Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Многочлены-2

Е.А. Седова, к.п.н.,

проф. кафедры элементарной математики

Многочлены-2

ПЛАН

- Квадратный трёхчлен в задачах (продолжение).
- Равенство многочленов.
- Стандартный вид многочлена.
- Поиск рациональных корней многочлена.

Задачи 1-6 – из предыдущего конспекта (с решениями).

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Квадратный трёхчлен в задачах: множества точек на плоскости

Задача 1. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$8x^2 - 6xy + y^2 = 0.$$

Квадратный трёхчлен в задачах: множества точек на плоскости

Р е ш е н и е. I способ. Рассмотрим левую часть уравнения как квадратный трёхчлен относительно y, считая x параметром:

$$y^2 - 6xy + 8x^2 = 0;$$

тогда оно имеет корни

$$y_1 = 2x \text{ и } y_2 = 4x$$

и его можно представить в виде

$$(y - 2x)(y - 4x) = 0,$$

то есть равенство выполняется при $y - 2x = 0$ и $y - 4x = 0$, так что искомое множество является объединением двух прямых с уравнениями $y = 2x$ и $y = 4x$.

Квадратный трёхчлен в задачах: множества точек на плоскости

Решение. II способ. Левая часть уравнения однородна относительно x и y – суммарная степень слагаемых равна 2. Это обстоятельство позволяет при условии $x \neq 0$ разделить обе части уравнения на x^2 и получить квадратный трёхчлен относительно $t = \frac{y}{x}$ с числовыми коэффициентами:

$$t^2 - 6t + 8 = 0;$$

тогда оно имеет корни

$$t_1 = 2 \text{ и } t_2 = 4,$$

то есть равенство выполняется при $y - 2x = 0$ и $y - 2x = 0$ ($x \neq 0$).

Рассмотрение случая $x = 0$ добавляет точку с координатами (0, 0) – начало координат, так что искомое множество является объединением двух прямых с уравнениями $y = 2x$ и $y = 2x$.

Квадратный трёхчлен в задачах: множества точек на плоскости

Для справок:

Множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

где $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, называется *кривой 2-го порядка*.

Квадратный трёхчлен в задачах: множества точек на плоскости

Кривые имеют центр симметрии

I. Эллиптические кривые:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + g = 0$$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0,\ g < 0$ – эллипс

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0,\ g > 0$ – в $\mathbb{R}$ уравнение решения не имеет (мнимая кривая 2-го порядка)

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0,\ g = 0$ – точка (0, 0) (пара мнимых прямых, имеющих общую действительную точку)

II. Гиперболические кривые

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + g = 0$$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0,\ g \neq 0$ – гипербола

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0,\ g = 0$ – пара пересекающихся прямых

Кривые не имеют центра симметрии

III. Параболические кривые:

$$\lambda_1 x^2 + 2hy + k = 0$$

$\lambda_1 > 0, h \neq 0,\ k \in \mathbb{R}$ – парабола

$\lambda_1 > 0, h = 0,\ k < 0$ – две прямые, параллельные оси y

$\lambda_1 > 0, h = 0,\ k = 0$ – двойная прямая (ось y)

$\lambda_1 > 0, h = 0,\ k > 0$ – в $\mathbb{R}$ уравнение решения не имеет (две параллельные мнимые прямые)

Квадратный трёхчлен в задачах: множества точек на плоскости

Уравнения высших степеней, представляющих прямые.

Уравнение второй степени представляет две прямые, когда его левая часть разлагается на два множителя первой степени.

Уравнение

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

можно написать как

$$ax^2 + 2(by + d)x + cy^2 + 2ey + f = 0;$$

решая его относительно x, найдём

$$ax = -(by + d) \pm \sqrt{(by + d)^2 - a(cy^2 + 2ey + f)} =$$
$$= -(by + d) \pm \sqrt{(b^2 - ac)y^2 + 2(bd - ae)y + (d^2 - af)}\,.$$

Это выражение можно привести к виду $x = ky + m$ только в том случае, если под корнем полный квадрат, то есть

$$(b^2 - ac)(d^2 - af) = (bd - ae)^2.$$

Если это условие выполнено, то уравнение представляет две прямые.

