

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Многочлены-1

*Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики*

Многочлены-1

ПЛАН

- Итоги по теме «Тождества» (по состоянию на 20/X).
- Квадратный трёхчлен в задачах.
 - Азбука квадратного трёхчлена.
 - Множества точек на плоскости.
 - Тождественные преобразования.

Все учебные материалы доступны на сайте: <http://emmom.ru>

ФИО	ЛК_0 04/09 Max 5 35 GF	ЛК_1 11/09 Max 5 37 GF	ЛК_2 25/09 Max 5 38 GF	ЛК_3 09/10 Max 5 13 GF	ПЗ_0 04/09 Max 10 35 GF	ПЗ_1 11/09 Max 10 36 GF	ПЗ_2 18/09 Max 10 33 GF	ПЗ_3 25/09 Max 10 32 GF	ПЗ_4 02/10 Max 10 26 GF	ПЗ_5 09/10 Max 10 13 GF	КР_1.1 16/10 Max 30 37 GF	КР_1.2 16/10 37 GF	Сумма Max 95(+15)
Андриянова Анна Сергеевна	5	5	5		10	6	10	10	10		42	12	115
Арефьева Анна	5	5	5	5	10	10	10	10	10	10	42	10	132
Ахмат Али Адам	4	5			7	10					34	10	70
Брюхова Анна Дмитриевна	5	5	5		10	10	10	10			44	10	109
Васина Ксения Валентиновна	5	5	5		10	10	10	10	10		36	12	113
Дубовицкая Ольга Николаевна	5	5	5	5	10	10	10	10	10	10	40	12	132
Захарова Анастасия Николаевна	5	5	5	5	10	10	10	10	10	10	44	6	130
Зырянова Тамара Владимировна	5	5	4		10	10	10		10		44	12	110
Куликова Вероника	5	5	5		10	10	10	10	10		44	6	115
Махмудова Марина Ахмедовна	5	4	5		10	10	10	10	10		40	12	116
Мачучин Иван Алексеевич	4				9								13
Оликова Виктория	5	5	5		10	10	10	10	10		44	12	121
Павлова Валентина Алексеевна	5	5	5	4	8	10	10	10	10	10	40	12	129
Телицына Анастасия Алексеевна	5	5			10	10	10				42	10	92
Тен Валерия Игоревна	4	5	5		10	6	10	10	10		44		104
Янюшкин Никита Михайлович	5	5	5	4	10	10	10	8	10	10	40	12	129

ФИО	ЛК_0 04/09 Max 5 35 GF	ЛК_1 11/09 Max 5 37 GF	ЛК_2 25/09 Max 5 38 GF	ЛК_3 09/10 Max 5 13 GF	ПЗ_0 04/09 Max 10 35 GF	ПЗ_1 11/09 Max 10 36 GF	ПЗ_2 18/09 Max 10 33 GF	ПЗ_3 25/09 Max 10 32 GF	ПЗ_4 02/10 Max 10 26 GF	ПЗ_5 09/10 Max 10 13 GF	КР_1.1 16/10 Max 30 37 GF	КР_1.2 16/10 37 GF	Сумма Max 95(+15)
Богушевич Виктория Юрьевна	5	5	5		10	10	8	10	10		40	10	113
Варжунтович Мария Александровна	5	5	3	5	10	8	10	8	10	10	38	12	124
Волкова Виктория Сергеевна	5	5	5		10	10	8	10			32		85
Груздева Елизавета Борисовна	5	5	5		10	10	8	10	10		36	12	111
Диордиева Валентина Константиновна	5	5	5	5	10	8	10	7	10	10	36	10	121
Дорохова Александра Андреевна	5	5	5	5	10	10	8	10	10	10	40	12	130
Душина Полина Олеговна	5	5	5		10	10	10	10	10		32		97
Ермакович Полина	3	5	2		10	10	10	8	10		40	12	110
Коваль Валерия Юрьевна	5	5	5		8	10	8	10	10				61
Кочешков Роман Александрович	5	5	5		10	10	8	8			38	10	99
Матвеев Максим Михайлович	4	5	5	5	9	10	8	10	10	10	38	12	126
Приходько Юлия Дмитриевна	3	4		5	9	10 (6) Файл-			10	10	42	12	95
Проказова Юлия Александровна	5	5	3		10	9	10	10 Файл			40	8	100
Прокопцев Алексей Александрович	5	5	5	5	10	9	9	9	10	10	44	12	133
Сорокин Михаил Юрьевич	5	5	4	5	10	10	8	10		10	38	10	115
Юматова Ксения Александровна	5	5	5		10	10	10	10	10		32		97
Ямалова Румия Маратовна	5	5		5	10	10	10	10	10	10	40	12	127

Укажите все выражения:

- (1) $S = vt$.
- (2) $(x^2 - x + 1)^{14}$.
- (3) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$.
- (4) $a + b + c$.

