Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Многочлены

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Многочлены

ПЛАН

- Гимнастика для глаз.
- Понятие многочлена. Стандартный вид многочлена. Степень многочлена. Равенство многочленов.
- Теорема о целых корнях. Теорема о рациональных корнях. Следствие из теоремы о рациональных корнях.
- Значение многочлена. Схема Горнера. Деление многочленов.
- Теорема Безу. Следствия из теоремы Безу.
- Основная теорема алгебры.

Все учебные материалы доступны:

на канале telegram: https://t.me/joinchat/RRkFmRBlv1tM_urv

на сайте: http://emmom.ru

Гимнастика для глаз

(1) Легкое нажатие точки Цинмин.

Большими пальцами обеих рук 8 раз слегка надавливать точки Цинмин в сторону переносицы.

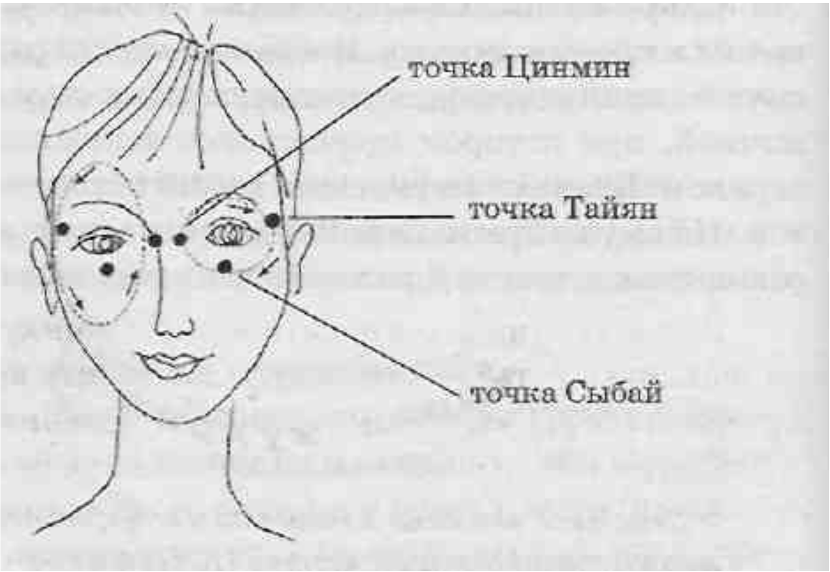
(2) Круговой массаж орбиты глаза.
Четыре раза нажать на точку Тайян и обвести указательным пальцем вокруг глаза.

(3) Легкое надавливание точки Сыбай указательными пальцами обеих рук.

Точка Сыбай четыре раза массируется движениями, направленными внутрь лица, четыре раза – наружу.

(4) «Сухое умывание».

Считая до четырех, пальцами обеих рук проводят круговое движение от рта к носу, ко лбу и по точке Тайян сбоку.



Каждое упражнение повторяется четыре раза подряд.

Руки обязательно должны быть чистыми.

Понятие многочлена

Многочлен от x (с переменной x) – это выражение, составленное из чисел и буквы x с помощью знаков сложения и умножения.

Для краткости используют знак минус и обозначение степени с натуральным показателем $(n > 1)$; не пишут знак умножения между числом и буквой x.

Примеры многочленов: $3x^2 - 2x + 1$, x^3, 5, 0.

Иногда используют символ первой степени x^1 и символ нулевой степени x^0, заменяющий 1:

$$5x^2 + 2x^1 + 3x^0,$$

Не являются многочленами: $\sqrt{x^2}$, $\frac{x^2-1}{x-1}$.

Стандартный вид многочлена

С помощью *алгебраических преобразований* (перестановки слагаемых, раскрытия скобок и приведения подобных членов) многочлен можно привести к виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x\ + a_n,$$

где n натуральное число, a_0 , a_1, …, a_n – числа (коэффициенты многочлена), x – символ, вместо которого можно подставить любое число.