Квадратный трёхчлен в задачах: множества точек на плоскости

- Пример. Найти множество точек, которое описывает уравнение

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - y - 2 = 0.$$

Рассмотрим левую часть уравнения как квадратный трёхчлен относительно x :

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - y - 2 = 4x^2 - 2(2y - 1)x + (y^2 - y - 2).$$

Решим это уравнение:

$$4x = (2y - 1) \pm \sqrt{(2y - 1)^2 - 4(y^2 - y - 2)} = 2y - 1 \pm 3,$$

откуда

$$4x = 2y + 2, \quad 4x = 2y - 4,$$

или

$$y = 2x - 1, \quad y = 2x + 2.$$

Ответ: две параллельные прямые $y = 2x - 1$ и $y = 2x + 2$.

Квадратный трёхчлен в задачах: решение уравнений и неравенств

Задача 2. Имеет ли решения неравенство

$$9^{x+1} + 7 \cdot 4^{x+\frac{1}{2}} < 8 \cdot 6^{x}?$$

Квадратный трёхчлен в задачах: решение уравнений и неравенств

Р е ш е н и е. После преобразований

$$9^{x+1} = 9 \cdot 3^{2x},\ 4^{x+\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{2x}, 6^x = 2^x \cdot 3^x$$

приходим к неравенству:

$$9 \cdot 3^{2x} + 14 \cdot 2^{2x} - 8 \cdot 2^x \cdot 3^x < 0.$$

Если обозначить 3^x через y, а 2^x через z, то придём выражению, однородному относительно y и z.

Поскольку $z^2 = 4^x > 0$, то после деления обеих частей неравенства на 4^x и обозначения $\frac{y}{z}$ через t, получим неравенство

$$9t^2 - 8t + 14 < 0$$

с отрицательным дискриминантом и положительным старшим коэффициентом. Следовательно, трёхчлен положителен при любом значении t, то есть последнее неравенство, а вместе с ним и исходное неравенство решений не имеют.

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

Задача 3. Разложить на множители выражение

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz.$$

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

Р е ш е н и е. I способ (искусство группировки).

Обозначим $x + y$ через t и раскроем скобки:

$$(t + z)(xy + zt) - xyz = txy + zt^2 + xyz + tz^2 - xyz =$$

упростим выражение и вынесем общий множитель за скобку:

$$= txy + zt^2 + tz^2 = t(xy + zt + z^2) =$$

вернёмся к x и y:

$$= (x + y)(xy + zx + zy + z^2) = (x + y)\big(x(y + z) + z(y + z)\big) =$$

$$= (x + y)(y + z)(z + x).$$

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

II способ (задача с параметрами).

Если выражение является квадратным трёхчленом относительно x, то найдя его корни x_1 и x_2, мы сможем разложить его на множители.

Рассмотрим данное выражение как многочлен $p(x)$ с параметрами y и z. При $y+z \neq 0$ это – квадратный трёхчлен со старшим коэффициентом $y+z$.

Можно непосредственно проверить, что $-y$ и $-z$ являются его корнями:

$$p(-y) = \big((-y)+y+z\big)\big((-y)y+yz+z(-y)\big)-(-y)yz = -zy^2+zy^2 = 0,$$

$$p(-z) = \big((-z)+y+z\big)\big((-z)y+yz+z(-z)\big)-(-z)yz = -yz^2+yz^2 = 0.$$

Если $y \neq z$, то по формуле разложения квадратного трёхчлена на множители получаем:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz = (x+y)(y+z)(z+x).$$

Полученное тождество можно доказать, раскрыв скобки в обеих частях.

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

Можно закончить обоснование полученного решения, в котором есть два пробела.

1) Если $y = z$, то фактически найден всего один корень, и $p(x)$, вообще говоря, может иметь ещё один корень.

