Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Многочлены-4

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Многочлены-4

ПЛАН

- Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ:
  - знаки корней квадратного трёхчлена;
  - отбор корней.
- Уравнения с положительными корнями (по мотивам: [Добровольский В. А. Даламбер. — 1968. https://www.mathedu.ru/text/dobrovolskiy_dalamber_1968/p27, с. 16-17).
- Равносильность уравнений.
- Стандартные приёмы решения алгебраических (рациональных) уравнений.

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Знаки корней квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c = 0$

0) два различных корня:

$$D > 0.$$

1) два корня разных знаков:

$$ac < 0.$$

2) два различных корня одного знака:

$$ac > 0.$$

3) два различных положительных корня:

$$ac > 0 \text{ и } ab < 0.$$

4) два различных отрицательных корня:

$$ac > 0 \text{ и } ab > 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ: знаки корней квадратного трёхчлена

Задача. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2(a^2 - 4a + 1)x + 4 = 0$$

имеет два различных отрицательных корня.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2(a^2 - 4a + 1)x + 4 = 0$$

имеет два различных отрицательных корня

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ: знаки корней квадратного трёхчлена

Решение. Обозначим $a^2 - 4a + 1$ через b и рассмотрим уравнение

$$x^2 - 2bx + 4 = 0.$$

Уравнение $Ax^2 + Bx + C = 0$ имеет два отрицательных корня тогда и только тогда, когда:

$$D > 0, \qquad \frac{B}{A} > 0, \qquad \frac{C}{A} > 0.$$

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ: знаки корней квадратного трёхчлена

Обозначим $a^2 - 4a + 1$ через b и рассмотрим уравнение
$$x^2 - 2bx + 4 = 0.$$

1) Уравнение имеет два различных корня:
$$\frac{D}{4} = b^2 - 4 > 0, \quad \text{откуда } b \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

2) Уравнение имеет два корня одного знака:

свободный член равен произведению двух корней одного знака, то есть больше нуля (или иначе: парабола с ветвями вверх (вниз) пересекает ось y в точке с положительной (отрицательной) ординатой): условие выполнено, так как старший коэффициент $1 > 0$ и свободный член $4 > 0$.

3) Уравнение имеет два отрицательных корня:

второй коэффициент в уравнении со старшим коэффициентом 1 равен сумме двух отрицательных корней, взятых с обратным знаком, то есть больше нуля (или иначе: вершина параболы в точке с отрицательной абсциссой):
$$-2b > 0, \text{ откуда } b \in (-\infty, 0).$$

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ: знаки корней квадратного трёхчлена

Получаем систему условий

$$\begin{cases} b \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ b \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Следовательно, $b \in (-\infty, -2)$, то есть

$$a^2 - 4a + 1 < -2,$$

откуда получаем ответ: $a \in (1, 3)$.

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ: отбор корней

Задача. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых больший корень уравнения

$$x^2 - (14a - 1)x + 49a^2 - 7a = 0$$

в пять раз больше, чем его меньший корень.

З а д а ч а . Найдите все значения параметра a, для каждого из которых больший корень уравнения

$$x^2 - (14a - 1)x + 49a^2 - 7a = 0$$

в пять раз больше, чем его меньший корень

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ: отбор корней

Решение. Рассмотрим квадратное уравнение относительно *x,* его дискриминант

$$D = (14a - 1)^2 - 4(49a^2 - 7a) = 1$$

больше нуля, следовательно, уравнение имеет два различных корня:

$$2x_{1,2} = 14a - 1 \pm 1.$$

По условию

$$14a - 1 + 1 = 5(14a - 1 + 1),$$

откуда получаем ответ: $a = \frac{5}{28}$.

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ: отбор корней

Задача. Определить k такое, чтобы один из корней уравнения

$$(k^2 - 5k + 3)x^2 + (3k - 1)x + 2 = 0$$

был вдвое больше другого.