Если старший коэффициент $a_0 \neq 0$, то эту запись называют – **стандартным видом многочлена**.

Многочлены стандартного вида

В многочлене стандартного вида

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x\ + a_n$$

a_0x^n – старший член;

a_n– свободный член;

a_0 – старший коэффициент;

n – степень многочлена.

Значение многочлена при x = 0 равно свободному члену, а при x = 1 – сумме всех коэффициентов этого многочлена, записанного в стандартном виде.

Многочлены стандартного вида

- П р и м е р. Найти сумму коэффициентов многочлена

$$p(x) = (5x^2 + x - 7)^{2020} + 2020x,$$

записанного в стандартном виде.

Многочлены стандартного вида

- О т в е т. Сумма коэффициентов многочлена

$$p(x) = (5x^2 + x - 7)^{2020} + 2020x$$

равна $p(1) = 2021$.

Многочлены стандартного вида

- П р и м е р. Доказать, что не существует многочлена с целыми коэффициентами, квадрат которого был бы равен многочлену

$$x^{2022} + x^{2021} + x^{2020} + x^{2019} + \cdots + x + 1.$$

Степень многочлена

Степень многочлена p обозначают символом $\mathbf{deg}\ \boldsymbol{p}$.

$$\deg pq = \deg p + \deg q;$$

$$\deg (p + q) \le \min (\deg p; \deg q).$$

- Примеры.

$$p(x) = 5x^2 + x - 1, \qquad \deg p = 2;$$

$$q(x) = 2020x + 2021, \qquad \deg q = 1;$$

$$r(x) = 2020 = 2020x^0, \qquad \deg r = 0.$$

Если при упрощении многочлена все его коэффициенты обращаются в нуль, такой многочлен называют **нулевым многочленом**. Нулевой многочлен не имеет степени.

Равенство многочленов

Многочлены $p(x)$ и $q(x)$ **равны**, если они имеют одинаковый стандартный вид.

Теорема 1. *Если* $p(x) = q(x)$, *то* $(\forall c \in \mathbb{C})\ p(c) = q(c)$.

Теорема 2. *Если* $(\forall c \in \mathbb{C})\ p(c) = q(c)$, *то* $p(x) = q(x)$.

Теорема 3. *Если* $p(x) \neq q(x)$, *то* $(\exists c \in \mathbb{C})\ p(c) \neq q(c)$.

Теорема 4. *Если* $(\exists c \in \mathbb{C})\ p(c) \neq q(c)$, *то* $p(x) \neq q(x)$.

Теорема 5. *Если* $p(x)$ *и* $q(x)$ *– многочлены степени не выше* n *и их значения совпадают в* $n+1$ *точке, то* $p(x) = q(x)$.

Примеры

- Пример. Проверить, верно ли выполнено умножение многочленов
$$(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)(x + 1) = x^6 + 1.$$

Обозначим многочлены в левой и правой частях равенства через $p(x)$ и $q(x)$. Подставим несколько значений переменной (по теореме 5 число проб не больше 7):

$$p(0) = q(0) = 1, \quad p(1) = q(1) = 0, \quad p(-1) = 0, q(-1) = 2.$$

Следовательно, $p(x) \neq q(x)$.

Примеры

- П р и м е р. Подобрать числа a, b и c так, чтобы выполнялось равенство
$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}.$$

Примеры

- Р е ш е н и е.

Приведём дроби к общему знаменателю

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Многочлены в числителях дробей должны быть равны:

$$x+5 = a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)\,(x-2). \qquad (*)$$

I с п о с о б. Представим многочлен в правой части равенства (*) в стандартном виде:

$$x+5 = (a+b+c)x^2 - (5a+4b+3c) + (6a+3b+2c).$$

По определению равенства многочленов должны выполняться соотношения:

$a+b+c=0$, $5a+4b+3c=-1$, $6a+3b+2c=5$, откуда $a=3$, $b=-7$, $c=4$.