Непосредственной подстановкой получаем, что при $y = z$ левая часть равенства:

$$(x + 2y)(2xy + y^2) - xy^2 = 2x^2y + 4xy^2 + 2y^3,$$

тождественно равна правой части:

$$2y(x + y)^2 = 2x^2y + 4xy^2 + 2y^3.$$

2) Если $y + z = 0$, то $p(x)$ не является квадратным трёхчленом; в этом случае правая часть равенства равна 0, и левая часть

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz = (x + 0)(x \cdot 0 + yz) - xyz = 0$$

тоже равна 0, следовательно, полученное разложение справедливо и при $y + z = 0$, то есть при всех значениях x, y, z.

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

Задача 4. Разложить на множители выражение
$$(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3-2(x^3+y^3+z^3)+6xyz.$$

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

Р е ш е н и е. I способ (искусство группировки).

Применим формулу куба суммы $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$:

$$(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3 - 2(x^3+y^3+z^3) + 6xyz =$$

$$= 3xy(x+y) + 3yz(y+z) + 3zx(z+x) + 6xyz =$$

$$= 3[x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 2xyz] =$$

$$= 3[y(x^2 + xy + yz + xz) + z(yz + zx + x^2 + xy)] =$$

$$= 3(y+z)(x^2 + xy + yz + xz) = 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

II способ (задача с параметрами).

При выполнении тождественных преобразований слагаемые, содержащие x^3, взаимно уничтожаются, и получается квадратный трёхчлен $p(x)$ со старшим коэффициентом $3y+3z$ (при условии $y+z\neq 0$).

Непосредственно можно проверить, что $p(-y)=p(-z)=0$, и следовательно (при условии $y\neq z$),

$$p(x)=3(x+y)(y+z)(z+x).$$

Тождество доказывается раскрытием скобок, или восполняются логические пробелы:

если $y=z$, то левая часть равенства

$$2(x+y)^3+8y^3-2x^3-4y^3+6xy^2=6y^3+6x^2y+12xy^2=6y(x+y)^2$$

равна правой его части;

если $y+z=0$, то правая часть равенства равна 0, левая часть равна

$$(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3-2(x^3+y^3+z^3)+6xyz=$$
$$(x+y)^3+(x-y)^3-2x^3-6xy^2=0,$$

следовательно, полученное разложение справедливо и при $y+z=0$, то есть при всех значениях x, y, z.

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

Задача 5. Доказать тождество

$$(x-y)(zx+1)(yz+1)+(y-z)(xy+1)(xz+1)+$$
$$+(z-x)(zy+1)(xy+1)-(x-y)(y-z)(z-x)=0.$$

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

Р е ш е н и е. I способ (искусство группировки).

Раскрыв скобки в первых трёх слагаемых, получим 24 одночлена:

$$(x-y)(zx+1)(yz+1)=(x-y)(z^2xy+zx+yz+1)=$$
$$=x^2yz^2+x^2z+xyz+x-xy^2z^2-xyz-y^2z-y$$

$$(y-z)(xy+1)(zx+1)=(y-z)(x^2yz+xy+zx+1)=$$
$$=x^2y^2z+xy^2+xyz+y-x^2yz^2-xyz-xz^2-z$$

$$(z-x)(yz+1)(xy+1)=(z-x)(y^2zx+yz+xy+1)=$$
$$=xy^2z^2+yz^2+xyz+z-x^2y^2z-xyz-x^2y-z$$

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

Их сумма равна:

$$x^2yz^2 + x^2z + xyz + x - xy^2z^2 - xyz - y^2z - y +$$
$$+x^2y^2z + xy^2 + xyz + y - x^2yz^2 - xyz - xz^2 - z +$$
$$+xy^2z^2 + yz^2 + xyz + z - x^2y^2z - xyz - x^2y - z = (*)$$

После приведения подобных слагаемых и преобразований мы придём к нужному результату:

$$(*) = x^2z - x^2y + xy^2 - xz^2 + yz^2 - y^2z =$$
$$= x^2(y-z) + x(y+z)(y-z) + yz(z-y) =$$
$$= (y-z)[x^2 - xy - xz + yz] =$$
$$= (y-z)[x(x-y) - z(x-z)] =$$
$$= (x-y)(y-z)(z-x).$$

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

II способ (теоремы о равенстве многочленов).

