Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Комплексные числа и тригонометрия

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Комплексные числа и тригонометрия

ПЛАН

- Структура курса.
- Гимнастика для глаз.
- Комплексные числа на ЕГЭ.
- Тригонометрическая форма комплексного числа.
- Формула Муавра.

Все учебные материалы доступны:

на канале telegram: https://t.me/joinchat/RRkFmRBlv1tM_urv

на сайте: http://emmom.ru

Программа курса

- Комплексные числа-2.
- Многочлены с одной переменной.
- Многочлены с несколькими переменными.
- Уравнения и неравенства.
- Приближённые методы решения уравнений.

Объём курса (магистратура)

- 4 лекции
- 12 практических занятий
- 2 контрольные работы
- Экзамен
- Самостоятельная работа студентов

Максимальное количество баллов

• Лекции (присутствие и тест)	$4 \cdot 5 = 20$
• Практические занятия (присутствие и тест)	$12 \cdot 10 = 120$
• Контрольные работы	$2 \cdot 30 = 60$
• Экзамен	50
• Другое (реферат)	по факту
• Итого	250 баллов

Шкала оценок

БАЛЛЫ НА АТТЕСТАЦИИ (%)

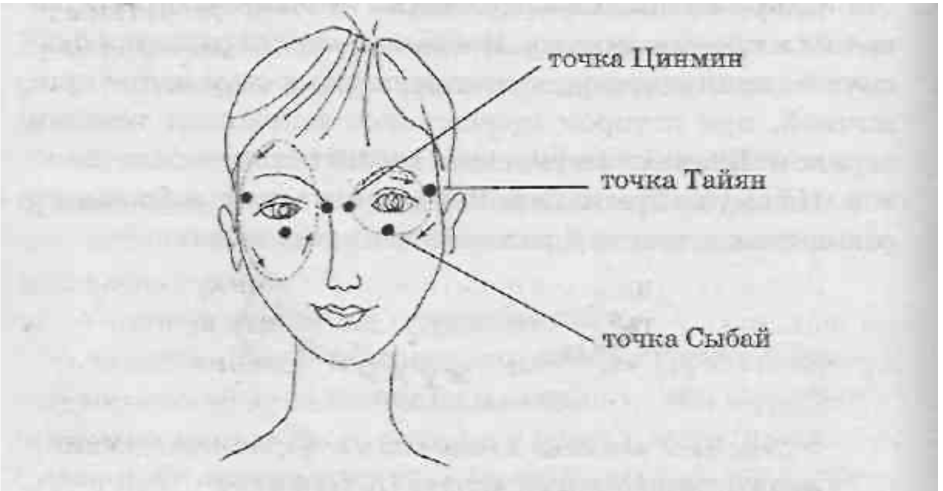
- 0-49 – «неудовлетворительно»
- 50-64 – «удовлетворительно»
- 65-84 – «хорошо»
- 85-100 – «отлично»

Гимнастика для глаз

Комплекс разработан Пекинским институтом детского здравоохранения.

Источник: Ше Я Линь. В Китае нет близоруких детей // Народное образование, 1998. № 9/10, с. 215.

Иллюстрации: https://zdd.1sept.ru/2007/12/8.html, https://bereginiya-007.livejournal.com/325487.html



Упражнение первое

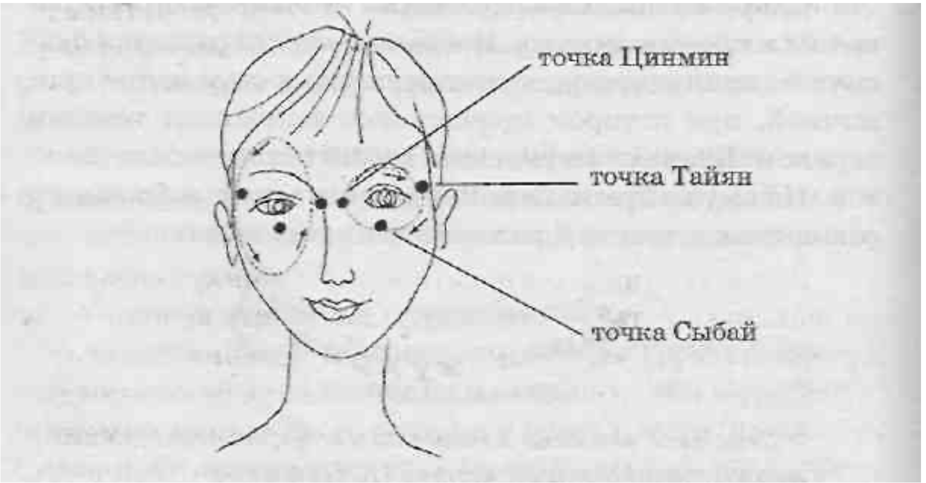
Легкое нажатие точки Цинмин.