Укажите все верные равенства:

- (1) $0,35(28) = \frac{3493}{9900}$.
- (2) $0,001^{\lg 2} = \frac{1}{8}$.
- (3) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 2$.
- (4) $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right)^{505} = 2020$.

Ученик токаря получил задание выточить пешки к 10 комплектам шахмат (для каждого комплекта нужно 16 пешек). Функция $P(n) = \left[\frac{n}{16} \right]$, где n – число выточенных пешек, описывает количество готовых комплектов пешек. Укажите ОДЗ функции $P(n)$ в данном контексте.

- А. n -- любое целое число.
- В. n -- любое рациональное число.
- С. n -- любое неотрицательное целое число, кратное 16.
- D. n -- любое неотрицательное целое число не больше 160.

Выберите множество истинности высказывания

$$\llcorner |x + y| = |x| + |y| \llcorner.$$

- (1) $x + y \geq 0$.
- (2) $x \geq 0$.
- (3) $x \geq 0, y \geq 0$.
- (4) $xy \geq 0$.

Выберите истинные утверждения.

- (1) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) (x + y)^2 = x^2 + y^2$.
- (2) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$.
- (3) $(\exists x \in \mathbb{R}) (x + y)^2 = x^2 + y^2$.
- (4) $(\exists x \in \mathbb{R}) (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$.

Выберите все отрицания высказывания

$$\text{«}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\text{»}.$$

- (1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \neq \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}$.
- (2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2}$.
- (3) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.
- (4) неверно, что $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}$.
- (5) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ не равен сумме $\sin\frac{\pi}{3}$ и $\sin\frac{\pi}{6}$.
- (6) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ больше суммы $\sin\frac{\pi}{3}$ и $\sin\frac{\pi}{6}$.

Выберите все отрицания высказывания

« $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \sin(x + y) = \sin x + \sin y$ ».

- 1) $(\exists x, y \in \mathbb{R}) \sin(x + y) = \sin x + \sin y$.
- (2) $(\exists x, y \in \mathbb{R}) \sin(x + y) \neq \sin x + \sin y$.
- (3) неверно, что $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \sin(x + y) = \sin x + \sin y$.
- (4) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \sin(x + y) \neq \sin x + \sin y$.

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Даны предложения с переменными:

$$p(a, b, c): a + b + c = 0$$

и

$$q(a, b, c): a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

- Какие из следующих утверждений верны?
- (1) $p \Rightarrow q$.
- (2) $p \Leftarrow q$.
- (3) $p \Leftrightarrow q$.

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 + \frac{1}{2}(c - a)^2$$

Какие из следующих утверждений верны для всех a, b, c ?

- (1) Если $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, то $a + b + c = 0$ или $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
- (2) Если $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, то $a = b = c$.
- (3) Если $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, то $a + b + c = 0$.

Дано выражение $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{5^{7x+3} - \frac{1}{5}}$.

Выберите все такие утверждения, для которых верны обратные.
(«Прямые» утверждения могут быть как истинными, так и ложными).

- (1) Если выражение φ имеет смысл, то $x \in \left[-\frac{7}{4}, +\infty\right[$.
- (2) Если выражение φ имеет смысл, то $x \in \left]-\infty, -\frac{7}{4}\right[$.
- (3) Если выражение φ имеет смысл, то $x \in \left]-\infty, -\frac{7}{4}\right]$.
- (4) Если выражение φ имеет смысл, то $x \in \left]-\frac{7}{4}, +\infty\right[$.

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

Выберите окончание предложения, чтобы оно было верным для всех a, b, c :

Если $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$, то

- (1) $a = -b$ или $b = -c$ или $c = -a$.
- (2) $a = b = c$.
- (3) $a = 0$ или $b = 0$ или $c = 0$.
- (4) $a = -b, b = -c$ и $c = -a$.

Вычислите $\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$

Решите уравнение $x^4 - 22x^2 + 1 = 0$

Найдите два числа, произведение которых равно 2, а сумма их квадратов равна 6.

Обозначим искомые числа через x и y .

Составим два уравнения: $xy = 2$ и $x^2 + y^2 = 6$,

откуда получаем:

$$(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 = 36 - 16 = 20 = (x^2 - y^2)^2,$$

$$x^2 + y^2 = 6, x^2 - y^2 = 2\sqrt{5},$$

$$x^2 = 3 + \sqrt{5}, y^2 = 3 - \sqrt{5},$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}, y = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

На каком множестве справедливо тождество $\log_3 x^2 = 2 \log_3 x$?

- 1) $(-\infty, 0)$
- 2) $(0, +\infty)$
- 3) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Найдите значение выражения

$$\frac{p^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}+5} - \frac{5p^{\frac{1}{2}}}{25-p'}$$

если $p = 49$.

Упростите выражение $\frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}$

Упростите выражение $\frac{\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}} \cdot \frac{x+y-\sqrt{xy}}{(x+y)\sqrt{xy}}$

Вычислите произведение

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100^2}\right).$$

Ответ запишите в виде десятичной дроби.