Примеры

II способ. Так как многочлены в левой и правой частях равенства (*) не выше второй степени, то по теореме 5 достаточно потребовать совпадения их значений в трёх точках:

при $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$ равенство принимает вид, соответственно,

$$6 = 2a, \qquad 7 = -b, \qquad 8 = 2c,$$

откуда $a = 3, b = -7, c = 4$.

Примеры

П р и м е р. Возьмём три различных числа a, b, c и рассмотрим уравнение

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1.$$

Так как

(1) в знаменателе каждой дроби стоит число;

(2) в числителе каждой дроби – многочлен второй степени;

(3) в левой части уравнения – многочлен второй степени;

(4) числа a, b и c удовлетворяют этому уравнению,

то записанное квадратное уравнение имеет три различных корня.

Найти ошибки в рассуждении.

Примеры

В левой части уравнения – многочлен *не выше* второй степени. Так как в правой части уравнения – тоже многочлен не выше второй степени и значения этих многочленов совпадают в трёх точках, то по теореме 5 эти многочлены равны. Следовательно, если многочлен в левой части уравнения привести к стандартному виду, получится 1.

Поэтому записанное уравнение является не квадратным уравнением, а тождеством $1 \equiv 1$.

Теорема о целых корнях

Теорема 6 (о целых корнях). *Всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена*.

Доказательство. Пусть $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен с целыми коэффициентами, и целое число *k* – его корень.

Тогда

$$f(k) = 0, \text{ т. е. } a_0k^n + a_1k^{n-1} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$

откуда

$$a_n = -(a_0k^{n-1} + a_1k^{n-2} + \cdots + a_{n-1})k.$$

Так как все числа в этом равенстве, по условию, целые, то оно означает, что a_n делится на *k*, т.е. *k* действительно является делителем свободного члена a_n многочлена *f*, что и требовалось доказать.

Теорема о рациональных корнях

Теорема 7 (о рациональных корнях). *Если число* $c = \frac{p}{q}$, *где дробь* $\frac{p}{q}$ *несократима, является корнем члена многочлена с целыми коэффициентами, то p – делитель свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента этого многочлена*.

Доказательство. Пусть $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен с целыми коэффициентами, и несократимая дробь $c = \frac{p}{q}$ – его корень.

Это значит, что $f\left(\frac{p}{q}\right)$ = 0, т. е.

$$a_0\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0,\ a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0,$$

$$a_nq^n = -(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \cdots + a_{n-1}q^{n-1})p,$$

так что a_nq^nделится на *p*.

Так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то числа *p* и *q* не имеют общих простых делителей, а значит, *p* и q^n также не имеют общих простых делителей. Поэтому a_n делится на *p*.

Точно так же доказывается, что a_0 делится на *q*, и теорема доказана.

Следствие из теоремы о рациональных корнях

Многочлен с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом* 1 *не может иметь дробных корней.

Действительно, если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ – корень такого многочлена, то q делитель старшего коэффициента $a_0 = 1$, так что $q = \pm 1$, т. е.$\frac{p}{q}$ – целое число.

Доказанное следствие можно сформулировать и иначе:

Корни многочлена с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом* 1 *либо целые, либо иррациональные.

Значение многочлена

Пусть c – некоторое число. **Значением многочлена** $p(x)$ при $x=c$ называется число, которое получится, если в $p(x)$ вместо x подставить число c и произвести указанные действия.

- Пример. Многочлен

$$p(x)=9x^4-x^2+2x-4$$

при $x=5$ принимает значение $p(5)=5606$.

