадратного уравнения используют приём «выделение полного квадрата» в квадратном трёхчлене:

$$f = ax^2 + bx + c =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Тогда уравнение E равносильно уравнению

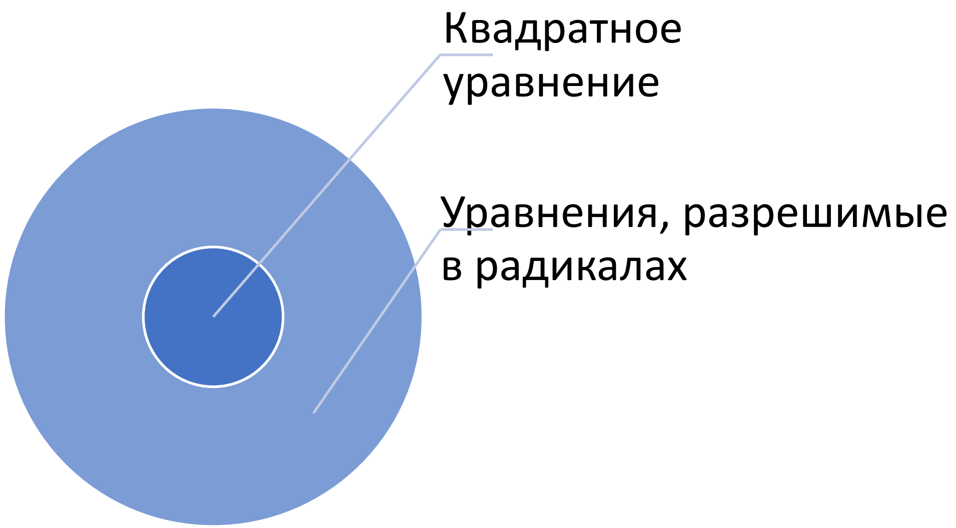
$$E_1\colon\ a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Теорема. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ с действительными коэффициентами a, b и c, где $a \neq 0$, имеет

(1) два различных действительных корня, если $D > 0$,

(2) два совпавших действительных корня, если $D = 0$,

(3) Не имеет действительных корней, если $D < 0$.



Формулы Виета

Связь между корнями x_1 и x_2 квадратного трёхчлена f и его коэффициентами описывают формулы Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ с корнями x_1 и x_2 можно разложить на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Многочлен с одной переменной

Многочлен от x (с переменной x) – это выражение, составленное из чисел и буквы x с помощью знаков сложения и умножения.

Для краткости используют знак минус и обозначение степени с натуральным показателем $(n > 1)$; не пишут знак умножения между числом и буквой x.

Иногда используют символ первой степени x^1 и символ нулевой степени x^0, заменяющий 1:

$$5x^2 + 2x^1 + 3x^0,$$

- Примеры.

Являются многочленами: $3x^2 - 2x + 1$, $\sqrt{7}\,x^3$, $\frac{2}{3}$, 0.

Не являются многочленами: $\sqrt{x^2}$, $\frac{x^2-1}{x-1}$.

Стандартный вид многочлена

С помощью *алгебраических преобразований* (перестановки слагаемых, раскрытия скобок и приведения подобных членов) многочлен можно привести к виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x \ + a_n,$$

где n натуральное число, a_0 , a_1, …, a_n – числа (коэффициенты многочлена), x – символ, вместо которого можно подставить любое число.

Если старший коэффициент $a_0 \neq 0$, то эту запись называют – **стандартным видом многочлена**.

Значение многочлена

- П р и м е р. Многочлен

$$p(x) = 9x^4 - x^2 + 2x - 4$$

при $x = 5$ принимает значение $p(5) = 5606.$

На калькуляторе удобно выполнять вычисления так:

$$9x^4 + 0 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 2x - 4 =$$
$$= (9x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 2) \cdot x - 4 =$$
$$= \left((9x^2 + 0 \cdot x - 1) \cdot x + 2\right) \cdot x - 4 =$$
$$= \left(\left((9x + 0) \cdot x - 1\right) \cdot x + 2\right) \cdot x - 4;$$
$$p(5) = \left(\left((9 \cdot 5 + 0) \cdot 5 - 1\right) \cdot 5 + 2\right) \cdot 5 - 4 = 5605.$$

