Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Многочлены

Е.А. Седова, к.п.н.,

проф. кафедры элементарной математики

Многочлены

ПЛАН

- Многочлен. Стандартный вид многочлена. Степень многочлена.
- Значение многочлена. Схема Горнера.
- Равенство многочленов.
- Действия над многочленами.
- Теорема о рациональных корнях.
- Теорема Безу.

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Многочлен

Многочлен от x (с переменной x) – это выражение, составленное из чисел и буквы x с помощью знаков сложения и умножения.

Для краткости используют знак минус и обозначение степени с натуральным показателем $(n > 1)$; не пишут знак умножения между числом и буквой x.

Иногда используют символ первой степени x^1 и символ нулевой степени x^0, заменяющий 1:

$$5x^2 + 2x^1 + 3x^0,$$

- Примеры.

Являются многочленами: $3x^2 - 2x + 1$, $\sqrt{7}\,x^3$, $\frac{2}{3}$, 0.

Не являются многочленами: $\sqrt{x^2}$, $\frac{x^2-1}{x-1}$.

Стандартный вид многочлена

С помощью *алгебраических преобразований* (перестановки слагаемых, раскрытия скобок и приведения подобных членов) многочлен можно привести к виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

где n натуральное число, a_0 , a_1, …, a_n – числа (коэффициенты многочлена), x – символ, вместо которого можно подставить любое число.

Если старший коэффициент $a_0 \neq 0$, то эту запись называют – **стандартным видом многочлена**.

Стандартный вид многочлена

В многочлене стандартного вида

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x\ + a_n$$

a_0x^n – старший член;

a_n– свободный член;

a_0 – старший коэффициент;

n – степень многочлена.

Значение многочлена

Пусть c – некоторое число. **Значением многочлена** $p(x)$ при $x = c$ называется число, которое получится, если в $p(x)$ вместо x подставить число c и произвести указанные действия.

- Пример. Рассмотрим многочлен

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5\,.$$

Его значения:

$$p(2) = 1; \quad p\left(1 - \sqrt{2}\right) = -1 - 4\sqrt{2}; \qquad p(2 + i) = -3 + 6i.$$

Значение многочлена

Значение многочлена при x = 0 равно свободному члену, а при x = 1 – сумме всех коэффициентов этого многочлена, записанного в стандартном виде.

- Пример. Сумма коэффициентов многочлена

$$p(x) = (5x^2 + x - 7)^{2020} + 2020x$$

равна $p(1) = 2021$.

Значение многочлена

- П р и м е р. Многочлен

$$p(x) = 9x^4 - x^2 + 2x - 4$$

при $x = 5$ принимает значение $p(5) = 5606.$

На калькуляторе удобно выполнять вычисления так:

$$9x^4 + 0 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 2x - 4 =$$
$$= (9x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 2) \cdot x - 4 =$$
$$= \left((9x^2 + 0 \cdot x - 1) \cdot x + 2\right) \cdot x - 4 =$$
$$= \left(\left((9x + 0) \cdot x - 1\right) \cdot x + 2\right) \cdot x - 4;$$
$$p(5) = \left(\left((9 \cdot 5 + 0) \cdot 5 - 1\right) \cdot 5 + 2\right) \cdot 5 - 4 = 5605.$$

Значение многочлена

- **Пример.** Многочлен

$$p(x) = 9x^4 - x^2 + 2x - 4$$

при $x = 5$ принимает значение $p(5) = 5606.$

На калькуляторе удобно выполнять вычисления так:

$$9x^4 + 0 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 2x - 4 =$$
$$= (9x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 2) \cdot x - 4 =$$
$$= \big((9x^2 + 0 \cdot x - 1) \cdot x + 2\big) \cdot x - 4 =$$
$$= \Big(\big((9x + 0) \cdot x - 1\big) \cdot x + 2\Big) \cdot x - 4;$$
$$p(5) = \Big(\big((9 \cdot 5 + 0) \cdot 5 - 1\big) \cdot 5 + 2\Big) \cdot 5 - 4 = 5605.$$

Схема Горнера

Запишем цепочку вычисления в виде таблицы:

	9	0	– 1	2	– 4
5	9	+ $5 \cdot 9$ = 45	+ $5 \cdot 45$ = 224	+ $5 \cdot 224$ = 1122	+ $5 \cdot 1122$ = 5606

Без промежуточных вычислений:

	9	0	– 1	2	– 4
5	9	45	224	1122	5606

Если последнее число схемы Горнера для многочлена $p(x)$ и числа c равно 0, то c – корень $p(x)$.

