Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
**«Московский педагогический государственный университет»**
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

# Многочлены-3

*Е.А. Седова, к.п.н.,*
*проф. кафедры элементарной математики*

# Многочлены-2

ПЛАН

- Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах.
- Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ.
- Стандартный вид многочлена.
- Значения и корни многочлена.
- Действия над многочленами.
- Действия над многочленами в задачах ЕГЭ.
- Деление многочленов с остатком.

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

# Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах

Задача 1. Даны уравнения:

(1) $3x^2 + 4xy + y^2 - 3x - 2y + 21 = 0;$

(2) $5x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 19 = 0;$

(3) $4x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 3 = 0;$

(4) $3x^2 + 4xy + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0;$

(5) $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0.$

# Для каждого уравнения выберите его график

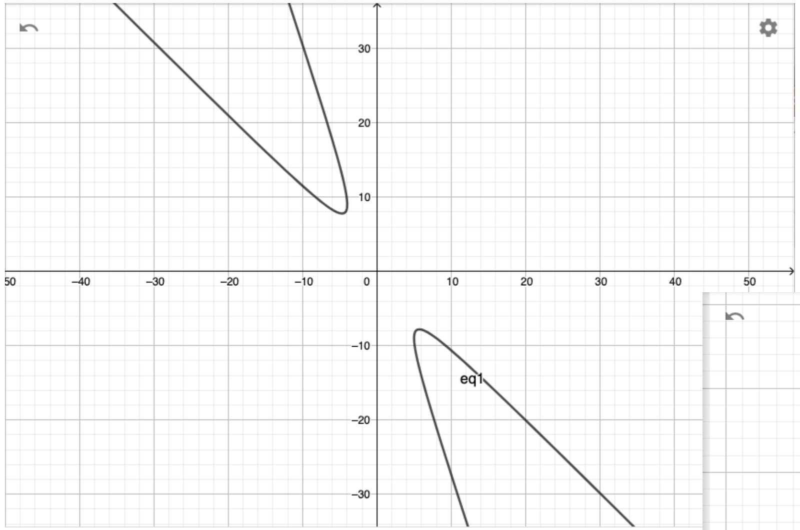


Рисунок 1

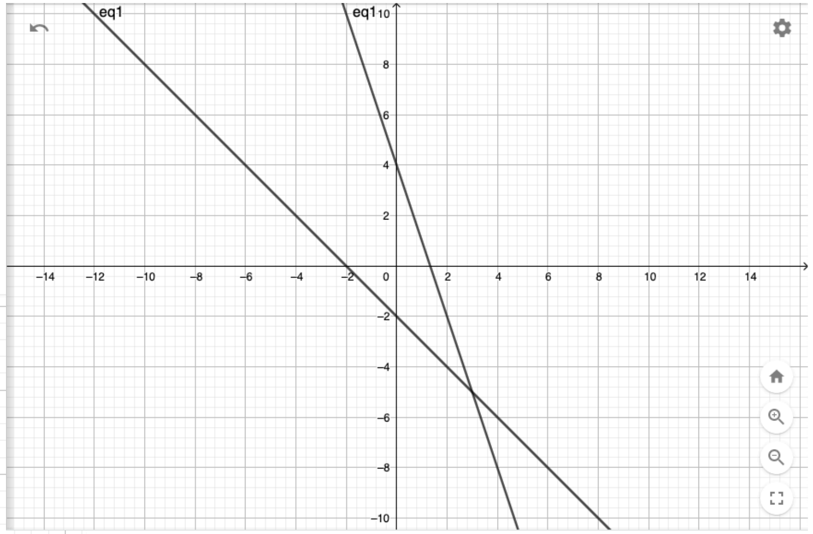


Рисунок 2

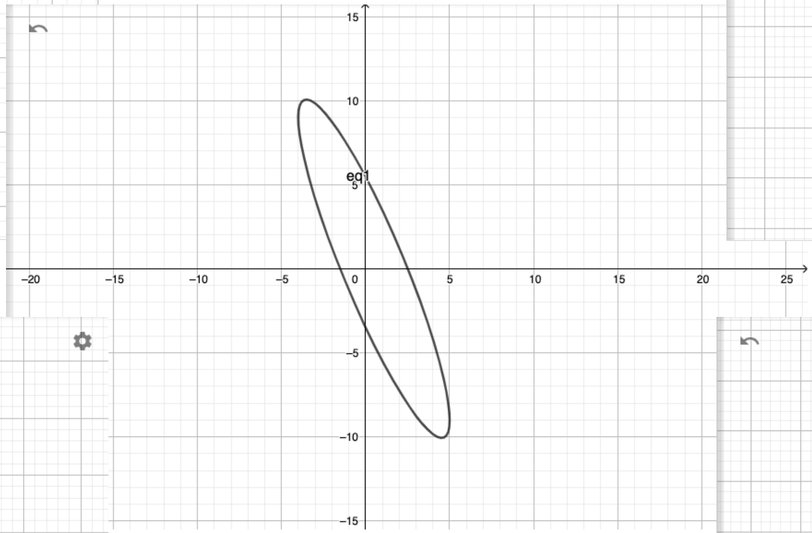


Рисунок 3

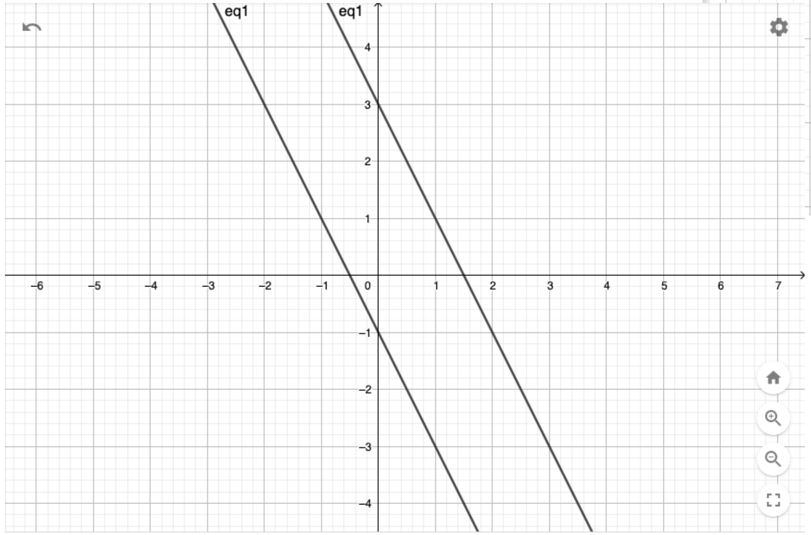


Рисунок 4

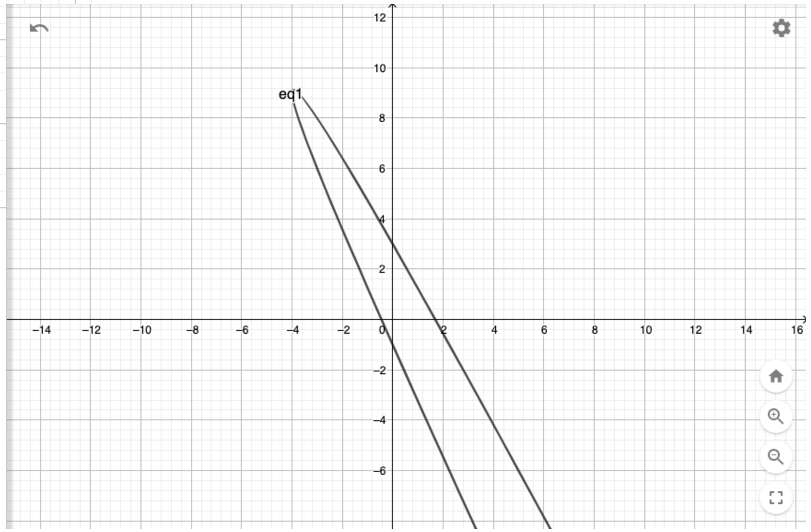


Рисунок 5

# Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах

Р е ш е н и е. Решим квадратные уравнения относительно $y$:

(1) $3x^2+4xy+y^2-3x-2y+21=0, \quad y=1-2x\pm\sqrt{(x-5)(x+4)}$;

(2) $5x^2+4xy+y^2-5x-2y-19=0, \quad y=1-2x\pm\sqrt{-(x-5)(x+4)}$;

(3) $4x^2+4xy+y^2-5x-2y-3=0, \quad y=1-2x\pm\sqrt{x+4}$;

(4) $3x^2+4xy+y^2+2x-2y-8=0, \quad y=1-2x\pm\sqrt{(2x-6)^2}$;

(5) $4x^2+4xy+y^2-4x-2y-3=0, \quad y=1-2x\pm\sqrt{16}$.

# Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах

Найдём ОДЗ выражений для нахождения $y$:

(1) $3x^2 + 4xy + y^2 - 3x - 2y + 21 = 0,\qquad y = 1 - 2x \pm \sqrt{(x-5)(x+4)};$

ОДЗ: $(-\infty, -4] \cup [5, +\infty)$, гипербола.

(2) $5x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 19 = 0,\qquad y = 1 - 2x \pm \sqrt{-(x-5)(x+4)};$

ОДЗ: $[-4, 5]$, эллипс.

(3) $4x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 3 = 0,\qquad y = 1 - 2x \pm \sqrt{x+4};$

ОДЗ: $[-4, +\infty)$, парабола.

(4) $3x^2 + 4xy + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0,\qquad y = 1 - 2x \pm \sqrt{(2x-6)^2};$

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$, две пересекающиеся прямые.

(5) $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0,\qquad y = 1 - 2x \pm \sqrt{16}.$

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$, две параллельные прямые.

# Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах. ЕГЭ: задача 18

З а д а ч а 2. Найдите наименьшее значение параметра $a$, для которого существует хотя бы одна такая пара чисел $(x, y)$, что

$$x^2 + 2y^2 - xy - ax + ay + a^2 \leq 1.$$

# Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах. ЕГЭ: задача 18

Решение. Перепишем неравенство как квадратное с переменной $x$:

$$x^2-(y+a)x+2y^2+ay+a^2-1\le 0.$$

Так как старший коэффициент квадратного трёхчлена в левой части больше нуля, то неравенство имеет решения в том и только в том случае, когда этот трёхчлен имеет хотя бы один корень, то есть его дискриминант больше или равен нулю:

$$D=(y+a)^2-4(2y^2+ay+a^2-1)=-7y^2-2ay-3a^2+4\ge 0.$$

Рассмотрим последнее неравенство как квадратное с переменной $y$:

$$7y^2+2ay+3a^2-4\le 0.$$

Как и в предыдущем случае, оно имеет решения только если его дискриминант больше или равен нулю:

$$D_1=4a^2-28(3a^2-4)=4(28-20a^2)\ge 0, \text{ откуда } a^2\le\frac{7}{5}, \text{ то есть } a\in\left[-\sqrt{\frac{7}{5}},\sqrt{\frac{7}{5}}\right].$$

Получаем ответ: наименьшим значением параметра $a$ является $-\sqrt{\frac{7}{5}}$.

# Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах. ЕГЭ: задача 18

Задача 3. Найдите наименьшее значение параметра $a$, для которого существует хотя бы одна такая пара чисел $(x, y)$, что

$$2x^2 + 2y^2 + xy - ax + ay + a^2 \leq 2.$$

# Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах. ЕГЭ: задача 18

Ответ: $-\sqrt{3}$.

# Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах. ЕГЭ: задача 18

Задача 3. Найдите все значения параметра $a$, для которого существует хотя бы одна такая пара чисел $(x, y)$, что

$$3x^2 + 2(y - 2 - 2\cos(\pi a))x + y^2 + 4\cos^2(\pi a) + 4 = 0.$$

# Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах. ЕГЭ: задача 18

Р е ш е н и е. Сначала перепишем уравнение с новым параметром $b = 2\cos(\pi a)$:

$$3x^2 + 2(y - 2 - b)x + y^2 + b^2 + 4 = 0,$$

раскроем скобки и сделаем группировку:

$$3x^2 + 2xy - 4x - 2bx + y^2 + b^2 + 4 = 0,$$

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 2bx + b^2) = 0,$$

$$(x + y)^2 + (x - 2)^2 + (x - b)^2 = 0.$$

Так как сумма квадратов равна нулю только если каждый них равен нулю, то получаем единственное возможное значение для *x*, откуда

$$x = 2, y = -2, x = 2\cos(\pi a).$$

Возвращаясь к параметру *a*, решим последнее уравнение при $x = 2$:

$2\cos(\pi a) = 2, \cos(\pi a) = 1$, откуда $a = 2n, n \in \mathbb{Z}$,

и запишем ответ: $a = 2n, n \in \mathbb{Z}$.

# Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах. ЕГЭ: задача 18

З а д а ч а 4. Найдите все такие тройки чисел $(x, y, z)$, что

$$2x^2 + 5 \cdot 4^y + \log_2^2 z - 4x \cdot 2^y - 2x \log_2 z - 2^{y+1} + 1 = 0.$$

# Ещё раз о квадратном трёхчлене в задачах. ЕГЭ: задача 18

Р е ш е н и е. Обозначим $2^y$ через $s$, $\log_2 z$ через $t$:

$$2x^2 + 5s^2 + t^2 - 4xs - 2xt - 2s + 1 = 0,$$

сделаем группировку:

$$(x^2 - 4xs + 4s^2) + (x^2 - 2xt + t^2) + (s^2 - 2s + 1) = 0,$$
$$(x - 2s)^2 + (x - t)^2 + (s - 1)^2 = 0.$$

Так как сумма квадратов равна нулю только если каждый них равен нулю, то получаем единственное возможное значение для $s$, откуда

$$s = 1, x = 2, t = 2.$$

Возвращаясь к исходным переменным, решим первое и третье уравнения при $s = 1$:

$$2^y = 1, \text{ откуда } y = 0,$$

$$\log_2 z = 2, \text{ откуда } z = 4,$$

и запишем ответ: $(2, 0, 4)$.

# Стандартный вид многочлена

Задача. Приведите к стандартному виду многочлен:

(1) $(x+1)^2 - 2(x+1) + 1$;

(2) $(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1$;

(3) $(x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 6(x+1)^2 - 4(x+1) + 1$;

(4) $(x+1)^5 - 5(x+1)^4 + 10(x+1)^3 - 10(x+1)^2 + 5(x+1) - 1$.

Запишите «следующее» аналогичное тождество.

# Стандартный вид многочлена

Ответы:

(1) $x^2$;

(2) $x^3$;

(3) $x^4$;

(4) $x^5$.

«Следующее» тождество:

$(x+1)^6 - 6(x+1)^5 + 15(x+1)^4 - 20(x+1)^3 + 15(x+1)^2 -$

$-6(x+1) + 1.$

# Значения и корни многочлена

Задача. Докажите, что многочлен не имеет отрицательных корней:

(1) $x^4 - 11x^3 + 5x^2 - x + 15$;

(2) $x^5 - 12x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 5x - 14$.

# Действия над многочленами

Действия над многочленами можно записывать без промежуточных записей:

$$(2x^5 - x^2 - x + 1) + (3x^4 + x^3 - 2) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 - x^2 - x - 1;$$

$$(2x^5 - x^2 - x + 1)(3x^4 + x^3 - 2) =$$
$$= 6x^9 + 2x^8 - 3x^6 - 8x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x - 2,$$

подсчитывая последовательно коэффициенты при каждой степени неизвестного.

Например, в произведении многочленов степень $x^5$ появляется три раза:

$$2x^5 \cdot (-2) + (-x^2)\cdot x^5 + (-x) \cdot 3x^4 = (-4 - 1 - 3)x^5 = -8x^5.$$

# Действия над многочленами

Действия над многочленами можно записывать подобно тому, как мы записываем действия над числами:

$$
\begin{array}{r}
2x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 1x^2 - 1x + 1 \\
+ \qquad\qquad 3x^4 + 1x^3 + 0x^2 + 0x - 2 \\
\hline
2x^5 + 3x^4 + 1x^3 - 1x^2 - 1x - 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
2x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 1x^2 - 1x + 1 \\
\times \; 3x^4 + 1x^3 + 0x^2 + 0x - 2 \\
\hline
6x^9 + 0x^8 + 0x^7 - 3x^6 - 3x^5 + 3x^4 \\
\qquad 2x^8 + 0x^7 + 0x^6 - 1x^5 - 1x^4 + 1x^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 4x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 2x - 2 \\
\hline
6x^9 + 2x^8 + 0x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 2x^4 + 1x^3 + 2x^2 + 2x - 2
\end{array}
$$

# Действия над многочленами

и даже более экономно, записывая только строки коэффициентов:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
+ & & 3 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
\hline
 & 2 & 3 & 1 & -1 & -1 & -1
\end{array}
$$

$$
\times
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & & & & \\
3 & 1 & 0 & 0 & -2 & & & & & \\
\hline
6 & 0 & 0 & -3 & -3 & 3 & & & & \\
 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & & & \\
 & & & & -4 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\
\hline
6 & 2 & 0 & -3 & -8 & 2 & 1 & 2 & 2 & -2
\end{array}
$$

# Действия над многочленами.
# ЕГЭ: задача 18

Задача. Найдите все целые значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

$$2x^7 - 4x^6 + 11x^5 - 18x^4 + 25x^3 - 2(a+16)x^2 + 25x - 5a - 23 = 0$$

имеет хотя бы один целый корень.