Перепишем тождество в виде

$$(x-y)(zx+1)(yz+1)+(y-z)(xy+1)(xz+1)+(z-x)(zy+1)(xy+1)$$
$$=(x-y)(y-z)(z-x).$$

В обеих частях равенства можно увидеть многочлены не выше второй степени; их значения при $x=y$, $x=z$ и $x=0$ равны:

$$p(y)=0+(y-z)(y^2+1)(yz+1)+(z-y)(zy+1)(y^2+1)=0=q(y);$$

$$p(z)=(z-y)(z^2+1)(yz+1)+0+(y-z)(zy+1)(z^2+1)=0=q(z);$$

$$p(0)=-y(yz+1)+(y-z)+z(zy+1)=$$
$$=-y^2z-y+y-z+z^2y+z+y^2z-z^2y=yz(y-z)=q(0).$$

Следовательно, многочлены $p(x)$ и $q(x)$ равны.

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

(1) Равенство двух линейных двучленов равносильно совпадению их значений хотя бы в двух различных точках.

(2) Равенство двух квадратных трёхчленов равносильно совпадению их значений хотя бы в трёх различных точках.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ -- квадратные трёхчлены, и при $x = a$, $x = b$ и $x = c$ их значения совпадают. Тогда

$$h(x) = f(x) - g(x) = px^2 + qx + r$$

имеет три различных корня a, b и c.

Если $p \neq 0$, то квадратное уравнение $px^2 + qx + r$ имеет три корня; поэтому $p = 0$.

Если $p = 0$, $q \neq 0$, то линейное уравнение $qx + r$ имеет три корня; поэтому $p = q = 0$.

Следовательно, при любом x выполняется равенство $h(x) = f(x) - g(x) = r$, в частности,

$$r = h(a) = f(a) - g(a) = 0,$$

так что $f(x) = g(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

III способ – с помощью обобщённой теоремы Безу. В алгебре многочленов не требуется специального рассмотрения случаев, когда $x + y = 0$ и $x - y = 0$.

Обобщённая теорема Безу. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ многочлен от $k (k > 1)$ переменных степени $n \geq 1$; $g(x_2, \dots, x_k)$ многочлен от $k - 1$ переменной.

Если $f(g(x_2, \dots, x_k), x_2, \dots, x_k)$ есть нулевой многочлен, то f делится на $x - g$.

- Пример.

$$f(x, y, z) = (x - y)(zx + 1)(yz + 1) + (y - z)(xy + 1)(xz + 1) +$$
$$+(z - x)(zy + 1)(xy + 1) - (x - y)(y - z)(z - x),$$
$$g(y, z) = y,$$
$$f(g(y, z), y, z) = f(y, y, z) = 0,$$

поэтому f делится на

$$x - g(y, z) = x - y.$$

Эти же соображения можно применить в решении задач 3 и 4.

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

Задача 6. Доказать, что число

$$121^3 + 374^3 + 26^3 - 78 \cdot 121 \cdot 374$$

составное.

Квадратный трёхчлен в задачах: тождественные преобразования

Р е ш е н и е. Попытаемся разложить данное выражение на множители.

$$121^3 + 374^3 + 26^3 - 78 \cdot 121 \cdot 374 =$$
$$= 121^3 + 374^3 + 26^3 - 3 \cdot (26 \cdot 121 \cdot 374) = (*)$$

Применяя тождество

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca),$$

получаем разложение

$$= (121 + 374 + 26)(121^2 + 374^2 + 26^2 - 121 \cdot 374 - 374 \cdot 26 - 26 \cdot 121),$$

где оба множителя отличны от 1, что и следовало доказать.

Равенство многочленов

- Пример 1. Доказать тождество

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2,$$

где a, b и c – попарно различные числа.