Точка Цинмин находится посередине между внутренним углом глаза и верхней точкой переносицы. Здесь есть небольшая впадина на кости.

Большими пальцами обеих рук – левой рукой слева, правой рукой справа – слегка надавливать эти точки в сторону переносицы.

Нажатия производятся восемь раз.

Руки обязательно должны быть чистыми.



Упражнение второе

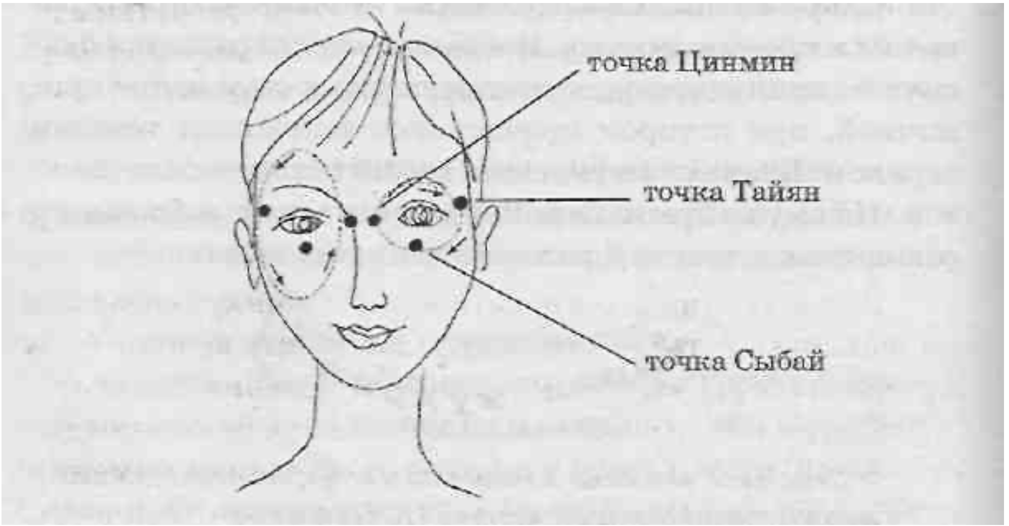
Круговой массаж орбиты глаза.

Точку Тайан найти так: прикоснувшись пальцем посредине между наружным углом глаза и наружным концом брови, отвести его чуть в сторону затылка, где находится впадинка.

Большие пальцы обеих рук устанавливаются с двух сторон лица на точке Тайян. Указательные пальцы располагаются на глазных орбитах. Держа большие пальцы на точке Тайян, производить массаж вокруг глаз.

Нужно четыре раза нажать на эту точку и четыре раза обвести указательным пальцем вокруг глаза.

Руки обязательно должны быть чистыми.



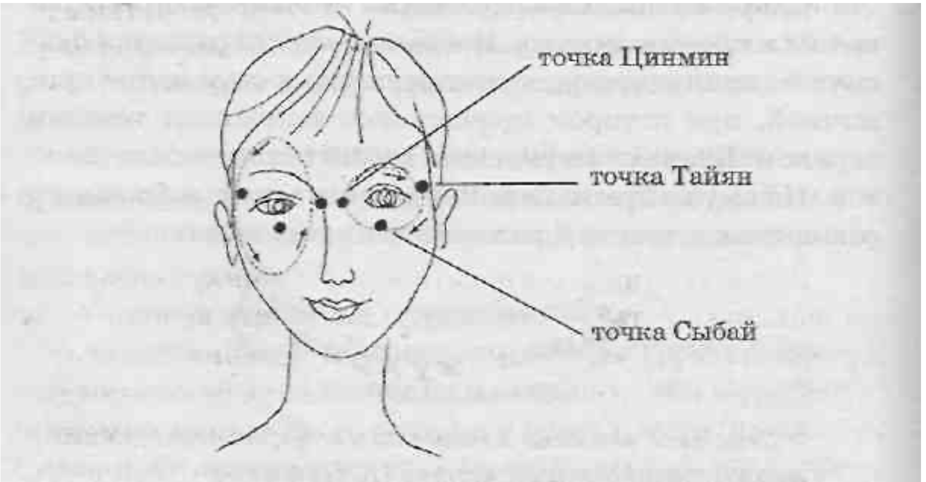
Упражнение третье

Легкое надавливание точки Сыбай указательными пальцами обеих рук.