# Действия над многочленами. ЕГЭ: задача 18

Р е ш е н и е. Относительно параметра $a$ уравнение является линейным:

$$(2x^2+5)a = 2x^7 - 4x^6 + 11x^5 - 18x^4 + 25x^3 - 32x^2 + 25x - 23.$$

Так как $2x^2+5 \neq 0$, разделим многочлен в правой части равенства на $2x^2+5$ и запишем решение:

$$a = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6 + \frac{7}{2x^2+5}.$$

Так как числа $a$ и $x$ по условию являются целыми, то число $2x^2+5$ является делителем числа 7, то есть

$$2x^2+5=1,\ 2x^2+5=-1,\ 2x^2+5=7 \text{ или } 2x^2+5=-7,$$

откуда $x=1$ или $x=-1$. В первом случае $a=-20$, во втором $a=-2$.

Ответ: $-2, -20$.

# Действия над многочленами.
# ЕГЭ: задача 18

Задача. Найдите все целые значения параметра $a$, при каждом из которых данное уравнение имеет хотя бы один целый корень:

а) $6x^5 + 8x^4 + 13x^3 - 3ax^2 + 2(2a + 5)x - 2a - 13 = 0$;

б) $8x^5 + 2x^4 - 11x^3 - 2(2a - 1)x^2 + 5(a + 1)x - 2a + 1 = 0$.

# Действия над многочленами.
# ЕГЭ: задача 18

Ответы:

а) $-14$;

б) $7$.

# Деление многочленов с остатком

Задача. При каких значениях $a$ и $b$ многочлен

$$f(x) = x^4 + ax^3 + 3x^2 + bx - 5$$

делится на двучлен $x + 1$ и даёт остаток 9 при делении на двучлен $x - 2$?

# Деление многочленов с остатком

Р е ш е н и е. По теореме Безу должны выполнятся равенства

$$f(-1) = 0 \text{ и } f(2) = 9.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0, \\ 8a + 2b + 23 = 9, \end{cases}$$

получим $a = -2$, $b = 1$.

# Деление многочленов с остатком

Задача. Найти НОД и НОК многочленов
$f = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ и $g = x^2 - (a+1)x + a$.

# Деление многочленов с остатком

Решение. Разложим многочлены на линейные множители. Целыми корнями многочлена $f$ могут быть только числа $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 6$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-3$ | $-3$ | $11$ | $-6$ |
| $1$ | $1$ | $-2$ | $-5$ | $6$ | $0$ |
| $1$ | $1$ | $-1$ | $-6$ | $0$ | |

$$f = (x-1)^2(x^2 - x - 6) = (x-1)^2(x+2)(x-3).$$

По теореме, обратной теореме Виета, корнями многочлена $g$ являются числа $1$ и $a$:

$$g = (x-1)(x-a).$$

Если $a$ равно одному из чисел 1, 3 или –2, то $f$ делится на $g$, тогда

НОД $(f, g) = g$, а НОК $(f, g) = f$.

В противном случае

НОД $(f, g) = x - 1$, НОК $(f, g) = (x-1)^2(x+2)(x-3)(x-a)$.

# Деление многочленов с остатком

Задача. Найти НОД и НОК многочленов $f = x^4 - 5x^3 - x^2 + 17x + 12$ и $g = x^2 + (b-3)x - 3b$.

# Деление многочленов с остатком

Решение.

Разложим многочлены на линейные множители:

$$f = (x+1)^2(x^2 - 7x + 12) = (x+1)^2(x-3)(x-4),$$

$$g = (x-3)(x+b).$$

Если $b$ равно одному из чисел 1 или –4, то $f$ делится на $g$, тогда

НОД $(f, g) = g$, а НОК $(f, g) = f$.

В противном случае

НОД $(f, g) = x - 3$, НОК $(f, g) = (x+1)^2(x-3)(x-4)(x+b)$.

# Разложение многочленов на множители

Задача. Решить уравнение:

а) $2x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2 = 0$;

б) $3x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 3 = 0$;

в) $2x^5 - x^4 - 34x^3 - 34x^2 - x + 2 = 0$.

$$3x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 3 = 0$$

# Разложение многочленов на множители

Решение.