Равенство многочленов

Решение. Заметим, что в левой и правой частях доказываемого тождества стоят квадратные трёхчлены от x.

При $x = a$ имеем:

$$a^2 \frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + 0 + 0 = a^2.$$

Точно так же проверяется справедливость тождества при $x = b$ и $x = c$.

Так как значения квадратных трёхчленов совпали при трёх различных значениях, то эти многочлены тождественно равны.

Равенство многочленов

- Пример 2. Доказать тождество

$$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x,$$

где a, b и c – попарно различные числа.

Равенство многочленов

- П р и м е р 3. Доказать тождество

$$\frac{a+x}{a(a-b)(a-c)}+\frac{b+x}{b(b-c)(b-a)}+\frac{c+x}{c(c-a)(c-b)}=\frac{x}{abc},$$

где a, b и c – попарно различные числа.

Равенство многочленов

- Пример 4. Докажите, что равенство

$$(x+y)^4 + x^4 + y^4 = 2(x^2 + 3xy + y^2)^2$$

не является тождеством.

Стандартный вид многочлена

Задача 7. Доказать, что не существует многочлена с целыми коэффициентами, квадрат которого был бы равен многочлену

$$x^{2020} + x^{2019} + \cdots + x + 1.$$

Стандартный вид многочлена

Задача 8.

Решите уравнение

$$(2a-4)x = 3a+1.$$

Стандартный вид многочлена

Р е ш е н и е.

Решите уравнение

$$(2a-4)x = 3a+1.$$

Если $2a-4 \neq 0$, уравнение имеет единственный корень

$$x = \frac{3a+1}{2a-4};$$

Если $2a-4=0$, то $a=2$ и уравнение принимает вид

$$0 \cdot x = 7;$$

это уравнение не имеет решений.

Ответ: при $a=2$ решений нет, при $a \neq 2$ – одно решение $x = \frac{3a+1}{2a-4}$.

Стандартный вид многочлена

Задача 9.

Решите уравнение

$$a^2x - 5a = 9x - 15.$$

Стандартный вид многочлена

Р е ш е н и е .

Перенесём все слагаемые в левую часть и приведём многочлен к стандартному виду:

$$(a^2-9)x-5(a-3)=0.$$

Если $a^2-9\neq 0$, то есть $a\neq \pm 3$, то уравнение имеет единственный корень

$$x=\frac{5}{a+3};$$

Если $a=3$, то уравнение принимает вид

$$0\cdot x-0=0;$$

решением этого уравнения является любое действительное число.

Если $a=-3$, то уравнение принимает вид

$$0\cdot x+30=0;$$

это уравнение решений не имеет.

Ответ: при $a=-3$ решений нет, при $a=3$ – решением является любое число $x\in\mathbb{R}$, при $a\neq\pm 3$ – одно решение $x=\frac{5}{a+3}$.

Стандартный вид многочлена
(ЕГЭ: задача 18)

Задача 10.

Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения

$$9(5x-1)a^2-(59x-55)a+6(x-1)=0.$$

Стандартный вид многочлена (ЕГЭ: задача 18)

Решение. Приведём многочлен в левой части уравнения к стандартному виду:

$$(45a^2 - 59a + 6)x - (9a^2 - 55a + 6) = 0.$$

Уравнение $45a^2 - 59a + 6$ имеет корни $a = \frac{1}{9}$, $a = \frac{6}{5}$.

Уравнение $9a^2 - 55a + 6$ имеет корни $a = \frac{1}{9}$, $a = 6$.

Ответ: при $a = \frac{6}{5}$ решений нет, при $a = \frac{1}{9}$ – бесконечно много решений, при $a \neq \frac{1}{9}$, $a \neq \frac{6}{5}$ – одно решение.

Стандартный вид многочлена (ЕГЭ: задача 18)

Задача 11.

Найдите все пары чисел (a, b), для каждой из которых уравнение

$$(a-2)x+b(x-2)=(2b-1)x+(2x-1)a$$

имеет не менее трёх корней.

Стандартный вид многочлена

Р е ш е н и е.