Определить k такое, чтобы один из корней уравнения

$$(k^2 - 5k + 3)x^2 + (3k - 1)x + 2 = 0$$

был вдвое больше другого

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ: отбор корней

Решение. Пусть x_1 – один из корней уравнения. Рассмотрим квадратное уравнение относительно k:

$$x_1^2k^2 + (3x_1 - 5x_1^2)k + (3x_1^2 - x_1 + 2) = 0;$$

по условию это равенство справедливо и при $x_2 = 2x_1$, то есть

$$4x_1^2k^2 + (6x_1 - 20x_1^2)k + (12x_1^2 - 2x_1 + 2) = 0;$$

вычитая из второго уравнения первое, умноженное на 4, получим

$$3x_1k - x_1 + 3 = 0.$$

Проверка показывает, что значение $k = \frac{1}{3}$ не удовлетворяет условию задачи, поэтому

$$x_1 = -\frac{3}{3k - 1}.$$

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ: отбор корней

Подставим найденное выражение для x_1 в исходное уравнение:

$$(k^2 - 5k + 3) \cdot \left(-\frac{3}{3k-1}\right)^2 + (3k - 1) \cdot \left(-\frac{3}{3k-1}\right) + 2 = 0,$$

$$\frac{9(k^2 - 5k + 3)}{(3k - 1)^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{39k - 26}{(3k - 1)^2} = 0.$$

Получаем ответ:

$$k = \frac{2}{3}.$$

Уравнения с положительными корнями

Даламбер на некоторые вопросы математики сохранял свой своеобразный взгляд. Например, он связывал появление отрицательных величин с ошибочностью алгебраической постановки задачи, считая, что знак вычитания «есть лишь наименование, и указывает только на ложное положение или особое состояние количества, при котором он стоит, не лишая этого количества действительного существования» [Добровольский, 1968].

П р и м е р. Для уравнения

$$x^2 + (a - b)x - ab = 0$$

имеем $x_1 = b$, $x_2 = -a$. Сделав замену $z = x + 2a$, мы получим для новой неизвестной

$$z_1 = 2a + b, z_2 = 2a - a = -a,$$

то есть оба корня положительны.

Уравнения с положительными корнями

Пример. Отцу 40 лет, сыну 16. Через сколько лет отец будет старше сына в 4 раза?

По условию задачи можно составить уравнение

$$(16 + x) \cdot 4 = 40 + x,$$

откуда $x = -8$; это означает, что по отношению к данному моменту искомое событие уже прошло. Поэтому более правильно поставить задачу так: сколько лет назад произошло это событие? Тогда уравнение примет вид:

$$(16 - x) \cdot 4 = 40 - x,$$

а его корень будет $x = 8$.

Уравнения с положительными корнями

З а д а ч а . Многочлен

$$f = x^5 + 3x - 2$$

имеет корень α.

Запишите многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень

(1) $-\alpha$;

(2) $\frac{\alpha}{2}$;

(3) $\frac{1}{\alpha}$;

(4) $\sqrt{\alpha}$;

(5) $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$;

(6) $-\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}$.

Уравнения с положительными корнями

Ответы. $f = x^5 + 3x - 2$

	Корень	Многочлен
(1)	$-\alpha$	$f = x^5 + 3x + 2$
(2)	$\frac{\alpha}{2}$	$f = 32x^5 + 6x - 2$
(3)	$\frac{1}{\alpha}$	$f = 2x^5 - 3x^4 - 1$
(4)	$\sqrt{\alpha}$	$f = x^{10} + 3x^2 - 2$
(5)	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	$f = 2x^{10} - 3x^8 - 1$
(6)	$-\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}$	$f = 2x^{15} + 3x^{12} + 1$

Равносильность уравнений

Пусть имеются два уравнения

A: $f_1(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1, \dots, x_n)$ над множеством $P (P = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$,

с областью допустимых значений переменных D_A и множеством решений M_A,

B: $f_2(x_1, \dots, x_n) = g_2(x_1, \dots, x_n)$ над множеством P $(P = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$,

с областью допустимых значений переменных D_B и множеством решений M_B.

Равносильность уравнений

Теорема 1. Пусть $f_1 \equiv f_2$ на $D_{f_1} \cap D_{f_1}$ и $g_1 \equiv g_2$ на $D_{g_1} \cap D_{g_1}$.

Тогда уравнения

$$A\colon f_1 = g_1 \text{ и } B\colon f_2 = g_2$$

равносильны тогда и только тогда, когда

$$(1)\ (a \in D_A \backslash D_B) \Rightarrow (a \notin M_A),$$

$$(2)\ (b \in D_B \backslash D_A) \Rightarrow (b \notin M_B).$$

Другими словами, тождественные преобразования левой и правой частей уравнения приводят к равносильному уравнению тогда и только тогда, когда ни одно из этих двух уравнений не имеет корней в множестве, где второе не определено.

