Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Элементарная алгебра: введение

Е.А. Седова, к.п.н.,

проф. кафедры элементарной математики

Элементарная алгебра: введение

ПЛАН

- Исторический очерк.
- Аксиоматическое построение математики.
- Непротиворечивость, полнота и независимость системы аксиом.
- Алгебраические структуры.
- Основные множества в элементарной алгебре.
- Язык элементарной алгебры
    - Алгебраические выражения и формулы.
    - Высказывания и предложения с переменными.
    - Отрицание.
    - Равносильность высказывательных форм. Следование
    - Обратное утверждение и контрапозиция.
    - Логические связки.

Перейти к материалам курса «Элементарная математика (алгебра)» можно по ссылке https://el.mpgu.su/course/view.php?id=7931

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Исторический очерк

Ранние математические тексты:

- операции с натуральными числами и дробями (отрицательные числа используются, но очень редко),
- алгоритм поиска наибольшего общего делителя двух чисел, аналогичный алгоритму Евклида,
- задачи на пропорции, пропорциональное распределение товара или трудозатрат, прогрессии,
- делимость чисел,
- решение уравнений первой и второй степени,
- решение систем двух и произвольного числа линейных уравнений.

Исторический очерк

III в. («Арифметика» Диофанта):

развитие алгебраических идей и символики (использование сокращённой записи слов для обозначения неизвестного и его степеней, знака равенства);

задачи, приводящие к решению определенных систем уравнений первой или второй степени,

задачи, приводящие к неопределённым уравнениям до 4-й степени (диофантовы уравнения).

XVI в.:

Формула для решения уравнений 3 степени, метод решения уравнений 4 степени.

Середина XVIII в.:

Алгебра сложилась в объёме «Элементарной математики» («Введение в алгебру» Л. Эйлера):

Целые числа, обыкновенные и десятичные дроби, корни, логарифмы, алгебраические уравнения 1-й — 4-й степеней, прогрессии, соединения, бином Ньютона, диофантовы уравнения.

Исторический очерк

Исторически первая задача алгебры – решение уравнений с одним неизвестным при помощи сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней («решение в радикалах»).

XVI в.:

Формула для решения уравнений 3 степени, метод решения уравнений 4 степени (формула Кардано, метод Феррари).

XVII в.:

«Бесформульное» доказательство существования комплексного корня для произвольного алгебраического уравнения с комплексными коэффициентами (А. Жирар).

XVIII в.:

Строгое доказательство этой теоремы (К. Гаусс).

1824 г., Н. Абель:

Уравнения выше 4-й степени в общем случае в радикалах неразрешимы.

1830 г., Э. Галуа:

Общий критерий разрешимость алгебраических уравнений в радикалах.

Исторический очерк

Конец XV в.:

громоздкие словесные описания алгебраических действий заменяются символами (знаки +, --, знаки степеней, корней, скобки).

XVI в.:

Ф. Виет (*François Viète, 1540--1603*) начал применять обозначения для неизвестных и заданных в задаче величин.

Середина XVII в.:

Сложилась современная алгебраическая символика.

Аксиоматическое построение математики

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД –

способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые аксиомами теории, а все остальные предложения теории получаются как логические следствия аксиом.

Аксиоматическое построение математики

АКСИОМА –

1) основное положение, самоочевидный принцип.

2) в дедуктивных теориях – основные исходные положения, из которых логическими средствами извлекается всё остальное содержание.

АКСИОМАТИЗАЦИЯ ТЕОРИИ – перечисление основных объектов и основных свойств

Первичные понятия:

• в данной теории не определяются (исходный список понятий)

• в теории с другой системой аксиом могут иметь определения

• служат для определения других понятий данной теории

Аксиомы:

• в данной теории считаются истинными (исходный список теорем)

• в теории с другой системой аксиом могут быть теоремами

• служат для доказательства других свойств понятий данной теории

Независимость, непротиворечивость, полнота системы аксиом

Определение 1. Система аксиом называется непротиворечивой, если из её аксиом нельзя вывести двух противоречивых высказываний.

Определение 2. Непротиворечивая система аксиом называется полной, если любые две модели, удовлетворяющие данной системе, изоморфны.

Определение 3. Система аксиом называется независимой, если ни одну из аксиом невозможно доказать как теорему исходя из остальных аксиом.

Непротиворечивость системы аксиом

П р и м е р . Аксиоматическая теория «Турнир-1»

Первичные понятия: игрок, партия, участие игрока в партии.

