Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Многочлены

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Многочлены

ПЛАН

- Интерполяционная формула Лагранжа.
- Делимость многочленов. Тривиальные делители.
- Основная теорема алгебры. Следствия из основной теоремы алгебры. Сопряжённость мнимых корней многочлена.
- Разложение многочленов на множители.
- Алгебраические уравнения.
- Алгебраические забавы.

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Интерполяционная формула Лагранжа

- Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},$$

где a, b и c – попарно различные числа.

Интерполяционная формула Лагранжа

- Р е ш е н и е. Подставим вместо x числа a, b и c:

первое слагаемое равно 1 в точке a и равно нулю в точках b и c:

$$\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} = 1, \qquad \frac{(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)} = \frac{(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)} = 0;$$

второе слагаемое равно 1 в точке b и равно нулю в точках a и c;

третье слагаемое равно 1 в точке c и равно нулю в точках a и b;

то есть многочлен степени не выше второй принимает значение 1 в трёх различных точках. Следовательно, он является постоянной, равной 1.

Интерполяционная формула Лагранжа

Так как этот многочлен равен 1, то коэффициент при x^2 равен 0:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0,$$

а свободный член равен 1:

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

Интерполяционная формула Лагранжа

- Пример 2. Рассмотрим многочлен
$$f(x) = 3x^2 + x - 1.$$

Составим таблицу его значений в трёх различных точках:

x	1	2	3
$f(x)$	3	13	29

и запишем выражение:

$$3 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 13 \cdot \frac{(x-3)(x-1)}{(2-3)(2-1)} + 29 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}.$$

Интерполяционная формула Лагранжа

Это выражение

$$3 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 13 \cdot \frac{(x-3)(x-1)}{(2-3)(2-1)} + 29 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}.$$

при $x = 1$ равно 3,

при $x = 2$ равно 13,

при $x = 3$ равно 29,

то есть многочлен степени не выше второй принимает в трёх различных точках те же значения, что и многочлен

$$f(x) = 3x^2 + x - 1.$$

Следовательно, он равен многочлену f.

Теорема Безу

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена* f *на двучлен* $x - c$ *равен* $f(c)$ *– значению* f *при* $x = c$*.*

Следствие 1. *Многочлен* f *делится на* $x - c$ *тогда и только тогда, когда число* c *является корнем* f*.*

Следствие 2. *Многочлен степени* n *имеет не более* n *корней.*

Следствие 3. *Если значения двух многочленов, степень которых не больше* n*, совпадают при* $n + 1$ *значении переменной, то эти многочлены равны.*

Интерполяционная формула Лагранжа

Многочлен степени не выше n однозначно определяется своими значениями в $n + 1$ точке.

Пусть известны значения многочлена степени не выше n в $n + 1$ точке. Как найти этот многочлен?

Интерполяционная формула Лагранжа

Способ 1. Обозначить коэффициенты многочлена буквами, составить и решить систему $n + 1$ линейного уравнения с $n + 1$ неизвестным.

Способ 2. Составить формулу такого многочлена с помощью значений неизвестных и значений многочлена.

Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть $f(x)$ – многочлен степени не выше *n*, $f(x_i) = y_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, x_i – попарно различные числа. Тогда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_{n+1})}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_{n+1})}.$$

1) Каждая дробь равна 1 в точке x_i и равна 0 в остальных точках.

2) Числитель каждой дроби является многочленом степени не выше *n*.

3) После умножения дроби на число y_i и сложения всех членов получается многочлен степени не выше *n*.

4) Этот многочлен принимает в *n* + 1 точке те же значения, что и многочлен f.

Следовательно, этот многочлен равен многочлену f.

Интерполяционная формула Лагранжа

- П р и м е р 3. Упростить выражение

$$a^3\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+b^3\frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)}+c^3\frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}+d^3\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

где a, b, c и d – попарно различные числа.

- П р и м е р 4. Упростить выражение

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

где a, b, c и d – попарно различные числа.

