Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Многочлены

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Многочлены

ПЛАН

- Гимнастика для глаз.
- Стандартный вид многочлена.
- Вычисление значений многочленов. Схема Горнера.
- Теорема Безу.
- Поиск рациональных корней многочлена.

Все учебные материалы доступны:

на канале telegram: https://t.me/joinchat/RRkFmRBlv1tM_urv

на сайте: http://emmom.ru

Гимнастика для глаз

(1) Легкое нажатие точки Цинмин.

Большими пальцами обеих рук 8 раз слегка надавливать точки Цинмин в сторону переносицы.

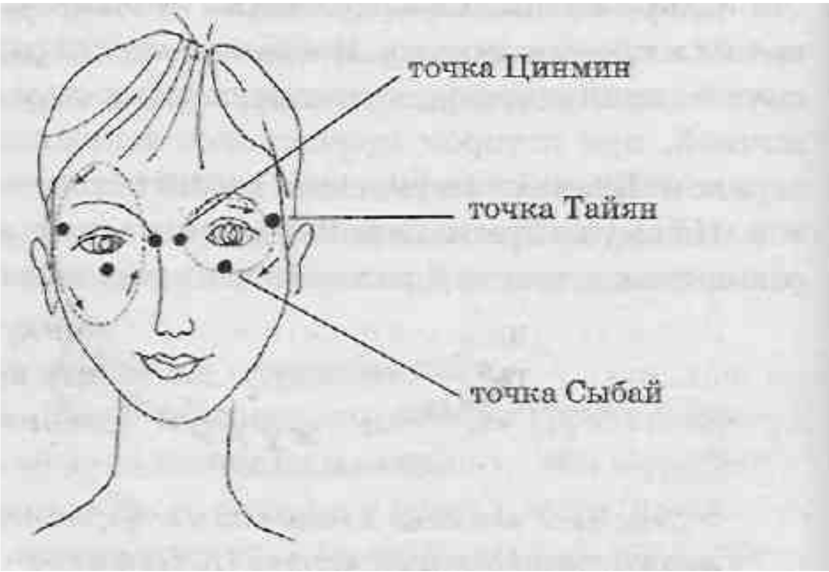
(2) Круговой массаж орбиты глаза.
Четыре раза нажать на точку Тайян и обвести указательным пальцем вокруг глаза.

(3) Легкое надавливание точки Сыбай указательными пальцами обеих рук.

Точка Сыбай четыре раза массируется движениями, направленными внутрь лица, четыре раза – наружу.

(4) «Сухое умывание».

Считая до четырех, пальцами обеих рук проводят круговое движение от рта к носу, ко лбу и по точке Тайян сбоку.



Каждое упражнение повторяется четыре раза подряд.

Руки обязательно должны быть чистыми.

Многочлены стандартного вида

- Задача 1 (Болтянский, гл.6, 6.1). Найдите сумму коэффициентов многочлена стандартного вида, равного данному

$$(1 + 2x - 4x^2\ )^{248}(1 - 7x + 5x^2\ )^{345}.$$

Многочлены стандартного вида

Ответ: -1.

Многочлены стандартного вида

- Задача 2. Для многочлена

$$p(x) = (2x^3 + 5x^2 - 3x - 5)^{2021} + 2021x,$$

записанного в стандартном виде, найти сумму коэффициентов при чётных степенях x.

Многочлены стандартного вида

Решение. Сумма коэффициентов при чётных степенях x многочлена $p(x)$ равна

$$\frac{p(1)+p(-1)}{2} = 0.$$

Теорема Безу

Теорема 8 (теорема Безу).

Остаток от деления многочлена f на двучлен $x - c$ равен $f(c)$ – значению f при $x = c$.

Теорема Безу

Доказательство.

(1) Покажем, что при всех натуральных n двучлен $x^n - c^n$ делится на $x - c$.

	1	0	0	0	0	…	0	$-c^n$
c	1	c	c^2	c^3	c^4	…	c^{n-1}	0

(2) Возьмём произвольный многочлен и найдём разность $f(x) - f(a)$:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + c_n,$$

$$f(x) - f(c) = a_0(x^n - c^n) + a_1(x^{n-1} - c^{n-1}) + \cdots + (a_n - c_n).$$

Так как по (1) каждое слагаемое в правой части равенства делится на $(x - c)$, то разность $f(x) - f(c)$ делится на $x - c$; получаем формулу

$$f(x) = (x - c)g(x) + f(c),$$

где многочлен $f(c)$ либо нулевой, либо его степень меньше степени двучлена $x - c$, откуда и вытекает теорема Безу.

Формула суммы конечной геометрической прогрессии

	1	0	0	0	0	…	0	$-a^n$
a	1	a	a^2	a^3	a^4	…	a^{n-1}	0

$$x^n - a^n = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}),$$

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{x^n - a^n}{a-1}$$

Теорема Безу

- Задача 3. При каких натуральных n

(1) $x^n - a^n$ делится на $x - a$?