Важно правильно найти точку Сыбай: от середины глаза мысленно провести линию вниз, до впадины на кости.

Точка четыре раза массируется движениями, направленными внутрь лица, четыре раза – наружу.

Руки обязательно должны быть чистыми.



Упражнение четвертое

«Сухое умывание».

Найти точку Тайан: прикоснувшись пальцем посредине между наружным углом глаза и наружным концом брови, отвести его чуть в сторону затылка, где находится впадинка.

Пальцами обеих рук проводят круговое движение от рта к носу, ко лбу и по точке Тайян сбоку. Делая упражнение, считают до четырех.

Каждое упражнение повторяется четыре раза подряд. Руки обязательно должны быть чистыми.

Гимнастика для глаз

(1) Легкое нажатие точки Цинмин.

Большими пальцами обеих рук 8 раз слегка надавливать точки Цинмин в сторону переносицы.

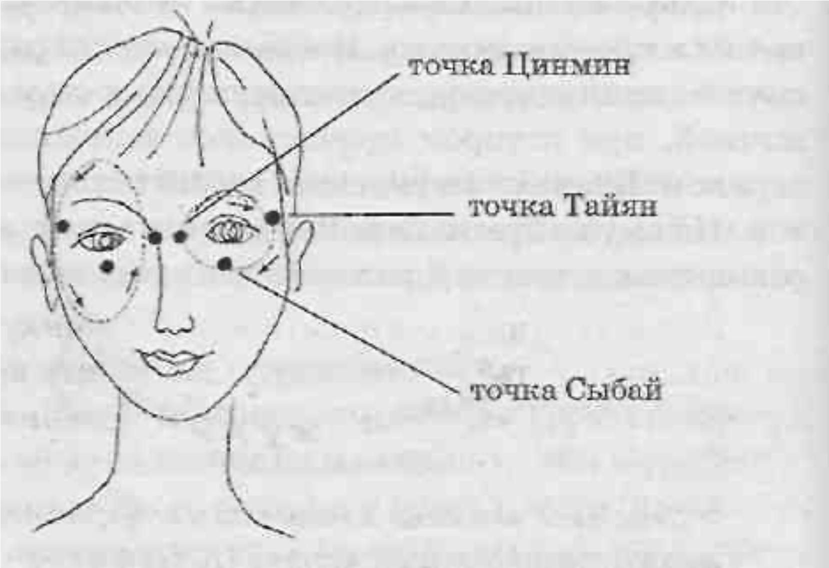
(2) Круговой массаж орбиты глаза.
Четыре раза нажать на точку Тайян и обвести указательным пальцем вокруг глаза.

(3) Легкое надавливание точки Сыбай указательными пальцами обеих рук.

Точка Сыбай четыре раза массируется движениями, направленными внутрь лица, четыре раза – наружу.

(4) «Сухое умывание».

Считая до четырех. пальцами обеих рук проводят круговое движение от рта к носу, ко лбу и по точке Тайян сбоку.



Каждое упражнение повторяется четыре раза подряд.

Руки обязательно должны быть чистыми.

Комплексные числа на ЕГЭ

ФИПИ опубликовал для общественного обсуждения перспективные модели измерительных материалов. Решение о включении в КИМ ЕГЭ по учебному предмету заданий из перспективной модели будет приниматься после общественно-профессионального обсуждения и апробации. Обновление экзаменационных моделей ЕГЭ планируется проводить поэтапно, на протяжении нескольких лет, начиная с 2022 года.

Комплексные числа на ЕГЭ

- Задача 11 (С кратким ответом). Про комплексное число z известно, что $|z-4-7i|=|z+4-i|$. Найдите наименьшее значение $|z|$.