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$2x^2 - 3x = 2$	$2x^2 + 3x = 2$	$\mathbb{N}$				
$2x^2 - 3x = 2$	$2x^2 - 3x = 2$	$\mathbb{Q}$				
$2x^2 = 5x - 2$	$2x^2 = 3x + 2$	$\mathbb{N}$				
$2x^2 = 5x - 2$	$2x^2 = 3x + 2$	$\mathbb{Q}$				

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$2x^2 - 3x = 2$	$2x^2 + 3x = 2$	$\mathbb{N}$	$-$	$+$	$-$	$M_A = \{2\}$, $M_B = \emptyset$
$2x^2 - 3x = 2$	$2x^2 + 3x = 2$	$\mathbb{Q}$	$-$	$-$	$-$	$M_A = \left\{2, -\frac{1}{2}\right\}$, $M_B = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$
$2x^2 = 5x - 2$	$2x^2 = 3x + 2$	$\mathbb{N}$	$+$	$+$	$+$	$M_A = \{2\}$, $M_B = \{2\}$
$2x^2 = 5x - 2$	$2x^2 = 3x + 2$	$\mathbb{Q}$	$-$	$-$	$-$	$M_A = \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$, $M_B = \left\{2, -\frac{1}{2}\right\}$

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$x^2 - 2 = 0$	$x^4 - 4 = 0$	$\mathbb{N}$				
$x^2 - 2 = 0$	$x^4 - 4 = 0$	$\mathbb{Q}$				
$x^2 - 2 = 0$	$x^4 - 4 = 0$	$\mathbb{R}$				
$x^2 - 2 = 0$	$x^4 - 4 = 0$	$\mathbb{C}$				

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$x^2 - 2 = 0$	$x^4 - 4 = 0$	$\mathbb{N}$	$+$	$+$	$+$	$M_A = \emptyset$, $M_B = \emptyset$
$x^2 - 2 = 0$	$x^4 - 4 = 0$	$\mathbb{Q}$	$+$	$+$	$+$	$M_A = \emptyset$, $M_B = \emptyset$
$x^2 - 2 = 0$	$x^4 - 4 = 0$	$\mathbb{R}$	$+$	$+$	$+$	$M_A = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, $M_B = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
$x^2 - 2 = 0$	$x^4 - 4 = 0$	$\mathbb{C}$	$+$	$-$	$-$	$M_A = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, $M_B = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$

Равносильность уравнений

Следствие 1. Если $D_A = D_B$, то $A \Leftrightarrow B$ (если при тождественных преобразованиях левой и правой части уравнение A перешло в уравнение B и при этом ОДЗ не изменилась, то уравнения A и B равносильны).

Следствие 2. Если $D_A \supset D_B$, то $M_A = M_B \cup M'$, где $M' = \{a | a \in D_A \backslash D_B, a \in M_A\}$ (если при тождественных преобразованиях левой и правой части уравнение A перешло в уравнение B и при этом ОДЗ сузилась, то корнями исходного уравнения A являются корни уравнения B и значения переменных, при которых B не определено, а A обращается в верное равенство).

Следствие 3. Если $D_A \subset D_B$, то $M_A = M_B \backslash M'$, где $M' = \{b | b \in D_B \backslash D_A, b \in M_B\}$ (если при тождественных преобразованиях левой и правой части уравнение A перешло в уравнение B и при этом ОДЗ расширилась, то корнями исходного уравнения A являются корни уравнения B за исключением значений переменных, при которых B обращается в верное равенство, а A не определено).

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$\dfrac{x^2-4}{x+2}=1$	$x-2=1$	$\mathbb{R}$				
$\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$	$x-2=-4$	$\mathbb{R}$				

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$\frac{x^2-4}{x+2}=1$	$x-2=1$	$\mathbb{R}$	$+$	$+$	$+$	$M_A=\{3\}$, $M_B=\{3\}$
$\frac{x^2-4}{x+2}=-4$	$x-2=-4$	$\mathbb{R}$	$+$	$-$	$-$	$M_A=\emptyset$, $M_B=\{-2\}$

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$x^3 - \frac{4x^2}{x} = 0$	$x^3 - 4x = 0$	$\mathbb{R}$				
$x^3 - \frac{4x^2}{x} = 0$	$x^3 - \frac{4x(x+2)}{x+2} = 0$	$\mathbb{R}$				