Аксиомы: 1) число игроков нечётно,

2) каждый игрок участвует в 3 партиях,

3) в каждой партии участвуют 2 игрока.

Определение. Выступлением игрока A в партии g называется упорядоченная пара (g, A).

Теорема 1. Число всех выступлений игроков нечётно.

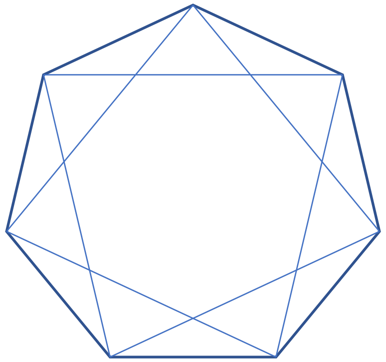
Доказательство. Пусть n – число игроков, n – число нечётное (по аксиоме 1), каждый сыграл в 3 партиях (по аксиоме 2), тогда число всех выступлений игроков равно $3n$, $3n$ -- произведение двух нечётных чисел, то есть число нечётное, что и следовало доказать.

Теорема 2. Число всех выступлений игроков чётно.

Доказательство. Так как в каждой партии участвуют 2 игрока (по аксиоме 3), то число всех выступлений игроков вдвое больше числа сыгранных партий, следовательно, число всех выступлений игроков чётно, что и следовало доказать.

Непротиворечивость системы аксиом

П р и м е р . Аксиоматическая теория «Турнир-2»



Первичные понятия: игрок, партия, участие игрока в партии

Аксиомы: 1) число игроков нечётно,

2’) каждый игрок участвует в 4 партиях,

3) в каждой партии участвуют 2 игрока.

Докажем непротиворечивость теории «Турнир-2».

Рассмотрим интерпретацию теории «Турнир-2» в терминах евклидовой геометрии:

игроки – вершины ($2n$ + 1)-угольника,

партии – стороны и диагонали, соединяющие стороны через одну,

игроки одной партии – вершины одного отрезка.

Все аксиомы выполняются.

Теперь, если в теории «Турнир-2» можно получить две противоречащие одна другой теоремы, то эти рассуждения можно повторить и в геометрической модели.

Таким образом, теория «Турнир-2» непротиворечива относительно евклидовой геометрии.

Полнота системы аксиом

Достаточный признак полноты теории: если все модели некоторой мощности изоморфны, то теория полна.

Полные аксиоматические теории имеют единственную с точностью до изоморфизма модель.

Примеры: евклидова геометрия и теория действительных чисел.

Неполные аксиоматические теории имеют существенно различные (неизоморфные) модели, это удобно для аксиоматизации общих свойств нескольких различных теорий.

Примеры: неизоморфные виды групп одинаковой мощности. Многообразие моделей обусловливает многообразие применений.

Независимость системы аксиом

Независимость аксиомы можно доказать, построив интерпретацию, в которой эта аксиома ложна, а все остальные аксиомы данной теории истинны.

П р и м е р. Теория коммутативных групп отличается от теории групп добавлением одной аксиомы:

$$(\forall a, b \in G) a * b = b * a.$$

Независимость не является обязательным свойством аксиоматической теории.

Алгебраические структуры

Алгебра имеет дело с объектами различной природы:

- целые, рациональные, действительные или комплексные числа,
- многочлены,
- алгебраические дроби и пр.

и свойствами основных действий: сложения, вычитания, умножения и деления.

Свойства и взаимосвязи этих действий безотносительно других специфических свойств этих объектов изучает абстрактная алгебра.

Алгебраические структуры

Определение. Отображение *n*-й декартовой степени множества $\mathfrak{A}$ в само множество $\mathfrak{A}$

$$\omega: \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{A}$$

называется *n*-арной алгебраической операцией.

Другими словами, алгебраической операцией на множестве $\mathfrak{A}$ называют отображение, при котором каждому кортежу из *n* элементов соответствует единственный $(n + 1)$-й элемент из того же множества.

Примеры бинарных операций:

- сложение, вычитание, умножение на множестве действительных чисел,
- сложение, вычитание и умножение на множестве многочленов и пр.