Комплексные числа на ЕГЭ

Р е ш е н и е I. Пусть $z = a + bi$. Тогда

$$|z - 4 - 7i|^2 = |(a-4) + (b-7)i|^2 = (a-4)^2 + (b-7)^2 =$$
$$= a^2 - 8a + b^2 - 14b + 65,$$

$$|z + 4 - i|^2 = |(a+4) + (b-1)i|^2 = (a+4)^2 + (b-1)^2 =$$
$$= a^2 + 8a + b^2 - 2b + 17.$$

Следовательно,

$$a^2 - 8a + b^2 - 14b + 65 = a^2 + 8a + b^2 - 2b + 17,$$
$$16a + 12b = 48,$$
$$4a + 3b = 12.$$

Комплексные числа на ЕГЭ

Таким образом, задача сводится к нахождению наименьшего числа $a^2 + b^2$, если $4a + 3b = 12$. Выразим b через a:

$$3b = -4a + 12,$$

тогда

$$9(a^2 + b^2) = 9a^2 + 16a^2 - 96a + 144 = 25a^2 - 96a + 144 =$$

$$= \left(5a - \frac{48}{5}\right)^2 + \frac{1296}{25}.$$

Так как $\left(5a - \frac{48}{5}\right)^2 \geq 0$, то

$\min[9(a^2 + b^2)] = \frac{1296}{25}$, $\min(a^2 + b^2) = \frac{144}{25}$,

$\min\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{12}{5}$.

Комплексные числа на ЕГЭ

Р е ш е н и е II. Рассмотрим геометрическую интерпретацию:

Комплексные числа z такие, что

$$|z - 4 - 7i| = |z + 4 - i|,$$

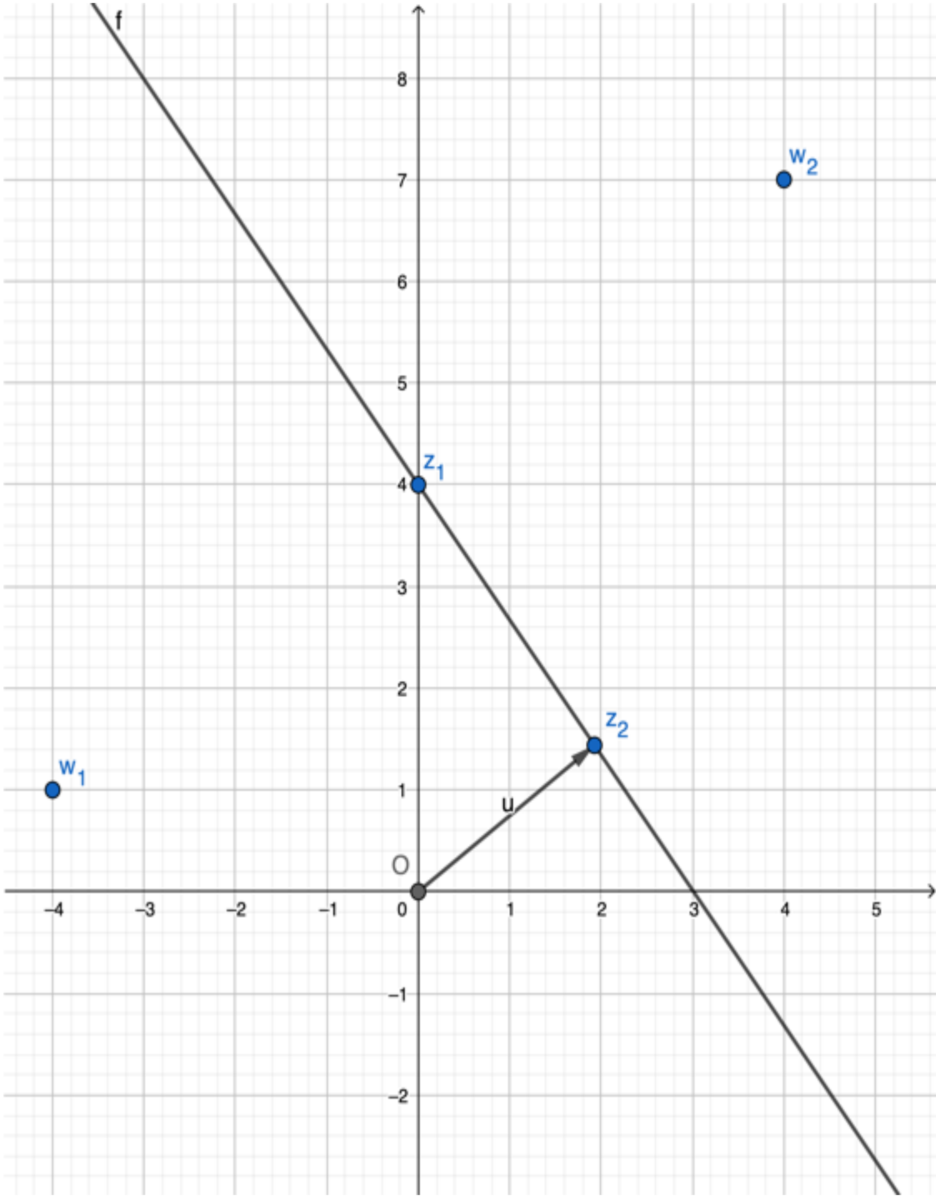
расположены на серединном перпендикуляре к отрезку с вершинами в точках