(2) $x^n - a^n$ делится на $x + a$?

(3) $x^n + a^n$ делится на $x - a$?

(4) $x^n + a^n$ делится на $x + a$?

Поиск рациональных корней многочлена

- Задача 4. Найти корни многочлена $p(x) = 3x^3 + 8x^2 - 6x + 1$.

Поиск рациональных корней уравнения

Рациональными корнями данного многочлена могут быть числа ± 1 и $\pm\frac{1}{3}$. Используя схему Горнера, получим:

	3	8	–6	1
1	3	11	5	6
–1	3	5	–11	12
$\frac{1}{3}$	3	9	–3	0

Значит, один из корней равен $\frac{1}{3}$, и $p(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 + 9x - 3)$.

Найдём корни квадратного трёхчлена $3x^2 + 9x - 3$: $x = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

Таким образом, исходный многочлен имеет три корня: $\frac{1}{3}$, $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ и $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$.

Поиск рациональных корней многочлена

- Задача 5. Вычислить значение выражения

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

Поиск рациональных корней многочлена

Решение. Пусть $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$, тогда

$$x^3=\left(20+14\sqrt{2}\right)+\left(20-14\sqrt{2}\right)+$$

$$+3\sqrt[3]{20^2-\left(14\sqrt{2}\right)^2}\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right),$$

$$x^3=40+6x,$$

то есть *x* является корнем многочлена $x^3-6x-40=0$.

Проверка делителей числа 40 показывает, что число 4 является корнем этого многочлена, а других корней он не имеет, так как

$$x^3-6x-40=(x-4)(x^2+4x+10)$$

и дискриминант квадратного трёхчлена $x^2+4x+10$ отрицателен.

Значит, $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

Поиск рациональных корней многочлена

П р и м е ч а н и е. Если «увидеть», что

$$20 + 14\sqrt{2} = 8 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 2\sqrt{2} = \left(2 + \sqrt{2}\right)^3,$$

$$20 - 14\sqrt{2} = 8 - 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2\sqrt{2} = \left(2 - \sqrt{2}\right)^3,$$

то ответ получается «мгновенно»:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \left(2 + \sqrt{2}\right) + \left(2 - \sqrt{2}\right) = 4.$$

Деление многочленов

- Задача 6 (Болтянский, гл.6, теорема 9) . Пусть f и g – многочлены с целыми коэффициентами; старший коэффициент g равен 1 или -1. Докажите, что частное и остаток от деления f на g также являются многочленами с целыми коэффициентами.

Деление многочленов

Решение.

Пусть f и g – многочлены с целыми коэффициентами:

$$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$g = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$$

и старший коэффициент b_0 многочлена g равен 1 или -1.

Тогда старший коэффициент частного равен $\frac{a_0}{b_0}$ – целое число и многочлен $f^* = f - \frac{a_0}{b_0}\, x^{n-m}g$ имеет целые коэффициенты.

Аналогично, следующий коэффициент частного является целым числом, а многочлен f^{**} имеет целые коэффициенты, и так далее. Из этого рассуждения вытекает справедливость требуемого утверждения.

Делимость многочленов

- Задача 6. При каких значениях *a* и *b* многочлен

$$f(x) = x^4 + ax^3 + 3x^2 + bx - 5$$

делится на двучлен $x + 1$ и даёт остаток 9 при делении на двучлен $x - 2$?

Делимость многочленов

Решение. По теореме Безу должны выполнятся равенства

$$f(-1) = 0 \text{ и } f(2) = 9.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \quad a + b + 1 = 0, \\ 8a + 2b + 23 = 9, \end{cases}$$

получим $a = -2$, $b = 1$.

Делимость многочленов

- Задача 7. (Болтянский, гл.6, 6.3) Делится ли многочлен $x^{100} - 3x + 2$ на $x^2 - 1$?
- Задача 8. Найдите остаток от деления многочлена $x^{100} - 3x + 2$ на $x^2 - 1$.
- Задача 9. (Болтянский, гл.6, 6.4) Некоторый многочлен при делении на $x - 1$ даёт остаток 3, а при делении на $x - 2$ даёт остаток 4. Чему равен остаток от деления этого многочлена на $(x - 1)(x - 2)$?
- Задача 10. (Болтянский, гл.6, 6.5) Некоторый многочлен при делении на $x + 1$, $x - 2$ и $x - 3$ даёт в остатке соответственно 3, 1 и -1. Чему равен остаток от деления этого многочлена на $(x + 1)(x - 2)(x - 3)$?

Делимость многочленов

Ответы

7. Нет.

8. $-3x + 3$.

9. $x + 2$.

10. $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 3$.

Делимость многочленов

Указания

7. Доказать, что если f делится на g, то корни g являются корнями f, причём их кратность в g не больше кратности в f.

Делимость многочленов

Решение задачи 7.