Делимость многочленов. Тривиальные делители

Многочлен f **делится на** многочлен g, если существует такой многочлен h, что $f = gh$.

- Задача. При каких значениях a и b многочлен
$$x^3 + 8x^2 + 5x + a$$
делится на многочлен $x^2 + 3x + b$?

Делимость многочленов. Тривиальные делители

- Р е ш е н и е. Пусть $cx + d$ – частное:

$$x^3 + 8x^2 + 5x + a = (x^2 + 3x + b)(cx + d);$$

приравняем коэффициенты при равных степенях x:

$$1 = c, 8 = d + 3c, 5 = 3d + bc, a = bd,$$

откуда $a = -50, b = -10$.

Делимость многочленов. Тривиальные делители

- Задача. Могут ли два различных ненулевых многочлена делиться друг на друга?

Делимость многочленов. Тривиальные делители

- Р е ш е н и е. Пусть f делится на g, а g делится на f, то есть

$$f = gh,\ g = fk.$$

Тогда

$$f = (fk) \cdot h = f \cdot (kh), \qquad f \cdot (1 - kh) = 0.$$

Так как $f \neq 0$, то $1 - kh = 0$; поэтому $kh = 1$.

Тогда степень произведения многочленов k и h равна 0, и следовательно, степень каждого из них тоже равна 0.

Другими словами, k и h являются постоянными, отличными от нуля, то есть f и g отличаются постоянным множителем.

Обратное утверждение очевидно: если f и g отличаются постоянным множителем c, то $f = cg,\ g = \frac{1}{c} f$, так что f и g делятся один на другой.

Делимость многочленов. Тривиальные делители

Всякое отличное от нуля число и всякий многочлен, отличающийся от данного числовым множителем, отличным от нуля, являются делителями данного многочлена. Эти делители называются *тривиальными*.

В дальнейшем под делителями многочлена будут подразумеваться его *нетривиальные* делители.

Многочлен называется *неприводимым* над данным числовым множеством, если он не имеет нетривиальных делителей с коэффициентами из данного числового множества.

Делимость многочленов. Тривиальные делители

- П р и м е р . Доказать тождество:

$$yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x).$$

Делимость многочленов. Тривиальные делители

Решение.

1) Так как при $x = y$ значение этого многочлена

$$f(x, y, z) = yz(y - z) + zx(z - x) + xy(x - y)$$

равно нулю, то по (обобщённой) теореме Безу он делится на $x - y$.

Аналогично получаем: f делится на $y - z$ и на $z - x$.

2) Так как многочлены $x - y$, $y - z$ и $z - x$ попарно взаимно простые (не имеют общих нечисловых множителей), то f делится на их произведение $g = (x - y)(y - z)(z - x)$.

3) Так как многочлены f и g – многочлены третьей степени, то

$$yz(y - z) + zx(z - x) + xy(x - y) = k(x - y)(y - z)(z - x),$$

где k – некоторое действительное число.

4) Значение k можно найти либо по определению равенства двух многочленов:

$$y^2 z = -ky^2 z, k = -1,$$

либо по теореме о равенстве многочленов: при $x = 0$, $y = 1$, $z = -1$ получим $k = -1$.

Основная теорема алгебры

Основная теорема алгебры. *Любой многочлен f, степень которого отлична от нуля, имеет по крайней мере один корень.*

В этой теореме коэффициенты многочлена и его корни могут быть как действительными, так и комплексными.

Теорема о разложении многочлена на линейные множители. *Любой многочлен n-ой степени*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

может быть представлен в виде произведения

$$f = a_0(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n).$$

Это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Основная теорема алгебры

Следствие 1. *Пусть многочлен n-ой степени представлен в виде произведения линейных множителей*

$$f = a_0(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n).$$

Тогда числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ являются корнями многочлена f и других корней этот многочлен не имеет.

Если среди чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ есть совпадающие, говорят, что у многочлена есть **кратные корни**.