$$w_1 = -4 + i \text{ и } w_2 = 4 + 7i.$$

Эта прямая имеет угловой коэффициент -4/3 и проходит через точку $z_2 = 4i$ – середину отрезка с вершинами в точках w_1 и w_2, то есть отсекает на осях координат соответственно отрезки 3 и 4.

Наименьший модуль имеет точка z_2, которая лежит в основании высоты треугольника с катетами 3 и 4, проведённой к его гипотенузе из вершины прямого угла.

Ответ: 2,4.



Тригонометрическая форма комплексного числа

В записи комплексного числа, отличного от 0, можно выделить его модуль:

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i\right)$$

Выражение в скобках обладает следующим свойством:

сумма квадратов чисел $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ равна 1,

то есть комплексные числа вида $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i$ расположены на окружности с центром в начале координат и радиусом 1.

Тригонометрическая форма комплексного числа

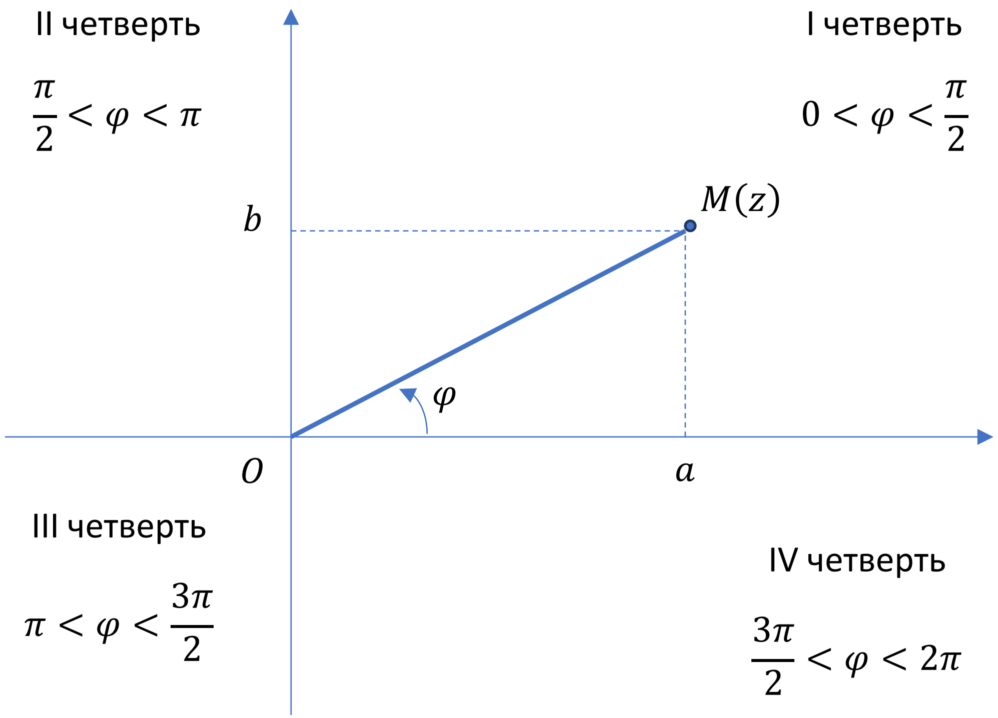
Рассмотрим на плоскости комплексных чисел точку $M(z)$ и угол φ между положительным направлением действительной оси и лучом OM.