Данное уравнение является линейным относительно x, и его можно привести к стандартному виду:

$$(a+b+1)x-(a-2b)=0.$$

Если $a+b+1\neq 0$, уравнение имеет единственный корень

$$x=\frac{a-2b}{a+b+1};$$

если $a+b+1=0$, $a-2b\neq 0$, уравнение не имеет корней;

если $a+b+1=0$, $a-2b=0$, корнем уравнения является любое число.

Следовательно, не менее трёх корней уравнение имеет только при условии

$$a+b+1=0 \text{ и } a-2b=0.$$

Решив эту систему уравнений, получаем ответ: $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

Стандартный вид многочлена (ЕГЭ: задача 18)

Задача 12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 - (a+4)x^2 + 4ax = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Стандартный вид многочлена (ЕГЭ: задача 18)

Р е ш е н и е. Приведём многочлен к стандартному виду и вынесем общий множитель за скобку:

$$x(x^2 - (a + 4)x + 4a) = 0.$$

Это уравнение имеет корни $x = 0$, $x = 4$, $x = a$.

Уравнение имеет ровно два различных корня, только если $a = 0$ или $a = 4$.

Ответ: $a = 0$, $a = 4$.

Стандартный вид многочлена (ЕГЭ: задача 18)

Задача 13.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения

$$x^2 + 2x + a = 17 \text{ и } x^2 + 5x = 3a + 18$$

имеют хотя бы один общий корень.

Стандартный вид многочлена (ЕГЭ: задача 18)

Р е ш е н и е . I способ.

Выпишем корни уравнения $x^2 + 2x + a - 17 = 0$:

$$\frac{-2 \pm \sqrt{72 - 4a}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{18 - a}}{2}$$

и корни уравнения $x^2 + 5x - 3a - 18 = 0$:

$$\frac{-5 \pm \sqrt{12a + 97}}{2}.$$

Должно выполняться хотя бы одно из равенств:

(1) $-2 + 2\sqrt{18 - a} = -5 + \sqrt{12a + 97}$, $2\sqrt{18 - a} = \sqrt{12a + 97} - 3$;

(2) $-2 + 2\sqrt{18 - a} = -5 - \sqrt{12a + 97}$, $2\sqrt{18 - a} = -\sqrt{12a + 97} - 3$;

(3) $-2 - 2\sqrt{18 - a} = -5 + \sqrt{12a + 97}$, $2\sqrt{18 - a} = -\sqrt{12a + 97} + 3$;

(4) $-2 - 2\sqrt{18 - a} = -5 - \sqrt{12a + 97}$, $2\sqrt{18 - a} = \sqrt{12a + 97} + 3$.

Стандартный вид многочлена (ЕГЭ: задача 18)

Решение.

При возведении в квадрат случаи (1) и (3), (2) и (4) будут неразличимы. Поэтому достаточно решить два уравнения:

(1) $2\sqrt{18-a} = \sqrt{12a+97} - 3$;

(4) $2\sqrt{18-a} = \sqrt{12a+97} + 3$.

Обозначим $\sqrt{18-a}$ через u, $\sqrt{12a+97}$ через v и составим две системы уравнений:

$2u = v - 3, 12u^2 + v^2 = 313$, откуда $16u^2 + 12u - 304 = 0, u_1 = 4,\ \ u_2 = -\frac{19}{4}, v_1 = 11,\ \ v_2 = -\frac{13}{2}$,

$2u = v + 3, 12u^2 + v^2 = 313$, откуда $u_1 = -4,\ \ u_2 = \frac{19}{4}, v_1 = -5,\ \ v_2 = \frac{25}{2}$.

Возвращаясь к переменной a, получаем ответ: $a = 2$, $a = -\frac{73}{16}$.

Стандартный вид многочлена (ЕГЭ: задача 18)

Р е ш е н и е. II способ.