Алгебраические структуры

Определение. Группой называется произвольное множество G с одной бинарной операцией, удовлетворяющей следующим аксиомам:

1) операция ассоциативна, т.е.

$$(\forall a, b, c \in G)(a * b) * c = a * (b * c),$$

2) операция гарантирует нейтральный элемент, т.е.

$$(\exists e \in G)(\forall a \in G) a * e = e * a = a,$$

3) операция гарантирует обратные элементы, т.е.

$$(\forall a \in G)(\exists a' \in G) a * a' = a' * a = e.$$

Алгебраические структуры

Примеры.

- Повороты R_k на угол φ_k, где $\varphi_k = \frac{2\pi k}{m}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

$$R_j \cdot R_k = \begin{cases} R_{j+k}, \text{если } j+k < m, \\ R_{j+k-m}, \text{если } j+k \geq m. \end{cases}$$

- Корни m-й степени из 1: $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{m} + i \sin\frac{2\pi k}{m}$, где, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

$$\varepsilon_j \cdot \varepsilon_k = \begin{cases} \varepsilon_{j+k}, \text{если } j+k < m, \\ \varepsilon_{j+k-m}, \text{если } j+k \geq m. \end{cases}$$

- Классы вычетов по модулю m: $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}$.

$$\bar{j} + \bar{k} = \begin{cases} \bar{j} + \bar{k}, \text{если } j+k < m, \\ \bar{j} + \bar{k} - \bar{m}, \text{если } j+k \geq m. \end{cases}$$

Алгебраические структуры

Общие свойства систем в примере выше

1. Каждая из операций – бинарная операция в соответствующем множестве.
2. Каждая операция ассоциативна.
3. В каждом из множеств есть выделенный элемент, обладающий свойством: если применить операцию к нему и любому другому элементу, то получится этот другой элемент.
4. Для каждого элемента множества есть элемент того же множества, обладающий свойством: если применить операцию к такой паре элементов, то получится выделенный элемент, описанный выше.

Алгебраические структуры

Аксиомы теории групп

Первичные понятия: – непустое множество G;

-- бинарная операция $*$;

-- некоторый элемент e $(e \in G)$.

0. $(\forall a, b \in G)\exists!\, c \in G: a * b = c$.
1. $(\forall a, b, c \in G) a * (b * c) = (a * b) * c$.
2. $(\forall a \in G) a * e = e * a = a$.
3. $(\forall a \in G)\exists a' \in G: a * a' = a' * a = e$.

Аксиомы циклической группы порядка *m*:

- численность множества,
- наличие порождающего элемента

Алгебраические структуры

Теорема. Любая циклическая группа является коммутативной.

Теорема. У циклической группы порядка n существует ровно $\varphi(n)$ порождающих элементов, где φ— функция Эйлера.

…

Алгебраические структуры

Определение. Кольцо -- это произвольное множество G с двумя бинарными операциями (сложением и умножением), по сложению это множество – коммутативная группа, а умножение связано со сложением аксиомами дистрибутивности:

$$(\forall a, b, c \in G) a(b + c) = ab + ac, \qquad (b + c)a = ba + ca.$$

В ассоциативно-коммутативных кольцах выполняются аксиомы ассоциативности и коммутативности умножения.

Определение. Поле -- это коммутативно-ассоциативное кольцо с единицей, множество ненулевых элементов которого не пусто и образует группу относительно умножения.

Алгебраические структуры

Аксиомы сложения и умножения в школьной математике называют законами действий. Из этих законов выводятся правила действий с любым числом компонентов, формулы сокращённого умножения и пр.

Из аксиом выводятся теоремы:

о существовании и единственности нуля,

о существовании и единственности противоположного элемента,

о существовании и единственности единицы,

о существовании и единственности обратного элемента для всякого ненулевого элемента,

необходимое и достаточное условие равенства нулю произведения двух элементов.

Основные структуры в элементарной алгебре

- Ассоциативное и коммутативное полукольцо с единицей натуральных чисел $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$.
- Ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей целых чисел $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
- Поле рациональных чисел $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.
- Поле действительных чисел $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- Множество многочленов относительно введенных операций сложения и умножения представляет собой ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей.
- Поле рациональных функций (алгебраических дробей).

Язык элементарной математики

Алгебраические выражения:

- все числа и буквы для обозначения неизвестного числа,
- сочетания знаков вида

$$(A) + (B),\ (A) \text{ -- } (B),\ (A) \cdot (B),\ (A) : (B),$$

где A и B – алгебраические выражения.

П р и м е р ы :

является алгебраическим выражением: $((x) + (1)) – ((x) \text{ -- } (2))$,

не является алгебраическим выражением: $((x) + (1)$.