Угол φ :

(1) $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

(2) Этот угол определён с точностью до 2π.

Угол φ (в радианах) называют аргументом комплексного числа z и записывают: $\arg z$. Один из таких углов лежит в интервале $[0, 2\pi)$ и считается *главным аргументом*.



Тригонометрическая форма комплексного числа

Всякое *отличное от нуля* комплексное число $z = a + bi$ можно записать в *тригонометрической* форме:

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r — модуль числа z, φ — аргумент числа z (не обязательно главный), $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

В сокращённой записи вместо

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

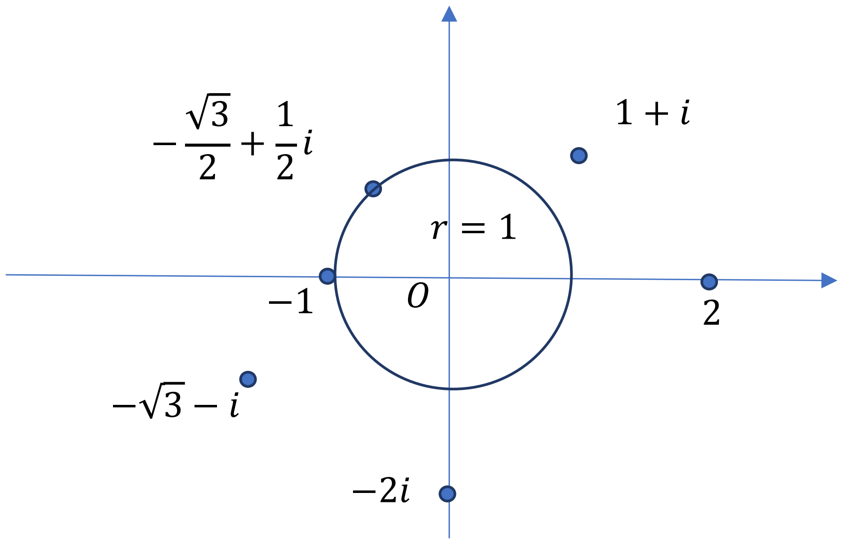
указывают только модуль и аргумент и пишут

$$z = [r, \varphi].$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i\right)$$

z	r	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	φ
$1 + i$	$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
-1	$\sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$	-1	0	π
$-\sqrt{3} - i$	$\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$
$-2i$	$\sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$	0	-1	$\frac{3\pi}{2}$
2	$\sqrt{2^2 + 0^2} = 2$	1	0	0



Тригонометрическая форма комплексного числа

Аргумент комплексного числа можно найти, используя другую идею.

Если $z = a + bi, a \neq 0$ и φ — аргумент числа z, то

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

При этом надо учитывать, что аргумент комплексного числа лежит в интервале от 0 до 2π:

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i,$$

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \mathrm{tg}\varphi_2 = -1, \text{ но } \varphi_1 \neq \varphi_2.$$

Поэтому прежде, чем вычислять аргумент, определяют координатную четверть, в которой лежит точка, изображающая данное комплексное число:

$$z_1 = \left[1, \frac{3\pi}{4}\right], z_2 = \left[1, \frac{7\pi}{4}\right].$$

Умножение и деление комплексных чисел

Возьмём два ненулевых комплексных числа:

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ и } w = s(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Перемножим их:

$$zw = rs(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$$
$$= rs\big(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\big) =$$
$$= rs(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Умножение и деление комплексных чисел

Произведение двух комплексных чисел в тригонометрической форме равно комплексному числу, модуль которого равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов множителей:

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\alpha}] \cdot [\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{rs}, \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}],$$

или, в стандартном виде:

$$\boldsymbol{r}(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{s}(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\beta}) =$$

$$= \boldsymbol{rs}(\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})).$$

Умножение и деление комплексных чисел

Формула деления следует из равенства:

$$\frac{z}{w} \cdot w = z.$$

Частное двух комплексных чисел в тригонометрической форме равно комплексному числу, модуль которого равен частному модулей, а аргумент — разности аргументов делимого и делителя:

$$\frac{[\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}]}{[\boldsymbol{s},\boldsymbol{\beta}]} = \left[\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\right],$$