Степень многочлена

Степень многочлена p обозначают символом $\mathbf{deg}\ \boldsymbol{p}$.

$$\deg pq = \deg p + \deg q;$$

$$\deg (p + q) \leq \min (\deg p; \deg q).$$

- Примеры.

$$p(x) = 5x^2 + x - 1, \qquad \deg p = 2;$$

$$q(x) = 2020x + 2021, \qquad \deg q = 1;$$

$$r(x) = 2020 = 2020x^0, \qquad \deg r = 0.$$

Если при упрощении многочлена все его коэффициенты обращаются в нуль, такой многочлен называют **нулевым многочленом**. Нулевой многочлен не имеет степени.

Равенство многочленов

Многочлены $p(x)$ и $q(x)$ **равны**, если они имеют одинаковый стандартный вид.

Равенство многочленов

Теорема 1. *Если* $p(x) = q(x)$, *то* $(\forall c \in \mathbb{C})\ p(c) = q(c)$.

Теорема 2. *Если* $(\forall c \in \mathbb{C})\ p(c) = q(c)$, *то* $p(x) = q(x)$.

Теорема 3. *Если* $p(x) \neq q(x)$, *то* $(\exists c \in \mathbb{C})\ p(c) \neq q(c)$.

Теорема 4. *Если* $(\exists c \in \mathbb{C})\ p(c) \neq q(c)$, *то* $p(x) \neq q(x)$.

Равенство многочленов

Теорема 5. *Если* $p(x)$ *и* $q(x)$ *– многочлены степени не выше* n *и их значения совпадают в* $n+1$ *точке, то* $p(x)=q(x)$.

Примеры

- Пример 1. Проверить, верно ли выполнено умножение многочленов

$$(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)(x + 1) = x^6 + 1.$$

Обозначим многочлены в левой и правой частях равенства через $p(x)$ и $q(x)$. Подставим несколько значений переменной (по теореме 5 число проб не больше 7):

$$p(0) = q(0) = 1, \quad p(1) = q(1) = 0, \quad p(-1) = 0, q(-1) = 2.$$

Следовательно, $p(x) \neq q(x)$.

Примеры

- П р и м е р 2 . Подобрать числа , и так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

Приведём дроби к общему знаменателю

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Многочлены в числителях дробей должны быть равны:

$$x+5 = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)\,(x-2). \qquad (*)$$

I с п о с о б . Представим многочлен в правой части равенства (*) в стандартном виде:

$$x+5 = (a+b+c)x^2 - (5a+4b+3c) + (6a+3b+2c).$$

По определению равенства многочленов должны выполняться соотношения:

$a+b+c=0$, $5a+4b+3c=-1$, $6a+3b+2c=5$, откуда $a=3$, $b=-7$, $c=4$.

Примеры

II способ. Так как многочлены в левой и правой частях равенства (*) не выше второй степени, то по теореме 5 достаточно потребовать совпадения их значений в трёх точках:

при $x = 1$, $x = 2$ и $x = 4$ равенство принимает вид, соответственно,

$$6 = 2a, \qquad 7 = -b, \qquad 8 = 2c,$$

откуда $a = 3$, $b = -7$, $c = 4$.

Примеры

- П р и м е р 3. Возьмём три различных числа a, b, c и рассмотрим уравнение

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1.$$

Так как

(1) в знаменателе каждой дроби стоит число;

(2) в числителе каждой дроби – многочлен второй степени;

(3) в левой части уравнения – многочлен второй степени;

(4) числа a, b и c удовлетворяют этому уравнению,

то записанное квадратное уравнение имеет три различных корня.

Найти ошибки в рассуждении.

Примеры

В левой части уравнения – многочлен *не выше* второй степени. Так как в правой части уравнения – тоже многочлен не выше второй степени и значения этих многочленов совпадают в трёх точках, то по теореме 5 эти многочлены равны. Следовательно, если многочлен в левой части уравнения привести к стандартному виду, получится 1.

Поэтому записанное уравнение является не квадратным уравнением, а тождеством $1 \equiv 1$.

Теорема о целых корнях

Теорема о целых корнях. *Всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена*.

Доказательство. Пусть $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен с целыми коэффициентами, и целое число k – его корень.