В разложении степени двучлена

$$\left(a^2\sqrt{b} + \frac{b}{\sqrt[3]{a}}\right)^{14}$$

найдите член, не содержащий неизвестное a .

Ответ запишите в строку по данному образцу: $12b^5$ следует записать в виде $12*b^5$

Найдите область допустимых значений неизвестного в выражении

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)$$

- (1) $(-\infty, -1)$
- (2) $(1, +\infty)$
- (3) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- (4) $(-1, 1)$

Вычислите $2^{\log_{\sqrt{2}} 5}$

Сравните $\log_4 5$ и $\log_6 5$

- (1) $\log_4 5 = \log_6 5$
- (2) $\log_4 5 > \log_6 5$
- (3) $\log_4 5 < \log_6 5$

Известно, что при любом действительном a , отличном от 0,
$$\log_x(a^2 + 1) < 0.$$

Выберите верные утверждения

- (1) $0 < x < 1$
- (2) $x > 1$
- (3) $x > 0, x \neq 1$
- (4) $x \in \mathbb{R}$

Вычислите

$$\frac{\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt[3]{250}}$$

- (1) $\frac{5}{6}$.
- (2) $\frac{6\sqrt[3]{2}}{5}$.
- (3) 2,4.
- (4) $\sqrt[3]{2}$.

Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

- (1) 8.
- (2) 5.
- (3) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.
- (4) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Вычислите $\lg 75 + \lg 45 + \lg \frac{9}{125}$

- (1) 0.
- (2) $4 \lg 3$.
- (3) $\lg 3$.
- (4) $5 \lg 3$.

Дано: $\lg 2 = a$.

Найти: $\log_4 20$.

Ответ запишите в строку по образцу (без пробелов):

$$\frac{a+1}{2(a-2)} = (a+1) / (2*(a-2))$$

Дано: $\log_3 18 = a$, $\log_5 15 = b$.

Найти: $\log_2 5$.

Ответ запишите в строку по образцу (без пробелов):

$$\frac{a+1}{2(a-2)} = (a+1) / (2*(a-2))$$

Упростите выражение

$$\lg x + \lg x^2 + \lg x^3 + \dots + \lg x^{100}$$

Азбука квадратного трёхчлена

- Выделение полного квадрата

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

- Формула корней квадратного трёхчлена с неотрицательным дискриминантом

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Теорема Виета.

Если x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

- Разложение на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни трёхчлена.

Множества точек на плоскости

Задача 1. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$8x^2 - 6xy + y^2 = 0.$$

Решение уравнений и неравенств

Задача 2. Имеет ли решения неравенство

$$9^{x+1} + 7 \cdot 4^{x+\frac{1}{2}} < 8 \cdot 6^x?$$

Тождественные преобразования

Задача 3. Разложить на множители выражение

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz.$$

Тождественные преобразования

Задача 4. Разложить на множители выражение

$$(x + y)^3 + (y + z)^3 + (z + x)^3 - 2(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz.$$

Тождественные преобразования

Задача 5. Доказать тождество

$$(x - y)(zx + 1)(yz + 1) + (y - z)(xy + 1)(xz + 1) + \\ + (z - x)(zy + 1)(xy + 1) + (x - y)(y - z)(z - x) = 0.$$

Тождественные преобразования

Задача 6. Доказать, что число

$$121^3 + 374^3 + 26^3 - 78 \cdot 121 \cdot 374$$

составное.

Для самостоятельного решения

Ссылка:

<https://docs.google.com/forms/d/15UwsUhUnvVkwEAacYEEHfAGz3BXQJiVy-MjNn8Dra9I/edit?usp=sharing>

Задание 1. Вычислите сумму коэффициентов при чётных степенях многочлена стандартного вида, который получается из многочлена

$$(6x^2 + x - 6)^{2020} + 2020x - 17$$

Для самостоятельного решения

Задание 2. Вычислите сумму коэффициентов при нечётных степенях многочлена стандартного вида, который получается из многочлена

$$(6x^2 + x - 6)^{2020} + 2020x - 17.$$

Для самостоятельного решения

Задание 3. Выберите все равенства, которые могут стать верными, если вместо * вставить пропущенные знаки действий:

$$(1)(x * 1)(x * 2) = x^2 + 3x + 2.$$

$$(2)(x * 1)(x * 2) = x^2 - 3x + 2.$$

$$(3)(x * 1)(x * 2) = x^2 + x - 2.$$

$$(4)(x * 1)(x * 2) = x^2 - x + 2.$$

Для самостоятельного решения

Задание 4. Вычислите коэффициент при x в многочлене стандартного вида, который получается из многочлена

$$(x^2 - 3x + 2)(5x^2 + 6x + 4).$$

Для самостоятельного решения

Задание 5. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - y - 2 = 0.$$

Литература

- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.

КОНЕЦ СЕМИНАРА