Правила упрощения записи алгебраических выражений:

- скобки, содержащие число или букву, принято опускать,
- соглашения о приоритете операций,
- соглашения о записи без скобок при выполнении нескольких операций одного порядка.

Язык элементарной алгебры

Два алгебраических выражения, соединённых знаком отношения, образуют **формулу**:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2, 9 - 4 < 7 \text{ и т.д.}$$

Другими словами, формула по своей структуре является полным предложением русского математического языка.

Если формула не содержит свободных вхождений неизвестных, то она является высказыванием о числах (истинным или ложным).

В противном случае она является высказывательной формой и подразумевает задачу отыскания множества истинности.

П р и м е р ы :

является формулой: $x^2 - 1 = 0$,

не является формулой: $x^2 - 1$.

Язык элементарной алгебры

Высказывания и предложения с переменными

Предложения, о которых можно сказать, истинны они или ложны, принято называть высказываниями.

Предложения с переменными называют высказывательными формами: в них можно подставлять конкретные числа. При каждой такой подстановке получаются обычные предложения – без всяких переменных.

$$p(x)\colon x^2 - 1 = 0,\ q(x)\colon x^2 - 1 < 0, \text{ и т.д.}$$

Пример. При подстановке в высказывательную форму x^2 -- 1 = 0 чисел 0, --1 и 100 получаются высказывания:

ложное высказывание $p(0)$, так как 0 – 1 = 0 -- ложно,

истинное высказывание $p(0)$, так как 1 – 1 = 0 -- истинно,

ложное высказывание $p(100)$, так как 10000 – 1 = 0 -- ложно.

Язык элементарной алгебры

Область определения предложения с переменными

В предложение с переменными можно подставлять не любые числа, а только те, которые обращают его в высказывание, то есть каждая высказывательная форма имеет свою область определения.

Пример. Предложение с переменной

«x – делитель числа 24, $x \in \mathbb{N}$»

задано на множестве натуральных чисел

В школьной математике иногда используется другой термин – область допустимых значений переменной (ОДЗ).

Язык элементарной алгебры

Множество истинности предложения с переменными

Множество тех значений переменной (переменных), при которых высказывательная форма обращается в истинное высказывание, называется множеством истинности этой высказывательной формы.

Пример. Множество истинности предложения с переменной

«x^2 -- 1 = 0»

есть {--1, 1}.

Язык элементарной алгебры

Кванторы

Пусть *x* – элемент множества *M*, высказывательная форма *p*(*x*) обращается в истинное высказывание на некотором подмножестве этого множества M_p.

Тогда предложение

«$(\forall x \in M)p(x)$» -- «Для всякого элемента *x* множества *M* справедливо *p*(*x*)»

истинно, если $M = M_p$ и ложно, если $M \neq M_p$.

Предложение

«$(\exists x \in M)p(x)$» --«Существует элемент *x* множества *M*, для которого справедливо *p*(*x*)»

истинно, если $M_p \neq \emptyset$ и ложно, если $M_p = \emptyset$.

П р и м е р ы .

утверждение «$(\forall x \in \mathbb{R})x^2 \geq 0$» истинно, утверждение «$(\forall x \in \mathbb{R})x^2 > 0$» ложно,
утверждение « $(\exists x \in \mathbb{R})x^2 \leq 0$» истинно, утверждение «$(\exists x \in \mathbb{R})x^2 < 0$» ложно.

Язык элементарной алгебры

Отрицание

Отрицание высказываний или высказывательных форм строится с помощью формулировки «неверно, что …» или заменой слов (символов), обозначающих отношения между числами, например:

является $\leftrightarrows$ не является, $= \leftrightarrows \neq$, $> \leftrightarrows \leq$, $\in \leftrightarrows \notin$, и т.п.

П р и м е р ы .

«число 12 не является простым числом» -- высказывание, «число 12 является простым числом» -- его отрицание,

«$x^2 > 0$» -- высказывательная форма, «$x^2 \leq 0$» -- её отрицание.

Отрицание высказывания – это тоже высказывание. Отрицание истинного высказывания ложно, и точно так же отрицание ложного высказывания истинно.

Язык элементарной алгебры

Отрицание высказываний с кванторами

Законы де Моргана

$$\neg(\forall x \in M)p(x) \Leftrightarrow (\exists x \in M)\neg p(x),$$
$$\neg(\exists x \in M)p(x) \Leftrightarrow (\forall x \in M)\neg p(x).$$

Пример.