Тогда

$$f(k) = 0, \text{ т. е. } a_0k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$

откуда

$$a_n = -(a_0k^{n-1} + a_1k^{n-2} + \dots + a_{n-1})k.$$

Так как все числа в этом равенстве, по условию, целые, то оно означает, что a_n делится на k, т.е. k действительно является делителем свободного члена a_n многочлена f, что и требовалось доказать.

Теорема о рациональных корнях

Теорема о рациональных корнях. *Если число $c = \frac{p}{q}$, где дробь $\frac{p}{q}$ несократима, является корнем члена многочлена с целыми коэффициентами, то p – делитель свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента этого многочлена*.

Доказательство. Пусть $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен с целыми коэффициентами, и несократимая дробь $c = \frac{p}{q}$ – его корень.

Это значит, что $f\left(\frac{p}{q}\right)$ = 0, т. е.

$$a_0\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0,$$

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0,$$

$$a_nq^n = -(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \cdots + a_{n-1}q^{n-1})p,$$

так что a_nq^nделится на *p*.

Так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то числа *p* и *q* не имеют общих простых делителей, а значит, *p* и q^n также не имеют общих простых делителей. Поэтому a_n делится на *p*.

Точно так же доказывается, что a_0 делится на *q*, и теорема доказана.

Следствие из теоремы о рациональных корнях

Многочлен с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом* 1 *не может иметь дробных корней.

Действительно, если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ – корень такого многочлена, то q делитель старшего коэффициента $a_0 = 1$, так что $q = \pm 1$, т. е. $\frac{p}{q}$ – целое число.

Доказанное следствие можно сформулировать и иначе:

Корни многочлена с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом* 1 *либо целые, либо иррациональные.

Примеры

- **Пример 1.** Найти целые корни уравнения

а) $x^{51} - 33x^{32} - x + 33 = 0;$

б) $76x^{215} + 14x^{123} - 891x^{27} + 14x - 97 = 0.$

- **Пример 2.** Найти рациональные корни уравнения

а) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0;$

б) $16x^3 + 12x^2 - 1 = 0.$

Решение примера 1.

а) Целыми корнями уравнения $x^{51} - 33x^{32} - x + 33 = 0$ могут быть только числа ± 1, ± 3, ± 11, ± 33.

Числа 1 и -1 корнями являются (проверка).

Числа ± 3, ± 11, ± 33 корнями не являются (оценка):

$x^{51} - 33x^{32} - x + 33 = x^{32}(x^{19} - 33) + 33 - x$;

$$11^{32}(11^{19} - 33) + 33 - 11 > 0,$$

$$33^{32}(33^{19} - 33) + 33 - 33 > 0,$$

$$(-11)^{32}\left((-11)^{19} - 33\right) + 33 + 11 < 0,$$

$$(-33)^{32}\left((-33)^{19} - 33\right) + 33 + 33 < 0.$$

Решение примера 1.

б) Целыми корнями данного уравнения могут быть только числа ± 1, ± 97.

Числа 1 и -1 корнями не являются (проверка).

Числа 97 и -97 корнями тоже не являются (оценка):

покажем, что старший член $76x^{215}$ «гораздо больше» всех остальных, то есть

$$76|x|^{215} > |14x^{123} - 891x^{27} + 14x - 97|.$$

Это действительно так:

$$|14x^{123} - 891x^{27} + 14x - 97| \leq 14|x|^{123} + 891|x|^{27} + 14|x| + 97,$$

все неравенства

$$14|x|^{123} < |x|^{215}, 891|x|^{27} < |x|^{215}, 14|x| < |x|^{215}, 97 < |x|^{215}$$

выполняются, например, при $|x| > 2$, поэтому числа 97 и -97 не являются корнями данного уравнения.

Решение примера 2.

а) Уравнение $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ квадратное относительно x^2; при $y = x^2$ имеем:

$4y^2 + 3y - 1 = 0$, его корни – числа -1 и $\frac{1}{4}$;

уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений;

уравнение $x^2 = \frac{1}{4}$ имеет решения $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, данное уравнение имеет всего два корня, и оба они рациональны.

Решение примера 2.

б) Если сделать замену $y = 2x$, то уравнение $16x^3 + 12x^2 - 1 = 0$ принимает вид $2y^3 + 3y^2 - 1 = 0$, и проверке подлежат только «кандидаты» ± 1 и $\pm\frac{1}{2}$.

Поверка показывает:

-1 и $\frac{1}{2}$ являются корнями данного уравнения;

1 и$-\frac{1}{2}$ – не корни.