или, в стандартном виде:

$$\frac{\boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{s}(\cos\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\beta})} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{s}}(\cos(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{i}\sin(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})).$$

Формула Муавра

Используя правило умножения комплексных чисел, можно получить формулу возведения комплексного числа в любую натуральную степень. Так, частные случаи

$$[r;\alpha]^2 = [r;\alpha]\cdot[r;\alpha] = [r^2;2\alpha];$$

$$[r;\alpha]^3 = [r;\alpha]^2\cdot[r;\alpha] = [r^2;2\alpha]\cdot[r;\alpha] = [r^3;3\alpha];$$

нетрудно обобщить и прийти к формуле

$$[r;\alpha]^n = [r^n;n\alpha],$$

которая может быть доказана методом математической индукции.

Формула Муавра

Комплексное число, возведённое в натуральную степень, равно комплексному числу, модуль которого равен модулю данного числа в этой степени, а аргумент — произведению аргумента данного числа и показателя степени:

$$[\boldsymbol{r};\boldsymbol{\alpha}]^{\boldsymbol{n}}=[\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{n}};\boldsymbol{n\alpha}]\,,\boldsymbol{n}\in\mathbb{N},$$

или, в стандартном виде:

$$\left(\boldsymbol{r}(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha})\right)^{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{n}}(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{n\alpha}+\boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{n\alpha}),\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}.$$

Эту формулу в 1707 г. открыл Абрахам де Муавр — ученик и помощник Исаака Ньютона.

Формула Муавра

Формула Муавра остаётся в силе и для отрицательных показателей степени:

$$\left(\boldsymbol{r}(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha})\right)^{-\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{r}^{-\boldsymbol{n}}(\mathbf{cos}(-\boldsymbol{n\alpha})+\boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}(-\boldsymbol{n\beta})), \boldsymbol{n}\in\mathbb{N}.$$

Формула Муавра

П р и м е р. Получим тригонометрические формулы для кратных углов.

По формуле Муавра

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha.$$

Если раскрыть скобки, используя формулу бинома Ньютона, то получим:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha;$$

приравняем правые части равенств:

$$\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = \cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha,$$

и получим известные формулы синуса и косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Формула Муавра

Формула Муавра также используется при извлечении корней из комплексных чисел (справа налево):

$$\boldsymbol{[r; \alpha + 2k\pi]^{\frac{1}{n}} = \left[r^{\frac{1}{n}}; \frac{\alpha+2k\pi}{n}\right], k = 0, 1, \ldots, n - 1, n \in \mathbb{N}.}$$

В множестве комплексных чисел уравнение вида $z^n = a + bi$ имеет ровно nкорней.

Это утверждение является следствием основной теоремы алгебры, но наглядное представление можно дать при помощи поворотной симметрии относительно начала координат соответствующих точек плоскости комплексных чисел.

Для самостоятельного решения

Ссылка: https://docs.google.com/forms/d/1g81c5RnEn_gtQFqW5uVSlg2zHIlHqZova8pKEcECG1A/edit?usp=sharing

Вопрос 1. Укажите запись числа $3-i$ в тригонометрической форме. Выберите все верные ответы:

(1) $\sqrt{10}\left(\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+i\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right)$.

(2) $\sqrt{10}\left(\cos\left(2\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+i\sin\left(2\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right)$.

(3) $\sqrt{10}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+i\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right)$.

(4) $\sqrt{10}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)-i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\right)$.

Для самостоятельного решения

Вопрос 2. Для пары комплексных чисел $z = \left[1, \frac{17\pi}{12}\right]$ и $w = \left[3, \frac{5\pi}{12}\right]$ вычислите $zw, \frac{z}{w}, \frac{1}{w}$ и заполните таблицу:

	$\left[\frac{1}{3}; \pi\right]$	$\left[\frac{1}{3}; \frac{19\pi}{12}\right]$	$\left[3; \frac{11\pi}{6}\right]$
zw			
$\frac{z}{w}$			
$\frac{1}{w}$			

Для самостоятельного решения

Вопрос 3. Поделитесь, пожалуйста, вашим мнением

Литература

Лекция опубликована в журнальной версии (см. Седова Е.А., Пчелинцев С.В., Удовенко Л.Н. Комплексные числа в школьном математическом образовании: тригонометрия комплексных чисел // Математика в школе. 2019. № 3. С. 36—53.)

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