а) Разделим обе части уравнения на $x^2$ и сгруппируем слагаемые:

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

После замены $x+\frac{1}{x}=t$ уравнение примет вид $2(t^2-2)+3t-1=0$, откуда $2t^2+3t-5=0$, $t=1$ или $t=\frac{5}{2}$.

Уравнение $x+\frac{1}{x}=1$ не имеет корней;

уравнение $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ равносильно уравнению $2x^2-5x+2=0$, которое имеет корни $x=-2$ или $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $-2, -\frac{1}{2}$.

# Разложение многочленов на множители

Решение.

б) Любое возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $-1$:

$$3x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+3=$$
$$=(x+1)(3x^4+2x^3-15x^2+2x+3).$$

Решим уравнение $3x^4+2x^3-15x^2+2x+3=0$.

После деления на $x^2$ и замены $x+\frac{1}{x}=t$ уравнение примет вид

$$3(t^2-2)+2t-15=0,$$

откуда $3t^2+2t-21=0$, $t=-3$ или $t=\frac{7}{3}$.

Решим уравнения $x+\frac{1}{x}=-3$ и $x+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$.

Ответ: $-1$, $-3$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$, $\frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

# Разложение многочленов на множители

Решение.

в) Любое возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $-1$:

$$2x^5 - x^4 - 34x^3 - 34x^2 - x + 2 =$$
$$= (x+1)(2x^4 - 3x^3 - 31x^2 - 3x + 2).$$

Решим уравнение $2x^4 - 3x^3 - 31x^2 - 3x + 2 = 0$.

После деления на $x^2$ и замены $x + \frac{1}{x} = t$ уравнение примет вид

$$2(t^2 - 2) - 3t - 31 = 0,$$

откуда $2t^2 - 3t - 35 = 0$, $t = 5$ или $t = -\frac{7}{2}$.

Решим уравнения $x + \frac{1}{x} = 5$ и $x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{2}$.

Ответ: $-1$, $\frac{-7\pm\sqrt{33}}{4}$, $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

# Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1TEI9W-V1d83rktUfLNaCXmj6aGlcltkDPB9AQQ1MMgg/edit?usp=sharing

Задание 1. Выберите все многочлены, коэффициенты которых в стандартном виде удовлетворяют равенству

$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{2019} + a_{2020} = 1.$$

(1) $(x^2 + x + 1)^{1010}$.

(2) $(3 + x - x^2)^{1000}\,(x^4 + 5x + 4)^5$.

(3) $x^3 + 2 + (x^5 + x^2 - 1)^{404}$.

(4) $x^3 + 17x + 19 - (x^{20} + 3x + 2)^{101}$.

# Для самостоятельного решения

Задание 2. Выберите все многочлены, которые не имеют отрицательных корней:

(1) $x^4 - 11x^3 + 22x^2 - 33x + 44.$

(2) $x^5 - 10x^4 + 20x^3 - 30x^2 + 40x - 50.$

(3) $10x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$

(4) $20x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6.$

# Для самостоятельного решения

Задание 3. Решите уравнение $3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 3 = 0$.

# Для самостоятельного решения

З а д а н и е  4.  При каких значениях *c* и *d* многочлен

$$f(x) = cx^4 + 3x^3 - dx + 2$$

делится на двучлен $x + 2$ и даёт остаток 12 при делении на двучлен $x - 1$?

# Для самостоятельного решения

З а д а н и е  5.  Найдите наибольшее значение параметра $a$, для которого существует хотя бы одна пара чисел ($x$, $y$) такая, что

$$x^2 + 2y^2 + xy - ax + ay + a^2 \leq 3.$$

# Литература


- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.
- Популярные лекции по математике. https://math.ru/lib/ser/plm
- Дорофеев Г.В. Квадратный трёхчлен в задачах. Львов: Квантор, 1991. 104 с.
- Шестаков С.А. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень). М: МЦНМО, 2018. 288 с. ISBN: 978-5-4439-1218-9
- Высоцкий В. С. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ. М.: Научный мир, 2011. 316 с. ISBN 978-5-91522-257-0.
- Дорофеев Г. В., Пчелинцев С. В. Многочлены с одной переменной. М.: Просвещение, 2001. 144 с. ISBN: 5-09-009924-3.

# КОНЕЦ СЕМИНАРА