Следовательно, исходное уравнение имеет корни $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$.

Пример 3.

Пример 3. Доказать, что если α и β – корни соответственно уравнений $x^3 = 3$ и $x^3 = 9$, то сумма $\alpha + \beta$ – иррациональное число.

Решение примера 3.

Обозначим данное число через c и возведем его в куб, применяя формулу куба суммы в виде $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$:

$c^3 = (\alpha+\beta)^3 = 3 + 9 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 12 + 9c$, $c^3 - 9c - 12 = 0$.

Число c является корнем многочлена $x^3 - 9x - 12$. Так как старший коэффициент этого многочлена равен 1, то его корни либо целые, либо иррациональные, и остается доказать, что число c не является целым.

По теореме о целых корнях, "кандидатами на корень" являются ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12;

непосредственная подстановка показывает, что ни одно из этих чисел не является корнем.

Поэтому число c – иррациональное, что и требовалось доказать.

Решение примера 3.

Подстановку чисел ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12 в уравнение можно сократить, если провести оценку чисел α и β:

α – корень уравнения $x^3 = 3$, $\quad 1 < \alpha < 2$;

β – корень уравнения $x^3 = 9$, $\quad 2 < \beta < 3$;

поэтому сумма $3 < \alpha + \beta < 5$, так что осталось исключить единственную возможность $\alpha + \beta = 4$.

Действия над многочленами

- Сумма, разность и произведение многочленов также являются многочленами.

$$p = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

$$q = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$$

$$p + q = (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n) + (b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n)$$
$$p - q = (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n) - (b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n)$$
$$pq = (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n)$$

Деление многочленов

Многочлен f **делится на** многочлен g, если существует такой многочлен h, что $f = gh$.

- Пример 1. Многочлен $x^2 - 1$ делится на $x - 1$, так как $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.
- Пример 2. Многочлен $x^2 + 1$ не делится на $x - 1$.

Докажем это методом от противного: пусть $x^2 + 1$ делится $(x - 1)$; тогда имеет место тождество

$$x^2 + 1 = (x - 1)p(x),$$

где $p(x)$ – некоторой многочлен.

Но при $x = 1$ правая часть этого тождества обращается в 0, а левая – нет. Поэтому сделанное предположение неверно, и многочлен $x^2 + 1$ не делится на $x - 1$.

Деление с остатком

Разделить многочлен f на многочлен g **с остатком** означает представить f в виде $f = gq + r$, где q и r – многочлены, причём r имеет степень меньше степени g, либо равен 0.

Теорема 6. *Пусть f и g – многочлены, $g \neq 0$. Тогда существуют такие многочлены q и r, что*

$$f = gq + r, \qquad (*)$$

где $\deg r < \deg g$ или $g = 0$.

Указанными условиями многочлены q и r определяются однозначно.

Деление с остатком

Доказательство.

Если $f = 0$, то равенство (*) выполняется при $q = 0$ и $r = 0$, то есть искомые многочлены существуют.

Пусть $f \neq 0$ и пусть

$$\deg f = n, f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$\deg g = m, g = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m.$$

Если $n < m$, то равенство (*) выполняется при $q = 0$ и $r = f$, то есть требуемые многочлены найдены.

Деление с остатком

Пусть $n \geq m$, то рассмотрим многочлены

$$q^* = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} \text{ и } f^* = f - q^* g.$$

Задание 1. Запишите старший член многочлена $q^* g$.

Задание 2. Что можно сказать о степени многочлена f^*?

Деление с остатком

Мы рассматриваем многочлены

$$q^* = \frac{a_0}{b_0}\, x^{n-m} \text{ и } f^* = f - q^* g.$$

Старший член многочлена $q^* g$ равен старшему члену многочлена f:

$$\frac{a_0}{b_0}\, x^{n-m} \cdot b_0\, x^m = a_0\, x^n.$$

Поэтому $f^* = 0$ или $\deg f^* < n$.

Следовательно, многочлен f^* либо равен нулю, либо его степень меньше n.

Перепишем равенство $f^* = f - q^* g$ иначе:

$$f = q^* g + f^*$$

Задание 3. Можно ли утверждать, что многочлены $q^* = q$ и $f^* = r$ удовлетворяют требуемым условиям, то есть многочлен f представлен в виде (*)?

Деление с остатком

Если многочлен f^* равен нулю или его степень меньше m, то цель достигнута.