«число 12 не является простым числом» -- высказывание, «число 12 является простым числом» -- его отрицание,

«$x^2 > 0$» -- высказывательная форма, «$x^2 \leq 0$» -- её отрицание.

Язык элементарной алгебры

Равносильность высказывательных форм

Две высказывательные формы называются равносильными, если они истинны при одних и тех же значениях переменной (переменных).

П р и м е р. Равносильны утверждения:

«Целое число k делится на 9» и «Сумма цифр числа k в десятичной позиционной записи делится на 9»,

«$x^2 + y^2 = 0$» и «$x^4 + y^4 = 0$».

На письме используют символ $\Leftrightarrow$:

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^4 + y^4 = 0.$$

В речи используют обороты:

«в том и только том случае», «тогда и только тогда»,

«необходимо и достаточно», и пр.

Язык элементарной алгебры

Равносильность высказывательных форм

Равносильность является сущностью определений.

Примеры. Равносильны утверждения:

«Натуральное число k является простым $\underset{df}{\Leftrightarrow}$

$\underset{df}{\Leftrightarrow}$ k делится только на 1 и на самого себя»,

«Число b есть квадратный корень из a $\underset{df}{\Leftrightarrow}$ $b^2 = a$».

«$b = \sqrt{a} \underset{df}{\Leftrightarrow} b^2 = a \,\&\, b \geq 0$».

Язык элементарной алгебры

Следование

Высказывательная форма $q(x)$ называется следствием высказывательной формы $p(x)$, если выполняется следующее условие: при всяком значении переменной x, при котором высказывание $p(x)$ истинно, высказывание $q(x)$ также истинно.

На письме используют символ $\Longrightarrow$:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) x < y \Longrightarrow x^2 < y^2, \qquad x < y \Longrightarrow x^2 < y^2 (x > 0, y > 0).$$

В речи используют обороты:

«если $p(x)$, то $q(x)$»,

«$p(x)$ – достаточное условие для $q(x)$»,

«$q(x)$ – необходимое условие для $p(x)$».

П р и м е р ы :

«чтобы произведение трёх натуральных чисел было больше 20, достаточно, чтобы меньшее из них не было равно 1»,

«условие, что меньшее из трёх натуральных чисел не равно 1, необходимо для того, чтобы их произведение было больше 20».

Язык элементарной алгебры

Обратное утверждение

Обратным к утверждению $q(x) \Longrightarrow p(x)$ называют утверждение $p(x) \Longrightarrow q(x)$.

Другими словами, чтобы получить обратное утверждение к следствию, нужно в этом следствии поменять местами посылку и заключение.

П р и м е р. Обратными утверждениями являются:

«если $x > 4$, то $|x| > 4$» и «если $|x| > 4$, то $x > 4$»,

«если α и β -- корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $\alpha + \beta = -p$ и $\alpha\beta = q$»

и

«если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -p$ и $\alpha\beta = q$,

то они являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$».

Язык элементарной алгебры

Контрапозиция

Утверждение $\neg q(x) \Longrightarrow \neg p(x)$ называют **контрапозицией** утверждения $p(x) \Longrightarrow q(x)$.

Закон контрапозиции. Всякое утверждение о следовании равносильно своей контрапозиции:

$$(p(x) \Longrightarrow q(x)) \Longleftrightarrow (\neg q(x) \Longrightarrow \neg p(x))$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$. Пусть утверждение $p(x) \Longrightarrow q(x)$ истинно. Возьмём значение x, для которого посылка $\neg q(x)$ истинна, то есть утверждение $q(x)$ ложно. Но тогда $p(x)$ и ложно: так как при всех x, при которых $p(x)$ истинно, истинно и его следствие $q(x)$. Следовательно, отрицание $\neg p(x)$ истинно.

$\Longleftarrow$. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Существуют 4 утверждения о следовании с формами $p(x)$ и $q(x)$ и их отрицаниями:

$p(x) \Longrightarrow q(x)$	-- «данное» утверждение,
$q(x) \Longrightarrow p(x)$	-- обратное утверждение,
$\neg q(x) \Longrightarrow \neg p(x)$	-- контрапозиция данного утверждения,
$\neg p(x) \Longrightarrow \neg q(x)$	-- контрапозиция обратного (противоположное к данному).