Равносильность уравнений

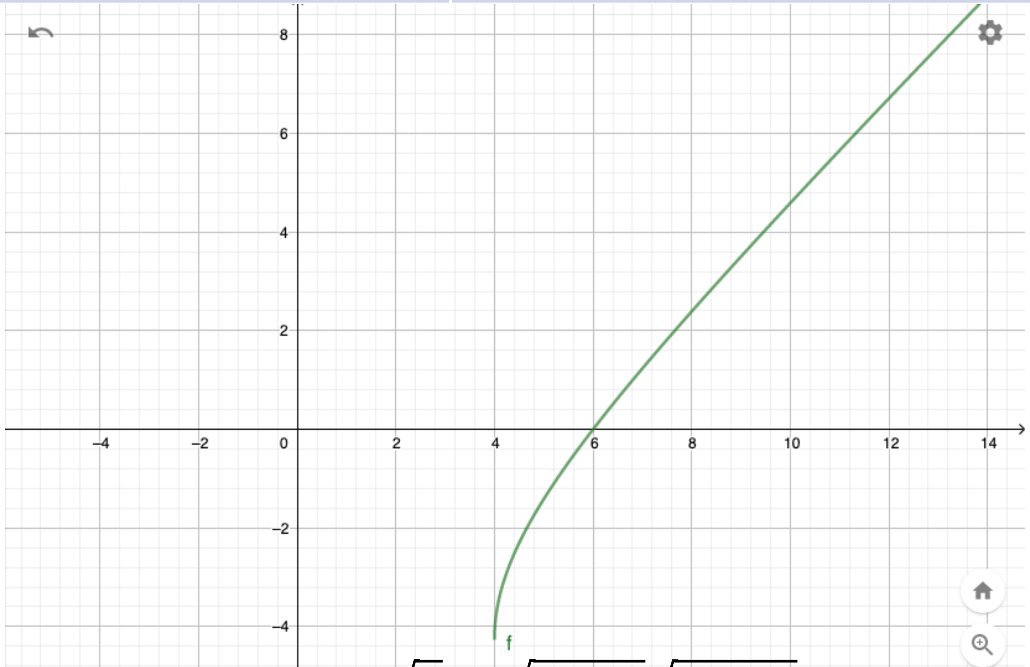
A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$x^3 - \frac{4x^2}{x} = 0$	$x^3 - 4x = 0$	$\mathbb{R}$	$+$	$-$	$-$	$M_A = \{2, -2\}$, $M_B = \{0, 2, -2\}$
$x^3 - \frac{4x^2}{x} = 0$	$x^3 - \frac{4x(x+2)}{x+2} = 0$	$\mathbb{R}$	$-$	$-$	$-$	$M_A = \{2, -2\}$, $M_B = \{0, 2\}$

Равносильность уравнений

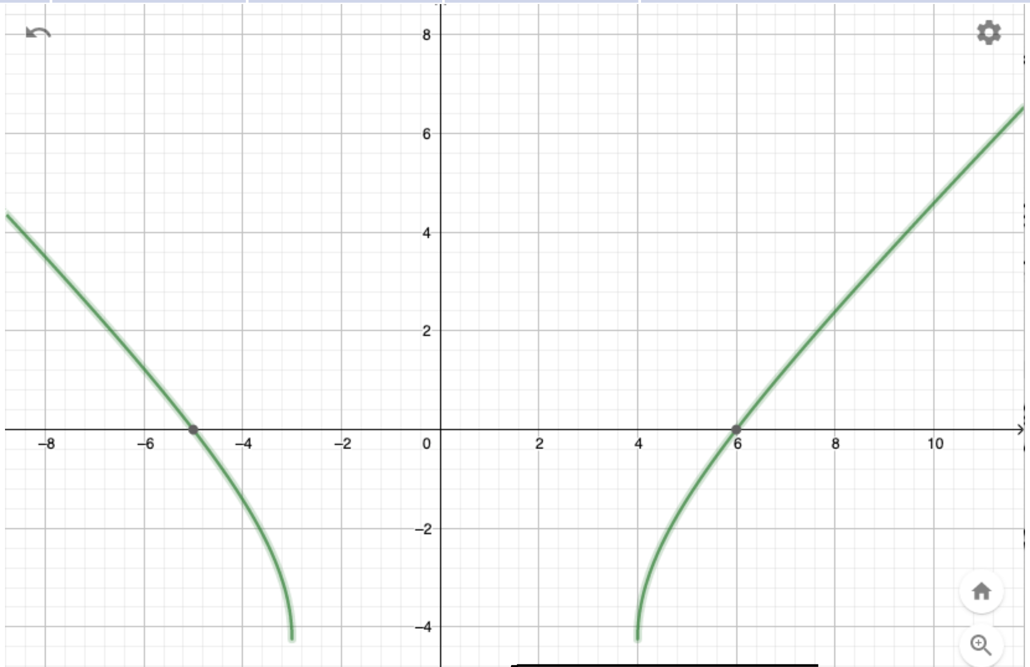
A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$\sqrt{x+3}\sqrt{x-4}=3\sqrt{2}$	$\sqrt{(x+3)(x-4)}=3\sqrt{2}$	$\mathbb{R}$				