Схема Горнера для вычисления значения многочлена

Запишем цепочку вычисления в виде таблицы:

	9	0	– 1	2	– 4
5	9	+ 5 · 9 = 45	+ 5 · 45 = 224	+ 5 · 224 = 1122	+ 5 · 1122 = 5606

Без промежуточных вычислений:

	9	0	– 1	2	– 4
5	9	45	224	1122	5606

Если последнее число схемы Горнера для многочлена $p(x)$ и числа c равно 0, то c – корень $p(x)$.

Значение многочлена

Значение многочлена при x = 0 равно свободному члену, а при x = 1 – сумме всех коэффициентов этого многочлена, записанного в стандартном виде.

- П р и м е р. Сумма коэффициентов многочлена

$$p(x) = (5x^2 + x - 7)^{2020} + 2020x,$$

приведённого к стандартному виду, равна $p(1) = 2021$.

Формальное равенство многочленов

Многочлены $p(x)$ и $q(x)$ **равны**, если они имеют одинаковый стандартный вид.

Функциональное равенство многочленов

Теорема 1. *Если* $p(x) = q(x)$, *то* $(\forall c \in \mathbb{C})\ p(c) = q(c)$.

Теорема 2. *Если* $(\forall c \in \mathbb{C})\ p(c) = q(c)$, *то* $p(x) = q(x)$.

Теорема 3. *Если* $p(x) \neq q(x)$, *то* $(\exists c \in \mathbb{C})\ p(c) \neq q(c)$.

Теорема 4. *Если* $(\exists c \in \mathbb{C})\ p(c) \neq q(c)$, *то* $p(x) \neq q(x)$.

Теорема 5. *Если* $p(x)$ *и* $q(x)$ *– многочлены степени не выше* n *и их значения совпадают в* $n + 1$ *точке, то* $p(x) = q(x)$.

Равенство многочленов

- П р и м е р. Подобрать числа , и так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

Приведём дроби к общему знаменателю

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Многочлены в числителях дробей должны быть равны:

$$x + 5 = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)\,(x-2). \qquad (*)$$

Равенство многочленов

$$x + 5 = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)\,(x-2). \qquad (*)$$

I с п о с о б. Представим многочлен в правой части равенства (*) в стандартном виде:

$$x + 5 = (a + b + c)x^2 - (5a + 4b + 3c) + (6a + 3b + 2c).$$

По определению равенства многочленов должны выполняться соотношения:

$$a + b + c = 0, 5a + 4b + 3c = -1, 6a + 3b + 2c = 5,$$

откуда $a = 3, b = -7, c = 4$.

Равенство многочленов

II способ. Так как многочлены в левой и правой частях равенства (*) не выше второй степени, то по теореме 5 достаточно потребовать совпадения их значений в трёх точках:

при $x = 1$, $x = 2$ и $x = 4$ равенство принимает вид, соответственно,

$$6 = 2a, \qquad 7 = -b, \qquad 8 = 2c,$$

откуда $a = 3, b = -7, c = 4$.

Теорема о целых корнях

Теорема о целых корнях. *Всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена*.

Доказательство. Пусть $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен с целыми коэффициентами, и целое число k – его корень.

Тогда

$$f(k) = 0, \text{ т. е. } a_0k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$

откуда

$$a_n = -(a_0k^{n-1} + a_1k^{n-2} + \dots + a_{n-1})k.$$

Так как все числа в этом равенстве, по условию, целые, то оно означает, что a_n делится на k, т.е. k действительно является делителем свободного члена a_n многочлена f, что и требовалось доказать.

Теорема о рациональных корнях

Теорема о рациональных корнях. *Если число* $c = \frac{p}{q}$, *где дробь* $\frac{p}{q}$ *несократима, является корнем члена многочлена с целыми коэффициентами, то p – делитель свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента этого многочлена*.

Доказательство. Пусть $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен с целыми коэффициентами, и несократимая дробь $c = \frac{p}{q}$ – его корень.