Если $\deg f^* \geq m$, то рассмотрим многочлены

$$q^{**} = \frac{\text{ст. коэфф.} f^*}{b_0} x^{\deg f^* - m} \text{ и } f^{**} = f^* - q^{**} g.$$

Тогда $f^* = q^{**} g + f^{**}$, и в равенстве

$$f = q^* g + f^* = q^* g + (q^{**} g + f^{**}) = (q^* + q^{**}) g + f^{**}$$

многочлен f^{**} либо равен нулю, либо $\deg f^{**} < \deg f^* < \deg f$.

Если при этом его степень меньше m, то цель достигнута.

Если $\deg f^{**} \geq m$, то …?

Деление с остатком

Рассмотрим последовательность многочленов

$$f, f^*, f^{**}, \ldots$$

Так как $\deg f > \deg f^* > \deg f^{**} > \ldots$, то после конечного числа шагов мы получим многочлен $f^{*\cdots*}$, либо равный нулю, либо имеющий степень меньше степени f^*.

Тогда многочлены

$$r = f^{*\cdots*} \text{ и } q = q^* + \cdots + q^{*\cdots*}$$

и есть требуемые многочлены в равенстве (*).

З а д а н и е 4. Доказана ли теорема?

Деление с остатком

Доказана осуществимость деления с остатком. Докажем единственность.

Пусть деление с остатком многочлена f на многочлен g произведено двумя различными способами:

$$f = q_1 g + r_1 \text{ и } f = q_2 g + r_2.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$(q_2 - q_1)g = r_1 - r_2.$$

Так как в правой части равенства $\deg(r_1 - r_2) < m$ или $r_1 - r_2 = 0$,

то и в левой части $\deg\big((q_2 - q_1)g\big) < m$ или $(q_2 - q_1)g = 0$.

Но если многочлен $q_1 - q_2 \neq 0$, то $\deg\big((q_2 - q_1)g\big) \geq m$, чего быть не может.

Следовательно, $q_1 - q_2 = 0$ и $r_1 - r_2 = 0$, то есть $q_1 = q_2$ и $r_1 = r_2$. Теорема доказана.

Деление уголком

На равенстве $f(x) = \frac{a_0}{b_0}\, x^{n-m} g(x) + \left(f(x) - \frac{a_0}{b_0}\, x^{n-m} g(x) \right)$ основан способ деления многочленов «уголком».

Разделим многочлен $f = x^4 - x^2 - 2x - 1$ на $g = x^2 + x + 1$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & x^4 & + & 0 \cdot x & - & x^2 & - \ 2x & - & 1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{10-10}
- & & & & & & & & & \\
 & x^4 & + & x^3 & + & x^2 & & & & x^2 - x - 1 \\ \cline{2-6}
 & & & -x^3 & - & 2x^2 & - \ 2x & & & \\
 & & - & & & & & & & \\
 & & & -x^3 & - & x^2 & - \ x & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & & x^2 & - \ x & - & 1 & \\
 & & & & - & & & & & \\
 & & & & & x^2 & - \ x & - & 1 & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Ещё раз о схеме Горнера

Пусть $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 5x + 6$. Составим схему Горнера для $p(x)$ и числа 2:

	3	**– 5**	**– 5**	**6**
2	**3**	**1**	**– 3**	**0**

Так как $p(2) = 0$, то 2 – корень.

Выделим в многочлене $p(x)$ линейный множитель $(x - 2)$:

$$3x^3 - 5x^2 - 5x + 6 =$$
$$= 3x^2(x-2) + 6x^2 - 5x^2 - 5x + 6 = 3x^2(x-2) + x^2 - 5x + 6 =$$
$$= 3x^2(x-2) + x(x-2) + 2x - 5x + 6 = 3x^2(x-2) + x(x-2) - 3x + 6 =$$
$$= 3x^2(x-2) + x(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(3x^2 + x - 3).$$

Сравните коэффициенты второго множителя с числами в схеме Горнера.

Верно ли, что если c – корень многочлена, то в нём можно выделить линейный множитель $(x - c)$?

Теорема Безу

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена f на двучлен $x - c$ равен $f(c)$ – значению f при $x = c$.*

Доказательство. Разделим f с остатком на $x - c$:

$$f = (x - c)q + r,$$

где q и r – многочлены, причём r имеет степень меньше степени двучлена $x - c$, либо равен 0. Следовательно, r – число.