На калькуляторе удобно выполнять вычисления так:

$$9x^4+0\cdot x^3-1\cdot x^2+2x-4=$$
$$=(9x^3+0\cdot x^2-1\cdot x+2)\cdot x-4=$$
$$=\big((9x^2+0\cdot x-1)\cdot x+2\big)\cdot x-4=$$
$$=\Big(\big((9x+0)\cdot x-1\big)\cdot x+2\Big)\cdot x-4;$$
$$p(5)=\Big(\big((9\cdot 5+0)\cdot 5-1\big)\cdot 5+2\Big)\cdot 5-4=5606.$$

Схема Горнера

Запишем цепочку вычисления в виде таблицы:

	9	0	– 1	2	– 4
5	9	+ 9 · 5 = 45	+ 45 · 5 = 224	+ 224 · 5 = 1122	+ 1122 · 5 = 5606

Без промежуточных вычислений:

	9	0	– 1	2	– 4
5	9	45	224	1122	5606

Если последнее число схемы Горнера для многочлена $p(x)$ и числа c равно 0, то c – корень $p(x)$.

Примеры

- Пример. Найти целые корни уравнения

а) $x^{51} - 33x^{32} - x + 33 = 0$;

б) $76x^{215} + 14x^{123} - 891x^{27} + 14x - 97 = 0$.

Решение.

а) Целыми корнями уравнения $x^{51} - 33x^{32} - x + 33 = 0$ могут быть только числа ± 1, ± 3, ± 11, ± 33.

Числа 1 и -1 корнями являются (проверка).

Числа ± 3, ± 11, ± 33 корнями не являются (оценка):

$$x^{51} - 33x^{32} - x + 33 = x^{32}(x^{19} - 33) + 33 - x;$$

$$11^{32}(11^{19} - 33) + 33 - 11 > 0,$$

$$33^{32}(33^{19} - 33) + 33 - 33 > 0,$$

$$(-11)^{32}(11^{19} + 33) + 33 + 11 > 0,$$

$$(-33)^{32}(33^{19} + 33) + 33 + 33 > 0.$$

Решение.

б) Целыми корнями данного уравнения могут быть только числа ± 1, ± 97.

Числа 1 и -1 корнями не являются (проверка).

Числа 97 и -97 корнями тоже не являются (оценка):

покажем, что старший член $76x^{215}$ «гораздо больше» всех остальных, то есть

$$76|x|^{215} > |14x^{123} - 891x^{27} + 14x - 97|.$$

Это действительно так:

$$|14x^{123} - 891x^{27} + 14x - 97| \leq 14|x|^{123} + 891|x|^{27} + 14|x| + 97,$$

все неравенства

$$14|x|^{123} < |x|^{215}, 891|x|^{27} < |x|^{215}, 14|x| < |x|^{215}, 97 < |x|^{215}$$

выполняются, например, при $|x| > 2$, поэтому числа 97 и -97 не являются корнями данного уравнения.

Примеры

- П р и м е р. Найти рациональные корни уравнения

а) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$;

б) $16x^3 + 12x^2 - 1 = 0$.

Решение.

а) Уравнение $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ квадратное относительно x^2; при $y = x^2$ имеем:

$4y^2 + 3y - 1 = 0$, его корни – числа -1 и $\frac{1}{4}$;

уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений;

уравнение $x^2 = \frac{1}{4}$ имеет решения $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, данное уравнение имеет всего два корня, и оба они рациональны.

Решение.

б) Если сделать замену $y = 2x$, то уравнение $16x^3 + 12x^2 - 1 = 0$ принимает вид $2y^3 + 3y^2 - 1 = 0$, и проверке подлежат только «кандидаты» ± 1 и $\pm\frac{1}{2}$.

Поверка показывает:

-1 и $\frac{1}{2}$ являются корнями данного уравнения;

1 и $-\frac{1}{2}$ – не корни.

Следовательно, исходное уравнение имеет корни $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$.

Примеры

- Пример. Доказать, что число $\sqrt{3}$ является иррациональным.