Это значит, что $f\left(\frac{p}{q}\right)$ = 0, т. е.

$$a_0\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0,$$
$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0,$$
$$a_nq^n = -(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \cdots + a_{n-1}q^{n-1})p,$$

так что a_nq^nделится на *p*.

Так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то числа *p* и *q* не имеют общих простых делителей, а значит, *p* и q^n также не имеют общих простых делителей. Поэтому a_n делится на *p*.

Точно так же доказывается, что a_0 делится на *q*, и теорема доказана.

Следствие из теоремы о рациональных корнях

Многочлен с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом* 1 *не может иметь дробных корней.

Действительно, если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ – корень такого многочлена, то q делитель старшего коэффициента $a_0 = 1$, так что $q = \pm 1$, т. е. $\frac{p}{q}$ – целое число.

Доказанное следствие можно сформулировать и иначе:

Корни многочлена с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом* 1 *либо целые, либо иррациональные.

Поиск корней уравнения

- Пример. Найти целые корни уравнения
$$x^{51} - 33x^{32} - x + 33 = 0.$$

Решение. Целыми корнями уравнения $x^{51} - 33x^{32} - x + 33 = 0$ могут быть только числа ±1, ±3, ±11, ±33.

Числа 1 и -1 корнями являются (проверка).

Числа ±3, ±11, ±33 корнями не являются (оценка):

$x^{51} - 33x^{32} - x + 33 = x^{32}(x^{19} - 33) + 33 - x$;

$$11^{32}(11^{19} - 33) + 33 - 11 > 0,$$
$$33^{32}(33^{19} - 33) + 33 - 33 > 0,$$
$$(-11)^{32}\left((-11)^{19} - 33\right) + 33 + 11 < 0,$$
$$(-33)^{32}\left((-33)^{19} - 33\right) + 33 + 33 < 0.$$

Поиск корней уравнения

- П р и м е р . Найти целые корни уравнения

$$76x^{215} + 14x^{123} - 891x^{27} + 14x - 97 = 0.$$

Р е ш е н и е . Целыми корнями данного уравнения могут быть только числа ± 1, ± 97.

Числа 1 и -1 корнями не являются (проверка).

Числа 97 и -97 корнями тоже не являются (оценка):

покажем, что старший член $76x^{215}$ «гораздо больше» всех остальных, то есть

$$76|x|^{215} > \; |14x^{123} - 891x^{27} + 14x - 97|.$$

Это действительно так:

$|14x^{123} - 891x^{27} + 14x - 97| \leq 14|x|^{123} + 891|x|^{27} + 14|x| + 97,$

все неравенства

$$14|x|^{123} < |x|^{215}, 891|x|^{27} < |x|^{215}, 14|x| < |x|^{215}, 97 < |x|^{215}$$

выполняются, например, при $|x| > 2$, поэтому числа 97 и -97 не являются корнями данного уравнения.

Поиск корней уравнения

- П р и м е р. Найти рациональные корни уравнения

$$4x^4 + 3x^2 - 1 = 0;$$

Р е ш е н и е. Это квадратное относительно x^2; при $y = x^2$ имеем:

$$4y^2 + 3y - 1 = 0, \text{ его корни – числа } -1 \text{ и } \frac{1}{4}:$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений;

уравнение $x^2 = \frac{1}{4}$ имеет решения $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, данное уравнение имеет всего два корня, и оба они рациональны.

Поиск корней уравнения

- П р и м е р. Найти рациональные корни уравнения

$$16x^3 + 12x^2 - 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Если сделать замену $y = 2x$, то уравнение

$$16x^3 + 12x^2 - 1 = 0$$

принимает вид

$$2y^3 + 3y^2 - 1 = 0,$$

и проверке подлежат только «кандидаты» ± 1 и $\pm\frac{1}{2}$.

Поверка показывает:

-1 и $\frac{1}{2}$ являются корнями данного уравнения;

1 и $-\frac{1}{2}$ – не корни.

Следовательно, исходное уравнение имеет корни $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$.