Из равенства $f = (x - c)q + r$ при $x = c$ получаем:

$$f(c) = 0 \cdot q + r = r,$$

то есть $f = (x - c)q + f(c)$, что и требовалось доказать.

Следствия из теоремы Безу

Следствие 1. *Многочлен f делится на $x - c$ тогда и только тогда, когда число c является корнем f.*

Доказательство.

Если f делится на $x - c$, то остаток от деления равен 0; по теореме Безу остаток равен $f(c)$, так что $f(c) = 0$, то есть c – корень многочлена f.

Обратно, если c – корень многочлена f, то есть $f(c) = 0$, то по теореме Безу в равенстве

$$f = (x - c)q + r$$

остаток $r = f(c) = 0$ и $f = (x - c)q$, так что f делится на $x - c$.

Мы доказали *утверждение о выделении линейного множителя из многочлена*.

Следствия из теоремы Безу

Следствие 2. *Многочлен степени n имеет не более n корней.*

Доказательство. Применим индукцию по степени многочлена.

Для $n = 1$ утверждение верно, так как многочлен 1-й степени $ax + b$ имеет ровно 1 корень (не более одного).

Пусть утверждение верно для всех многочленов степени n; рассмотрим f, такой, что $\deg f = n + 1$ и c – один из корней f. Тогда по следствию 1 многочлен f можно представить в виде

$$f = (x - c)g,$$

где $\deg g = n$.

Если f имеет корень d, отличный от c, то

$$f(d) = (d - c)g(d),$$

откуда $g(d) = 0$, то есть d – корень g.

Так как по предположению индукции g имеет не более n корней, то f имеет не более n корней, отличных от c, и его общее число корней не больше $n + 1$.

Следовательно, данное утверждение верно для многочленов любой степени.

Следствия из теоремы Безу

Следствие 3. *Если значения двух многочленов, степень которых не больше* n, *совпадают при* $n + 1$ *значении переменной, то эти многочлены равны.*

Доказательство. Пусть многочлены f и g степени не больше n принимают равные значения в $n + 1$ точке c_1, c_2, …, c_n.

Предположим противное: $f \neq g$.

Разность $h = f - g$ – ненулевой многочлен, степень которого не больше n.

Для любого $i = 1, \dots, n$

$$h(c_i) = f(c_i) - g(c_i) = 0.$$

Но тогда многочлен h имеет по крайней мере $n + 1$ корень, тогда как его степень не больше n.

Это противоречит следствию 2, и, следовательно, сделанное предположение не верно. Таким образом, $f = g$, что и требовалось доказать.

Мы доказали *теорему 5*.

Вопросы

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1ALrMuqo2h-tWSQSyMV-sFW4b9btQW9GFlMHMIExTvXA/edit?usp=sharing

Вопрос 1. Выберите все выражения, являющиеся многочленами.

(1) $\varphi \overset{\text{def}}{=} x^2 - \sqrt[3]{5}$?

(2) $\varphi \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{x^3-x^2+x-1}$.

(3) $\varphi \overset{\text{def}}{=} \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$.

(4) $\varphi \overset{\text{def}}{=} x^2 - \frac{5}{3}x - 1$.

Вопросы

Вопрос 2. Найдите сумму коэффициентов многочлена, получающегося из данного многочлена приведением к стандартному виду:

$$1 + (x^2 - 6x + 5)(x^5 + 3x^3 - 2x + 7)^6 + (x^2 - 3x + 1)^{37}(x^3 + 5x + 7).$$

Вопросы

- В о п р о с 3 . Даны утверждения

A: *Если* $p(x) = q(x)$, *то* $(\forall c \in \mathbb{C})\ p(c) = q(c)$.

B: *Если* $(\forall c \in \mathbb{C})\ p(c) = q(c)$, *то* $p(x) = q(x)$.

C: *Если* $p(x) \neq q(x)$, *то* $(\exists c \in \mathbb{C})\ p(c) \neq q(c)$.

D: *Если* $(\exists c \in \mathbb{C})\ p(c) \neq q(c)$, *то* $p(x) \neq q(x)$.

Выберите верные высказывания:

(1) А равносильно В.

(2) А равносильно С.

(3) А равносильно D.

(4) В равносильно С.

(5) В равносильно D.

(6) С равносильно D.

Вопросы

Вопрос 4. Найдите рациональные корни многочлена:

$$x^3 - 2x^2 - 17x - 6 \,.$$

Вопросы

Вопрос 5. Поделитесь, пожалуйста, вашим мнением.

Литература

- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