Примеры

- Пример. Доказать, что если α и β – корни соответственно уравнений $x^3 = 3$ и $x^3 = 9$, то сумма $\alpha + \beta$ – иррациональное число.

Решение.

Обозначим данное число через c и возведем его в куб, применяя формулу куба суммы в виде $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$:

$c^3 = (\alpha+\beta)^3 = 3 + 9 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 12 + 9c$, $c^3 - 9c - 12 = 0$.

Число c является корнем многочлена $x^3 - 9x - 12$. Так как старший коэффициент этого многочлена равен 1, то его корни либо целые, либо иррациональные, и остается доказать, что число c не является целым.

По теореме о целых корнях, "кандидатами на корень" являются ± 1, ± 2, $\pm\ 3$, ± 4, ± 6, ± 12;

непосредственная подстановка показывает, что ни одно из этих чисел не является корнем.

Поэтому число c – иррациональное, что и требовалось доказать.

Решение.

Подстановку чисел ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12 в уравнение можно сократить, если провести оценку чисел α и β:

α – корень уравнения $x^3 = 3$, $\quad 1 < \alpha < 2$;

β – корень уравнения $x^3 = 9$, $\quad 2 < \beta < 3$;

поэтому сумма $3 < \alpha + \beta < 5$, так что осталось исключить единственную возможность $\alpha + \beta = 4$.

Ещё раз о схеме Горнера

Пусть $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 5x + 6$. Составим схему Горнера для $p(x)$ и числа 2:

	3	**– 5**	**– 5**	**6**
2	**3**	**1**	**– 3**	**0**

Так как $p(2) = 0$, то 2 – корень.

Выделим в многочлене $p(x)$ линейный множитель $(x - 2)$:

$$3x^3 - 5x^2 - 5x + 6 =$$
$$= 3x^2(x-2) + 6x^2 - 5x^2 - 5x + 6 = 3x^2(x-2) + x^2 - 5x + 6 =$$
$$= 3x^2(x-2) + x(x-2) + 2x - 5x + 6 = 3x^2(x-2) + x(x-2) - 3x + 6 =$$
$$= 3x^2(x-2) + x(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(3x^2 + x - 3).$$

Сравните коэффициенты второго множителя с числами в схеме Горнера.

Верно ли, что если c – корень многочлена, то в нём можно выделить линейный множитель $(x - c)$?

Деление многочленов

Многочлен f **делится на** многочлен g, если существует такой многочлен h, что $f = gh$.

- Пример 1. Многочлен $x^2 - 1$ делится на $x - 1$, так как $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.
- Пример 2. Многочлен $x^2 + 1$ не делится на $x - 1$.

Докажем это методом от противного: пусть $x^2 + 1$ делится $(x - 1)$; тогда имеет место тождество

$$x^2 + 1 = (x - 1)p(x),$$

где $p(x)$ – некоторой многочлен.

Но при $x = 1$ правая часть этого тождества обращается в 0, а левая – нет. Поэтому сделанное предположение неверно, и многочлен $x^2 + 1$ не делится на $x - 1$.

Деление с остатком

Разделить многочлен f на многочлен g **с остатком** означает представить f в виде $f = gq + r$, где q и r – многочлены, причём r имеет степень меньше степени g, либо равен 0.

Теорема 6. *Пусть f и g – многочлены, $g \neq 0$. Тогда существуют такие многочлены q и r, что*

$$f = gq + r, \qquad (*)$$

где $\deg r < \deg g$ или $g = 0$.

Указанными условиями многочлены q и r определяются однозначно.

Деление с остатком

Доказательство.

Если $f = 0$, то равенство (*) выполняется при $q = 0$ и $r = 0$, то есть искомые многочлены существуют.

Пусть $f \neq 0$ и пусть

$$\deg f = n, f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$\deg g = m, g = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m.$$

Если $n < m$, то равенство (*) выполняется при $q = 0$ и $r = f$, то есть требуемые многочлены найдены.