Следствие 2. *Каждый многочлен n-ой степени имеет ровно n корней.*

Сопряжённость мнимых корней многочлена

Теорема. Если многочлен p с действительными коэффициентами, степень которого отлична от нуля, имеет мнимый корень $\alpha = a + bi$ $(b \neq 0)$, то сопряжённое число $a - bi$ также является корнем этого многочлена.

Доказательство. Пусть $p(a + bi) = u + iv$. Сопряжённому значению переменной соответствует сопряжённое значение многочлена:

$$p(a - bi) = u - iv.$$

Если $p(a + bi) = 0$, то $u = v = 0$ и следовательно,

$$p(a - bi) = 0 - 0i = 0,$$

то есть $a - bi$ тоже корень p, что и следовало доказать.

Сопряжённость мнимых корней многочлена

Пример. При каких условиях многочлен с действительными коэффициентами

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

делится на двучлен $x^2 + 1$?

Сопряжённость мнимых корней многочлена

Решение. Для делимости многочлена на x^2+1 необходимо и достаточно, чтобы мнимая единица была корнем этого многочлена. Тогда многочлен будет делиться на

$$(x-i)(x+i)=x^2+1.$$

Тогда

$$f(i)=a_0+a_1 i+a_2 i^2+\dots+a_n i^n=$$
$$=(a_0-a_2+a_4-\cdots)+i(a_1-a_3+a_5-\cdots)$$

и искомое условие запишется так:

$$(a_0-a_2+a_4-\cdots)=0 \text{ и } (a_1-a_3+a_5-\cdots)=0.$$

Сопряжённость мнимых корней многочлена

Пример. Доказать, что трёхчлен

$$x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3p+2}$$

(n, m, p -- любые натуральные числа) делится на квадратный трёхчлен $x^2 + x + 1$.

Сопряжённость мнимых корней многочлена

Решение. Квадратный трёхчлен $x^2 + x + 1$ имеет два различных корня

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Так как

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1\ )$$

и $x_1^2 + x_1 + 1 = 0$, то $x_1^3 = 1$.

Покажем, что x_1 является корнем трёхчлена $x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3p+2}$:

$$x_1^{3n} + x_1^{3m+1} + x_1^{3p+2} = 1 + x_1 + x_1^2 = 0.$$

Следовательно, трёхчлен имеет и сопряжённый корень, то есть делится на $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + x + 1$, что и следовало доказать.

Разложение многочленов на множители

Теорема. Над полем действительных чисел неразложимыми являются только двучлены первой степени и трёхчлены с мнимыми корнями.

Следствие. Всякий многочлен с действительными коэффициентами нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

Разложение многочленов на множители

Биквадратным трёхчленом называется многочлен вида

$$ax^4 + bx^2 + c,$$

где $a \neq 0$.

Способ разложения биквадратного трёхчлена на множители зависит от знака дискриминанта соответствующего квадратного трёхчлена.

Разложение многочленов на множители

П р и м е р. Разложить на множители многочлен

$$2x^4 + 3x^2 - 14.$$

Разложение многочленов на множители

Решение. Квадратный трёхчлен

$$2y^2 + 3y - 14$$

имеет корни 2 и $-\frac{7}{2}$, и раскладывается на множители:

$$2y^2 + 3y - 14 = (y - 2)(2y + 7),$$

а данный многочлен равен

$$(x^2 - 2)(2x^2 + 7).$$

Разложение многочленов на множители

П р и м е р. Разложить на множители многочлен

$$2x^4 + 3x^2 + 14.$$

Разложение многочленов на множители

Решение. Квадратный трёхчлен $2y^2 + 3y + 14$ имеет отрицательный дискриминант:

$$b^2 < 4ac,$$

поэтому рассмотрим старший член $2x^4$ и свободный член 14 как квадраты некоторых выражений и дополним их до полного квадрата суммы:

$$\left(\sqrt{2}x^2 + \sqrt{14}\right)^2 - 2\sqrt{2}x^2 \cdot \sqrt{14} + 3x^2 =$$

$$\left(\sqrt{2}x^2 + \sqrt{14}\right)^2 - \left(4\sqrt{7} - 3\right)x^2 =$$

$$\left(\sqrt{2}x^2 + \sqrt{14} + x\sqrt{4\sqrt{7} - 3}\right)\left(\sqrt{2}x^2 + \sqrt{14} - x\sqrt{4\sqrt{7} - 3}\right).$$

Обратим внимание, что последнее преобразование было возможно потому, что

$4\sqrt{7} = 2\sqrt{2 \cdot 14} > 3$, то есть $2\sqrt{ac} > |b|$.