Пусть α – корень каждого из данных уравнений. Тогда справедливы тождества:

$$\alpha^2 + 2\alpha + a - 17 = 0 \text{ и } \alpha^2 + 5\alpha - 3a - 18 = 0.$$

Вычитая почленно из одного равенства другое, получим уравнение:

$$3\alpha - 4a - 1 = 0,$$

откуда $\alpha = \frac{4a+1}{3}$.

Подставим найденное значение в одно из уравнений (первое):

$$\left(\frac{4a+1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{4a+1}{3}\right) + a - 17 = 0$$

и приведём его к стандартному виду:

$$16a^2 + 41a - 146 = 0,$$

найдём его корни и получим ответ: $a = 2$, $a = -\frac{73}{16}$.

Поиск рациональных корней многочлена

Задача 14. Доказать, что число $\sqrt{3}$ является иррациональным.

Поиск рациональных корней многочлена

Р е ш е н и е . I способ.

Пусть число $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь.

Тогда

$$p^2 = 3q^2.$$

Так как число 3 является простым, то p делится на 3. В таком случае можно положить $p = 3r$, и равенство примет вид:

$$9r^2 = 3q^2, \text{ или } 3r^2 = q^2,$$

то есть q делится на 3, а это противоречит предположению, что дробь $\frac{p}{q}$ – несократима.

Следовательно, равенство $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ невозможно, и $\sqrt{3}$ не может быть рациональным числом.

Поиск рациональных корней многочлена

Р е ш е н и е. II способ.

Число $\sqrt{3}$ является корнем уравнения

$$x^2 = 3.$$

Из теоремы о рациональных корнях следует:

Корни многочлена с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом 1 *либо целые, либо иррациональные.*

Проверка делителей числа 3 показывает, что данное уравнение не имеет целых корней. Следовательно, $\sqrt{3}$ не может быть рациональным числом.

Поиск рациональных корней многочлена

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена* f *на двучлен* $x - c$ *равен* $f(c)$ *– значению* f *при* $x = c$.

Следствие 1. *Многочлен* f *делится на* $x - c$ *тогда и только тогда, когда число c является корнем* f.

Мы доказали *утверждение о выделении линейного множителя из многочлена*.

Следствие 2. *Многочлен степени* n *имеет не более* n *корней.*

Следствие 3. *Если значения двух многочленов, степень которых не больше* n, *совпадают при* $n + 1$ *значении переменной, то эти многочлены равны.*

Поиск рациональных корней многочлена

- Пример 1. Найти частное и остаток от деления многочлена $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 5x + 6$ на многочлен $g(x) = x - 1$.

Поиск рациональных корней многочлена

- Пример 1. Найти частное и остаток от деления многочлена $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 5x + 6$ на многочлен $g(x) = x - 1$.

По теореме Безу остаток от деления $f(x)$ на $x - 1$ равен $f(1)$. Вычисление с помощью схемы Горнера позволит получить коэффициенты частного.

	3	-5	-5	6
1	3	-2	-7	-1

$$3x^3 - 5x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(3x^2 - 2x - 7) - 1.$$

Поиск рациональных корней многочлена

- Пример 2. Решить уравнение $5x^3 + 4x^2 - 11x + 2 = 0$.

Поиск рациональных корней многочлена

- П р и м е р 2. Решить уравнение $5x^3 + 4x^2 - 11x + 2 = 0$.

Начнём с проверки делителей числа 2.

	5	4	-11	2
1	5	9	-2	0

$$5x^3 + 4x^2 - 11x + 2 = (x - 1)(5x^2 + 9x - 2).$$

Корнями уравнения $5x^2 + 9x - 2 = 0$ являются числа $\frac{1}{5}$ и -2.

Таким образом, исходное уравнение имеет три корня: 1, $\frac{1}{5}$ и -2.

Поиск рациональных корней многочлена

- П р и м е р 3. Разложить на множители многочлен

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4.$$

Поиск рациональных корней многочлена

- Пример 3. Разложить на множители многочлен $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$.

Начнём с поиска целых корней.