Язык элементарной алгебры

Равносильность утверждения и его контрапозиции часто используется для доказательства: вместо утверждения $p(x) \Longrightarrow q(x)$ доказывается утверждение $\neg q(x) \Longrightarrow \neg p(x)$.

П р и м е р. Докажем утверждение «Если число оканчивается цифрой 2, то оно не является квадратом натурального числа».

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Квадрат натурального числа оканчивается той же цифрой, что и квадрат его последней цифры. Непосредственной проверкой убеждаемся, что среди квадратов однозначных чисел нет таких, которые оканчиваются цифрой 2. Поэтому, если число является точным квадратом, то оно не может оканчиваться цифрой 2.

Было дано:

$p(x)$: «число оканчивается цифрой 2», $q(x)$: «число не является точным квадратом» и следовало доказать: $p(x) \Longrightarrow q(x)$.

Мы рассмотрели:

$\neg q(x)$: «число является точным квадратом» и вывели $\neg p(x)$: «число не оканчивается цифрой 2».

Мы доказали контрапозицию исходного утверждения, а следовательно, и само утверждение.

Язык элементарной алгебры

Логические связки

Из двух высказываний *p* и *q* можно составить новое высказывание с помощью логических связок.

Предложение (*p* и *q*) называют **конъюнкцией** высказываний *p* и *q,* которая истинна в том и только том случае, когда истинны оба высказывания *p* и *q*.

П р и м е р ы.

«12 – простое число и 12 – чётное число» -- ложное высказывание,

«12 – чётное число и 12 больше 10» -- истинное высказывание.

Так же определяется конъюнкция высказывательных форм (*p*(*x*) и *q*(*x*)): она истинна при тех значениях *x*, при которых оба высказывания *p* и *q* истинны.

Язык элементарной алгебры

Логические связки

Предложение (p или q) называют **дизъюнкцией** высказываний p и q, которая истинна в том и только том случае, когда истинно хотя бы одно из высказываний p и q.

П р и м е р ы.

«12 – простое число или 12 – чётное число» -- истинное высказывание,

«12 – отрицательное число или 12 не больше 10» -- ложное высказывание.

Так же определяется дизъюнкция высказывательных форм ($p(x)$ и $q(x)$): она истинна при тех значениях x, при которых хотя бы одно из высказываний p и q истинно.

Язык элементарной алгебры

Логические связки

Отрицание конъюнкции есть дизъюнкция отрицаний:

$$\neg(p \text{ и } q) \Leftrightarrow \neg q \text{ или } \neg\, p.$$

Отрицание дизъюнкции есть конъюнкция отрицаний:

$$\neg(p \text{ или } q) \Leftrightarrow \neg q \text{ и } \neg\, p.$$

Вопросы

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1FsojgDApg24EovzwrWO5HmXGtRLhWtq07qcm2dBOJDc/edit?usp=sharing

Вопрос 1. Даны многочлены $P = 3x - 1$ и $Q = 2x + 1$.

Какие из следующих утверждений верны?

(1) $(P + Q)(P - Q) = P^2 - Q^2$

(2) $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0 \vee Q = 0$

Вопросы

В о п р о с 2. Какие из утверждений верны?

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})x^2 > 1$

(2) $(\forall x \in \mathbb{R})x^2 < 1$

(3) $(\exists x \in \mathbb{R})x^2 > 1$

(4) $(\exists x \in \mathbb{R})x^2 < 1$

Вопросы

Вопрос 3. Запишите множество значений x, при которых истинно данное утверждение.

Ответ запишите в виде множества, элементы отделяйте запятой, например {1, 2, 3}.

$$(x > 1) \text{ и } (x^2 = 4 \text{ или } x^2 = 9).$$

Вопросы

Вопрос 4. Какие из следующих утверждений верны?

$(1)(\forall x \in \mathbb{R}) x < 1 \Longrightarrow x^2 \leq x$

$(2)(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 = 1) \Longrightarrow (x = 1 \text{ или } x = -1)$

$(3)(\forall x \in \mathbb{R}) x > 1 \Longrightarrow x^2 > 1$

$(4)(\forall x \in \mathbb{R}) x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4$

Вопросы

Вопрос 5. Поделитесь, пожалуйста, вашим мнением.

Литература

- Современные основы школьного курса математики: пособие для студентов пед. ин-тов / Н.Я. Виленкин, К.И. Дуничев, Л.А. Калужнин, А.А. Столяр. М.: Просвещение, 1980. 240 с.
- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968, 232 с.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