I способ.

Если $x^{100} - 3x + 2$ делится на $x^2 - 1$, то существует многочлен $q(x)$, такой, что

$$x^{100} - 3x + 2 = (x^2 - 1)q(x).$$

Рассмотрим многочлены

$$f(x) = x^{100} - 3x + 2 \text{ и } g(x) = (x^2 - 1)q(x).$$

Так как $g(-1) = 0$, а $f(-1) \neq 0$, то по теореме 4 (Многочлены-1). $f(x) \neq g(x)$. Следовательно, ни при каком $q(x)$ требуемое равенство не имеет места, и $x^{100} - 3x + 2$ не делится на $x^2 - 1$.

Делимость многочленов

Решение задачи 7.

II способ.

Если f делится на g, то корни g являются корнями f:

$$\text{если } f = pq \text{ и } p(c) = 0,$$

$$\text{то } f(c) = p(c)q(c) = 0,$$

то есть корни p являются корнями f.

но число -1 является корнем многочлена $x^2 - 1$ и не является корнем $x^{100} - 3x + 2$; поэтому по многочлен $x^{100} - 3x + 2$ не делится на $x^2 - 1$.

Делимость многочленов

Решение задачи 8.

Разделим многочлен $x^{100} - 3x + 2$ на многочлен $x^2 - 1$:

$$x^{100} - 3x + 2 = (x^2 - 1)q + r,$$

где r – многочлен не выше первой степени, то есть

$$x^{100} - 3x + 2 = (x^2 - 1)q + ax + b.$$

При $x = 1$ получаем $0 = a + b$, при $x = -1$ получаем $6 = -a + b$, откуда $a = -3$, $b = 3$; следовательно, искомый остаток равен $-3x + 3$.

Многочлены специального вида

- Задача 11. Решить уравнение $2x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2 = 0$.

Многочлены специального вида

Решение. Разделим обе части уравнения на x^2 и сгруппируем слагаемые:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

После замены $x + \frac{1}{x} = t$ уравнение примет вид $2(t^2 - 2) + 3t - 1 = 0$, откуда $2t^2 + 3t - 5 = 0$, $t = 1$ или $t = -\frac{5}{2}$.

Уравнение $x + \frac{1}{x} = 1$ не имеет корней;

уравнение $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$ равносильно уравнению $2x^2 + 5x + 2 = 0$, которое имеет корни $x = -2$ или $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-2, -\frac{1}{2}$.

Многочлены специального вида

- Задача 12. Решить уравнение

$$3x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 3 = 0.$$

Многочлены специального вида

Решение. Любое возвратное уравнение нечетной степени имеет корень -1:

$$3x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 3 =$$
$$= (x+1)(3x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 2x + 3).$$

Решим уравнение $3x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 2x + 3 = 0$.

После деления на x^2 и замены $x + \frac{1}{x} = t$ уравнение примет вид

$$3(t^2 - 2) + 2t - 15 = 0,$$

откуда $3t^2 + 2t - 21 = 0$, $t = -3$ или $t = \frac{7}{3}$.

Решим уравнения $x + \frac{1}{x} = -3$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$.

Ответ: $-1, -3, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \frac{7+\sqrt{13}}{6}, \frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

Для самостоятельного решения

Ссылка: https://docs.google.com/forms/d/1rxAu_Tfyng2YVpl-6sGYdjI9KiIY74fT6HXonPGChwc/edit?usp=sharing

- Задание 1. Найти сумму коэффициентов многочлена

$$p(x) = (6x^2 + x - 6)^{2021} + 2021x - 17$$

при чётных степенях x после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Для самостоятельного решения

- Задание 2. Найти сумму коэффициентов многочлена

$$p(x) = (6x^2 + x - 6)^{2021} + 2021x - 17$$

при нечётных степенях x после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Для самостоятельного решения

Задание 3. Сколько рациональных корней имеет многочлен f?

$$f = 2x^3 - 5x^2 - 7x - 2.$$

(1) $1.$

(2) $2.$

(3) $3.$

(4) $0.$

Для самостоятельного решения

Задание 4. Вычислите значение выражения

$$\sqrt[3]{40+11\sqrt{13}}+\sqrt[3]{40-11\sqrt{13}}.$$

Для самостоятельного решения

Задание 5. При каких значениях *c* и *d* многочлен

$$f(x) = cx^4 + 3x^3 - dx + 2$$

делится на двучлен $x + 2$ и даёт остаток 12 при делении на $x - 1$?

Литература

- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с. http://bookre.org/reader?file=567068
- Практикум по решению математических задач: Учеб. пособие для пед. ин-тов. / Е. Е. Вересова, Н. С. Денисова, Т. Н. Полякова. Просвещение, 1979. 240 с. http://bookre.org/reader?file=1500697
- Популярные лекции по математике. https://math.ru/lib/ser/plm

КОНЕЦ СЕМИНАРА