Деление с остатком

Пусть $n \geq m$, то рассмотрим многочлены

$$q^* = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \text{ и } f^* = f - q^* g.$$

Задание 1. Запишите старший член многочлена $q^* g$.

Задание 2. Что можно сказать о степени многочлена f^*?

Деление с остатком

Мы рассматриваем многочлены

$$q^* = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \text{ и } f^* = f - q^* g.$$

Старший член многочлена $q^* g$ равен старшему члену многочлена f:

$$\frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \cdot b_0 \, x^m = a_0 \, x^n.$$

Поэтому $f^* = 0$ или $\deg f^* < n$.

Следовательно, многочлен f^* либо равен нулю, либо его степень меньше n.

Перепишем равенство $f^* = f - q^* g$ иначе:

$$f = q^* g + f^*$$

Задание 3. Можно ли утверждать, что многочлены $q^* = q$ и $f^* = r$ удовлетворяют требуемым условиям, то есть многочлен f представлен в виде (*)?

Деление с остатком

Если многочлен f^* равен нулю или его степень меньше m, то цель достигнута.

Если $\deg f^* \geq m$, то рассмотрим многочлены

$$q^{**} = \frac{\text{ст. коэфф.} f^*}{b_0} x^{\deg f^* - m} \text{ и } f^{**} = f^* - q^{**} g.$$

Тогда $f^* = q^{**} g + f^{**}$, и в равенстве

$$f = q^* g + f^* = q^* g + (q^{**} g + f^{**}) = (q^* + q^{**}) g + f^{**}$$

многочлен f^{**} либо равен нулю, либо $\deg f^{**} < \deg f^* < \deg f$.

Если при этом его степень меньше m, то цель достигнута.

Если $\deg f^{**} \geq m$, то …?

Деление с остатком

Рассмотрим последовательность многочленов

$$f, f^*, f^{**}, \dots$$

Так как $\deg f > \deg f^* > \deg f^{**} > \dots$, то после конечного числа шагов мы получим многочлен $f^{*\cdots*}$, либо равный нулю, либо имеющий степень меньше степени f^*.

Тогда многочлены

$$r = f^{*\cdots*} \text{ и } q = q^* + \cdots + q^{*\cdots*}$$

и есть требуемые многочлены в равенстве (*).

З а д а н и е 4. Доказана ли теорема?

Деление с остатком

Доказана осуществимость деления с остатком. Докажем единственность.

Пусть деление с остатком многочлена f на многочлен g произведено двумя различными способами:

$$f = q_1 g + r_1 \text{ и } f = q_2 g + r_2.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$(q_2 - q_1)g = r_1 - r_2.$$

Так как в правой части равенства $\deg(r_1 - r_2) < m$ или $r_1 - r_2 = 0$,

то и в левой части $\deg\big((q_2 - q_1)g\big) < m$ или $(q_2 - q_1)g = 0$.

Но если многочлен $q_1 - q_2 \neq 0$, то $\deg\big((q_2 - q_1)g\big) \geq m$, чего быть не может.

Следовательно, $q_1 - q_2 = 0$ и $r_1 - r_2 = 0$, то есть $q_1 = q_2$ и $r_1 = r_2$. Теорема доказана.

Деление уголком

На равенстве $f(x)=\frac{a_0}{b_0}\ x^{n-m}g(x)+\left(f(x)-\frac{a_0}{b_0}\ x^{n-m}g(x)\right)$ основан способ деления многочленов «уголком».