Поиск корней уравнения

Пример. Доказать, что если α и β – корни соответственно уравнений $x^3 = 3$ и $x^3 = 9$, то сумма $\alpha + \beta$ – иррациональное число.

Решение. Обозначим данное число через c и возведем его в куб, применяя формулу куба суммы в виде $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$:

$c^3 = (\alpha+\beta)^3 = 3 + 9 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 12 + 9c$, $c^3 - 9c - 12 = 0$.

Число c является корнем многочлена $x^3 - 9x - 12$. Так как старший коэффициент этого многочлена равен 1, то его корни либо целые, либо иррациональные, и остается доказать, что число c не является целым.

По теореме о целых корнях, "кандидатами на корень" являются ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12;

непосредственная подстановка показывает, что ни одно из этих чисел не является корнем.

Поэтому число c – иррациональное, что и требовалось доказать.

Поиск корней уравнения

Подстановку чисел ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12 в уравнение можно сократить, если провести оценку чисел α и β:

α – корень уравнения $x^3 = 3$, $\quad 1 < \alpha < 2$;

β – корень уравнения $x^3 = 9$, $\quad 2 < \beta < 3$;

поэтому сумма $3 < \alpha + \beta < 5$, так что осталось исключить единственную возможность $\alpha + \beta = 4$.

Теорема Безу

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена f на двучлен $x - c$ равен $f(c)$ – значению f при $x = c$.*

Доказательство. Разделим f с остатком на $x - c$:

$$f = (x - c)q + r,$$

где q и r – многочлены, причём r имеет степень меньше степени двучлена $x - c$, либо равен 0. Следовательно, r – число.

Из равенства $f = (x - c)q + r$ при $x = c$ получаем:

$$f(c) = 0 \cdot q + r = r,$$

то есть $f = (x - c)q + f(c)$, что и требовалось доказать.

Следствия из теоремы Безу

Следствие 1. *Многочлен f делится на $x - c$ тогда и только тогда, когда число c является корнем f.*

Доказательство.

Если f делится на $x - c$, то остаток от деления равен 0; по теореме Безу остаток равен $f(c)$, так что $f(c) = 0$, то есть c – корень многочлена f.

Обратно, если c – корень многочлена f, то есть $f(c) = 0$, то по теореме Безу в равенстве

$$f = (x - c)q + r$$

остаток $r = f(c) = 0$ и $f = (x - c)q$, так что f делится на $x - c$.

Мы доказали *утверждение о выделении линейного множителя из многочлена*.

Следствия из теоремы Безу

Следствие 2. *Многочлен степени n имеет не более n корней.*

Доказательство. Применим индукцию по степени многочлена.

Для $n = 1$ утверждение верно, так как многочлен 1-й степени $ax + b$ имеет ровно 1 корень (не более одного).

Пусть утверждение верно для всех многочленов степени n; рассмотрим f, такой, что $\deg f = n + 1$ и c – один из корней f. Тогда по следствию 1 многочлен f можно представить в виде

$$f = (x - c)g,$$

где $\deg g = n$.

Если f имеет корень d, отличный от c, то

$$f(d) = (d - c)g(d),$$

откуда $g(d) = 0$, то есть d – корень g.

Так как по предположению индукции g имеет не более n корней, то f имеет не более n корней, отличных от c, и его общее число корней не больше $n + 1$.

Следовательно, данное утверждение верно для многочленов любой степени.

Следствия из теоремы Безу

Следствие 3. *Если значения двух многочленов, степень которых не больше n, совпадают при $n+1$ значении переменной, то эти многочлены равны.*

Доказательство. Пусть многочлены f и g степени не больше n принимают равные значения в $n+1$ точке c_1, c_2, …, c_n.

Предположим противное: $f \neq g$.

Разность $h = f - g$ – ненулевой многочлен, степень которого не больше n.

Для любого $i = 1, \ldots, n$

$$h(c_i) = f(c_i) - g(c_i) = 0.$$

Но тогда многочлен h имеет по крайней мере $n+1$ корень, тогда как его степень не больше n.

Это противоречит следствию 2, и, следовательно, сделанное предположение не верно. Таким образом, $f = g$, что и требовалось доказать.