Термин «алгебра»

Происходит от заглавия книги математика Аль-Хорезми (в переводе на лат. «Liber Algebrae et Almucabola», 825 г.) о решении линейных и квадратных уравнений.

Слово «Algebrae», которое было переведено как восполнение, восстановление, реставрация, означало перенос вычитаемого числа из одной половины равенства в другую (уничтожение «минус-членов»). Например, преобразование «алджебр» приводит равенство

$$3a - 7 = a + 3$$

к виду

$$3a = a + 3 + 7.$$

Замена равенства

$$3a = a + 3 + 7$$

равносильным равенством

$$2a = 10$$

представляет преобразование «альбмукабала» — противоставление, в наших терминах – приведение (соединение) подобных членов.

Алгебраические забавы из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого

Дни недели от воскресенья до субботы обозначают номерами от первого до седьмого. Каждый из играющих задумывает один из дней, не сообщая другим.

Например, задумана пятница – шестой день.

Алгебраические забавы из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого

Угадывающий берётся указать, какой день был кем задуман: он предлагает всем участникам игры выполнить про себя над задуманным числом следующие действия:

1) умножить задуманный номер дня на 2; $6 \cdot 2 = 12$

2) прибавить к произведению 5; $12 + 5 = 17$

3) умножить сумму на 5; $17 \cdot 5 = 85$

4) приписать к произведению в конце нуль 850

и назвать результат.

Алгебраические забавы из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого

От этого числа угадывающий отнимает 250 и получает:

$$850 - 250 = 600.$$

Первая цифра даёт номер дня.

Алгебраические забавы из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого

Правило. Пусть задумано число x. Выполним действия:

1) $x \cdot 2 = 2x$;

2) $2x + 5$;

3) $(2x + 5) \cdot 5 = 10x + 25$;

4) $(10x + 25) \cdot 10 = 100x + 250$;

5) $100x + 250 - 250 = 100x$.

Вопросы

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1TEI9W-V1d83rktUfLNaCXmj6aGlcltkDPB9AQQ1MMgg/edit?usp=sharing

Вопрос 1. Выберите все верные утверждения:

(1) Графики линейной функции и многочлена третьей степени всегда имеют три общие точки.

(2) Графики линейной функции и многочлена третьей степени имеют не более трёх общих точек.

(3) Графики линейной функции и многочлена третьей степени могут иметь четыре общие точки.

(4) Графики линейной функции и многочлена третьей степени могут не иметь общих точек.

Вопросы

Вопрос 2. Выберите все разложения многочлена

$$x^2 - 8x + 15$$

на множители:

(1) $(x-3)(x-5)$.

(2) $(3x-9)\left(\frac{x}{3}-\frac{5}{3}\right)$.

(3) 3$\left(\frac{x}{3}-1\right)(x-5)$.

(4) $3\left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{5}{3}\right)$.

Вопросы

Вопрос 3. Выберите все многочлены, которые невозможно разложить на множители меньшей степени с действительными коэффициентами:

(1) $x^2 - 7x + 14.$

(2) $7x + 14.$

(3) $x^2 - 7x - 14.$

(4) $x^3 + 7x - 14.$

Вопросы

- Вопрос 4. Упростите выражение

$$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},$$

где a, b и c – попарно различные числа.

Вопросы

Вопрос 5. Поделитесь, пожалуйста, вашим мнением.

Литература

- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