Разделим многочлен $f\ = x^4-x^2-2x-1$ на $g=x^2+x+1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & x^4 & + & 0\cdot x & - & x^2 & - & 2x & - & 1 & x^2+x+1 \\ \cline{11-11}
- & & & & & & & & & & \\
 & x^4 & + & x^3 & + & x^2 & & & & & x^2-x-1 \\ \cline{2-6}
 & & & -x^3 & - & 2x^2 & - & 2x & & & \\
 & & - & & & & & & & & \\
 & & & -x^3 & - & x^2 & - & x & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & & x^2 & - & x & - & 1 & \\
 & & & & - & & & & & & \\
 & & & & & x^2 & - & x & - & 1 & \\ \cline{6-10}
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Теорема Безу

Теорема 8 (теорема Безу). *Остаток от деления многочлена f на двучлен $x - c$ равен $f(c)$ – значению f при $x = c$.*

Доказательство. Разделим f с остатком на $x - c$:

$$f = (x - c)q + r,$$

где q и r – многочлены, причём r имеет степень меньше степени двучлена $x - c$, либо равен 0. Следовательно, r – число.

Из равенства $f = (x - c)q + r$ при $x = c$ получаем:

$$f(c) = 0 \cdot q + r = r,$$

то есть $f = (x - c)q + f(c)$, что и требовалось доказать.

Следствия из теоремы Безу

Следствие 1. *Многочлен f делится на $x - c$ тогда и только тогда, когда число c является корнем f.*

Доказательство.

Если f делится на $x - c$, то остаток от деления равен 0; по теореме Безу остаток равен $f(c)$, так что $f(c) = 0$, то есть c – корень многочлена f.

Обратно, если c – корень многочлена f, то есть $f(c) = 0$, то по теореме Безу в равенстве

$$f = (x - c)q + r$$

остаток $r = f(c) = 0$ и $f = (x - c)q$, так что f делится на $x - c$.

Мы доказали *утверждение о выделении линейного множителя из многочлена* (см. Многочлены-2, слайд 15).

Следствия из теоремы Безу

Следствие 2. *Многочлен степени n имеет не более n корней.*

Доказательство. Применим индукцию по степени многочлена.

Для $n = 1$ утверждение верно, так как многочлен 1-й степени $ax + b$ имеет ровно 1 корень (не более одного).

Пусть утверждение верно для всех многочленов степени n; рассмотрим f, такой, что $\deg f = n + 1$ и c – один из корней f. Тогда по следствию 1 многочлен f можно представить в виде

$$f = (x - c)g,$$

где $\deg g = n$.

Если f имеет корень d, отличный от c, то

$$f(d) = (d - c)g(d),$$

откуда $g(d) = 0$, то есть d – корень g.

Так как по предположению индукции g имеет не более n корней, то f имеет не более n корней, отличных от c, и его общее число корней не больше $n + 1$.

Следовательно, данное утверждение верно для многочленов любой степени.

Следствия из теоремы Безу

Следствие 3. *Если значения двух многочленов, степень которых не больше n, совпадают при $n + 1$ значении переменной, то эти многочлены равны.*

Доказательство. Пусть многочлены f и g степени не больше n принимают равные значения в $n + 1$ точке $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Предположим противное: $f \neq g$.

Разность $h = f - g$ – ненулевой многочлен, степень которого не больше n.

Для любого $i = 1, \ldots, n$

$$h(c_i) = f(c_i) - g(c_i) = 0.$$

Но тогда многочлен h имеет по крайней мере $n + 1$ корень, тогда как его степень не больше n.

Это противоречит следствию 2, и, следовательно, сделанное предположение не верно. Таким образом, $f = g$, что и требовалось доказать.

Мы доказали ***теорему 5*** (см. слайд 11).

Примеры

- П р и м е р. Найти частное и остаток от деления многочлена $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 5x + 6$ на многочлен $g(x) = x - 1$.

По теореме Безу остаток от деления $f(x)$ на $x - 1$ равен $f(1)$. Вычисление с помощью схемы Горнера позволит получить коэффициенты частного.

	3	-5	-5	6
1	3	-2	-7	-1

$$3x^3 - 5x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(3x^2 - 2x - 7) - 1.$$

Примеры

- Пример. Решить уравнение $5x^3 + 4x^2 - 11x + 2 = 0$.