Мы доказали *теорему 5*.

Схема Горнера для разложения многочлена на множители

Пусть $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 5x + 6$. Составим схему Горнера для $p(x)$ и числа 2:

	3	**– 5**	**– 5**	**6**
2	**3**	**1**	**– 3**	**0**

Так как $p(2) = 0$, то 2 – корень.

Выделим в многочлене $p(x)$ линейный множитель $(x - 2)$:

$$3x^3 - 5x^2 - 5x + 6 =$$
$$= 3x^2(x-2) + 6x^2 - 5x^2 - 5x + 6 = 3x^2(x-2) + x^2 - 5x + 6 =$$
$$= 3x^2(x-2) + x(x-2) + 2x - 5x + 6$$
$$= 3x^2(x-2) + x(x-2) - 3x + 6 =$$
$$= 3x^2(x-2) + x(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(3x^2 + x - 3).$$

Задачи

- Задача [Болтянский, 5.5].

Докажите, что если один из корней квадратного трёхчлена с действительными коэффициентами является действительным числом, то и второй корень действителен и при этом выполняется неравенство $D \geq 0$.

Решение. Возьмём квадратный трёхчлен $f = ax^2 + bx + c$, x_1 – действительный корень f. Тогда по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2},$$

откуда $x_2 = -\frac{b}{2} - x_1$ – разность действительных чисел является действительным числом.

Неравенство $D \geq 0$ выполняется, так как в противном случае оба корня не были бы действительными.

Задачи

- Задача [Болтянский, 5.7].

Может ли уравнение $x^2 + px + q$, где p и q – рациональные числа, иметь следующие корни:

(1) $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$?

(2) $x_1 = \sqrt{2} + 1, x_2 = 1 - \sqrt{2}$?

Ответ: (1) Нет. (2) Да.

Задачи

- Задача [Болтянский, 5.13].

Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Не решая этого уравнения, выразите через a, b и c следующие суммы:

(1) $x_1^4 + x_1^4$.

(2) $x_1^6 + x_1^6$.

Ответы: (1) $\frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$. (2) $\frac{(b^2 - 2ac)(b^4 - 4ab^2c + a^2c^2)}{a^6}$.

Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1GsKcsi2KIZN5i8S6NFtfX1MMutjbf3CwFHgeqkgUBdc/edit?usp=sharing

Задание 1. Для всех действительных чисел x квадратный трёхчлен $3x^2 - 2x - 1$ равен:

(1) $(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

(2) $3(x+1)(x-1)$.

(3) $3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)$.

(4) Другое.

Для самостоятельного решения

Задание 2. Дан многочлен $f = -2x^2 - x + 1$. Известно, что $f(-1) = 0$. Тогда в многочлене f можно выделить линейный множитель:

(1) $x - 1$.

(2) $x + 1$.

(3) $-x - 1$.

(4) Другое.

Для самостоятельного решения

Задание 3. Даны два многочлена:

$$f = 2x^2 + 8x - 10 \text{ и } g = 2(x+5)(ax+b).$$

Многочлены f и g равны, если:

(1) $a = 1$ и $b = 1$.

(2) $a = -1$ и $b = -2$.

(3) $a = 1$ и $b = -1$.

(4) Другое.

Для самостоятельного решения

Задание 4. Число -1 является корнем уравнения E: $-2x^2 + 3x + 5 = 0$. Другой корень уравнения равен:

(1) $\frac{5}{2}$.

(2) $-\frac{5}{2}$.

(3) 5.

(4) Другое.

Для самостоятельного решения

- Задание 5. Найдите ошибку в рассуждении:

«Возьмём три различных числа a, b, c и рассмотрим уравнение

E: $\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1.$

Так как

(1) в знаменателе каждой дроби стоит число;

(2) в числителе каждой дроби – многочлен второй степени;

(3) в левой части уравнения – многочлен второй степени;

(4) числа a, b и c удовлетворяют этому уравнению,

то записанное квадратное уравнение имеет три различных корня».

Литература

- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.

КОНЕЦ СЕМИНАРА