	3	-2	-9	0	4
1	3	1	-8	-8	-4
-1	3	-5	-4	4	0
-1	3	-8	4	0	
-1	3	-11	15		
2	3	-2	0		

$$3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4 = (x+1)^2(x-2)(3x-2).$$

Поиск рациональных корней многочлена

Задача 15. Решить уравнение $3x^3 + 8x^2 - 6x + 1 = 0$.

Поиск рациональных корней многочлена

Решение. Рациональными корнями данного уравнения могут быть числа ± 1 и $\pm\frac{1}{3}$. Используя схему Горнера, получим:

	3	8	–6	1
1	3	11	5	6
–1	3	5	–11	12
$\frac{1}{3}$	3	9	–3	0

Значит, один из корней данного уравнения равен $\frac{1}{3}$.

Остальные корни найдем, решив уравнение $3x^2 + 9x - 3 = 0$: $x = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет три корня: $\frac{1}{3}$, $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ и $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$.

Поиск рациональных корней многочлена

Задача 16. Вычислить значение выражения

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

Поиск рациональных корней многочлена

Решение. Пусть $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$, тогда

$$x^3=\left(20+14\sqrt{2}\right)+\left(20-14\sqrt{2}\right)+$$

$$+3\sqrt[3]{20^2-\left(14\sqrt{2}\right)^2}\cdot\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right),$$

$$x^3=40+6x,$$

то есть *x* является корнем уравнения $x^3-6x-40=0$.

Проверка делителей числа 40 показывает, что число 4 является корнем этого уравнения, а других корней оно не имеет, так как

$$x^3-6x-40=(x-4)(x^2+4x+10)$$

и дискриминант квадратного уравнения $x^2+4x+10=0$ отрицателен.

Значит, $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

Поиск рациональных корней многочлена

Замечание. Если «увидеть», что

$$20 + 14\sqrt{2} = 8 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 2\sqrt{2} = \left(2 + \sqrt{2}\right)^3,$$

$$20 - 14\sqrt{2} = 8 - 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2\sqrt{2} = \left(2 - \sqrt{2}\right)^3,$$

то ответ получается «мгновенно»:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \left(2 + \sqrt{2}\right) + \left(2 - \sqrt{2}\right) = 4.$$

Для самостоятельного решения

Ссылка:
https://docs.google.com/forms/d/1DcsqWFaxyYkAIX-gtNEtmW4_qwFA57M-4FeFk6fLS7Q/edit?usp=sharing

Задание 1. Выберите все рациональные корни уравнения

$$2x^3 - 5x^2 - 7x - 2 = 0.$$

(1) 1.

(2) –1.

(3) 2.

(4) –2.

(5) 1/2.

(6) –1/2.

Для самостоятельного решения

З а д а н и е 2. Вычислите значение выражения $\sqrt[3]{40+11\sqrt{13}}+\sqrt[3]{40-11\sqrt{13}}$.

Для самостоятельного решения

З а д а н и е 3. Выберите все верные утверждения:

(1) Многочлен $x^n - 1$ делится на $x - 1$ при всех натуральных n.

(2) Многочлен $x^n + 1$ делится на $x + 1$ при всех натуральных n.

(3) При всех чётных n многочлен $x^n - 1$ делится на $x - 1$.

(4) При всех нечётных n многочлен $x^n - 1$ делится на $x - 1$.

(5) При всех чётных n многочлен $x^n + 1$ делится на $x + 1$.

(6) При всех нечётных n многочлен $x^n + 1$ делится на $x + 1$.

Для самостоятельного решения

Задание 4. Известно, что $p(x)$ -- многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, такой, что

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = p(7) = p(8) = p(9) = p(10) = 0.$$

Найдите $p(11)$.

Для самостоятельного решения

Задание 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнения

$$x^2 + 3x - 9a + 18 = 0 \text{ и } x^2 + 6x - 13a + 25 = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

Литература

- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.
- Популярные лекции по математике. https://math.ru/lib/ser/plm
- Дорофеев Г.В. Квадратный трёхчлен в задачах. Львов: Квантор, 1991. 104 с.

КОНЕЦ СЕМИНАРА