Начнём с проверки делителей числа 2.

	5	4	-11	2
1	5	9	-2	0

$$5x^3 + 4x^2 - 11x + 2 = (x - 1)(5x^2 + 9x - 2).$$

Корнями уравнения $5x^2 + 9x - 2 = 0$ являются числа $\frac{1}{5}$ и -2.

Таким образом, исходное уравнение имеет три корня: 1, $\frac{1}{5}$ и -2.

Примеры

- **Пример.** Разложить на множители многочлен $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$.

Начнём с поиска целых корней.

	3	-2	-9	0	4
1	3	1	-8	-8	-4
-1	3	-5	-4	4	0
-1	3	-8	4	0	
-1	3	-11	15		
2	3	-2	0		

$$3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4 = (x+1)^2(x-2)(3x-2).$$

Основная теорема алгебры

Теорема 9 (основная теорема алгебры). *Любой многочлен f, степень которого отлична от нуля, имеет по крайней мере один корень.*

В этой теореме коэффициенты многочлена и его корни могут быть как действительными, так и комплексными.

Теорема 10 (о разложении многочлена на линейные множители). *Любой многочлен n-ой степени*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

может быть представлен в виде произведения

$$f = a_0(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n).$$

Это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Основная теорема алгебры

Следствие 1. *Пусть многочлен n-ой степени представлен в виде произведения линейных множителей*

$$f = a_0(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n).$$

Тогда числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ являются корнями многочлена f и других корней этот многочлен не имеет.

Если среди чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ есть совпадающие, говорят, что у многочлена есть **кратные корни**.

Следствие 2. *Каждый многочлен n-ой степени имеет ровно n корней.*

Вопросы

- Ссылка: https://docs.google.com/forms/d/1o5yIVyLFCu34IafLaIVnG5EYmZy8NwAlTQL3OFaKqOE/edit?usp=sharing

Вопрос 1. Выберите все выражения, являющиеся многочленами.

(1) $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - \sqrt[3]{5}$.

(2) $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

(3) $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$.

(4) $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - \frac{5}{3}x - 1$.

Вопросы

Вопрос 2. Найдите сумму коэффициентов многочлена, получающегося из многочлена P приведением к стандартному виду.

$$P(x) = 1 + (x^2 - 6x + 5)(x^5 + 3x^3 - 2x + 7)^{68} + (x^2 - 3x + 1)^{37}(x^3 + 5x + 7).$$

Вопросы

- Вопрос 3. Даны утверждения A, B, C, D. Выберите все верные высказывания.

A: *Если* $p(x) = q(x)$, *то* $(\forall c \in \mathbb{C})\ p(c) = q(c)$.

B: *Если* $(\forall c \in \mathbb{C})\ p(c) = q(c)$, *то* $p(x) = q(x)$.

C: *Если* $p(x) \neq q(x)$, *то* $(\exists c \in \mathbb{C})\ p(c) \neq q(c)$.

D: *Если* $(\exists c \in \mathbb{C})\ p(c) \neq q(c)$, *то* $p(x) \neq q(x)$.

(1) *A* равносильно *B*.

(2) *A* равносильно *C*.

(3) *A* равносильно *D*.

(4) *B* равносильно *C*.

(5) *B* равносильно *D*.

(6) *C* равносильно *D*.

Вопросы

Вопрос 4. Найдите рациональные корни многочлена P.

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 17x - 6.$$

Вопросы

Вопрос 5. Поделитесь, пожалуйста, Вашим мнением.

Литература

- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с. http://bookre.org/reader?file=567068
- Практикум по решению математических задач: Учеб. пособие для пед. ин-тов. / Е. Е. Вересова, Н. С. Денисова, Т. Н. Полякова. Просвещение, 1979. 240 с. http://bookre.org/reader?file=1500697
- Популярные лекции по математике. https://math.ru/lib/ser/plm