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$\sqrt{x+3}\sqrt{x-4} = 3\sqrt{2}$	$\sqrt{(x+3)(x-4)} = 3\sqrt{2}$	$\mathbb{R}$	$+$	$-$	$-$	$M_A = \{6\}$, $M_B = \{-5, 6\}$



$y = -3\sqrt{2} + \sqrt{x+3}\sqrt{x-4}$



$y = -3\sqrt{2} + \sqrt{(x+3)(x-4)}$

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$\lg x^2 = 2$	$2\lg x = 2$	$\mathbb{R}$				
$\lg x^2 = 2$	$2\lg\lvert x\rvert = 2$	$\mathbb{R}$				
$\lg x^3 = 0$	$3\lg x = 0$	$\mathbb{R}$				

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$\lg x^2 = 2$	$2\lg x = 2$	$\mathbb{R}$	$-$	$+$	$-$	$M_A = \{10, -10\}$, $M_B = \{10\}$
$\lg x^2 = 2$	$2\lg\lvert x\rvert = 2$	$\mathbb{R}$	$+$	$+$	$+$	$M_A = \{10, -10\}$, $M_B = \{10, -10\}$
$\lg x^3 = 0$	$3\lg x = 0$	$\mathbb{R}$	$+$	$+$	$+$	$M_A = \{1\}$, $M_B = \{1\}$

Равносильность уравнений

Пусть имеются уравнение

$A\colon f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ над множеством $P (P = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$,

с областью допустимых значений переменных D_A

и множеством решений M_A,

выражение

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$ над множеством P,

с областью допустимых значений переменных D_φ,

и число $\alpha \in P$.

Равносильность уравнений

Теорема 2. Если $D_\varphi \supset D_A$, то уравнения $f = g$ и $f + \varphi = g + \varphi$ равносильны:

$$f = g \Leftrightarrow f + \varphi = g + \varphi.$$

Следствие 1. Если перенести слагаемое из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Следствие 2. Всякое уравнение $f = g$ равносильно уравнению

$$f - g = 0.$$

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$x^2 + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$	$x^2 = 2x$	$\mathbb{Q}$				
$x^2 + \frac{1}{x-1} = 2x + \frac{1}{x-1}$	$x^2 = 2x$	$\mathbb{Q}$				

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$x^2 + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$	$x^2 = 2x$	$\mathbb{Q}$	$+$	$-$	$-$	$M_A = \{2\}$, $M_B = \{0, 2\}$
$x^2 + \frac{1}{x-1} = 2x + \frac{1}{x-1}$	$x^2 = 2x$	$\mathbb{Q}$	$+$	$+$	$+$	$M_A = \{0, 2\}$, $M_B = \{0, 2\}$

Равносильность уравнений

Теорема 3. Если $D_\varphi \supset D_A$ и $(\forall b \in D_A)\varphi(b) \neq 0$, то уравнения $f = g$ и $f\varphi = g\varphi$ равносильны:

$$f = g \Leftrightarrow f\varphi = g\varphi.$$

Следствие. При умножении обеих частей уравнения на отличное от нуля число α ($\alpha \in P$) получается уравнение, равносильное данному:

$$f = g \Leftrightarrow \alpha f = \alpha g.$$

Теоремы 1-4 используются при решении уравнений различных типов.

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	**Комментарий**
$x+3=2$	$(x+3)(x^2+2)=2(x^2+2)$	$\mathbb{R}$				
$x+3=2$	$(x+3)(x^2+2)=2(x^2+2)$	$\mathbb{C}$				
$x+3=2$	$(x+3)(x-2)=2(x-2)$	$\mathbb{R}$				

Равносильность уравнений

A	B	$\mathbb{M}$	$A \Rightarrow B$ над $\mathbb{M}$	$A \Leftarrow B$ над $\mathbb{M}$	$A \Leftrightarrow B$ над $\mathbb{M}$	Комментарий
$x + 3 = 2$	$(x + 3)(x^2 + 2) = 2(x^2 + 2)$	$\mathbb{R}$	$+$	$+$	$+$	$M_A = \{-1\}$, $M_B = \{-1\}$
$x + 3 = 2$	$(x + 3)(x^2 + 2) = 2(x^2 + 2)$	$\mathbb{C}$	$+$	$-$	$-$	$M_A = \{-1\}$, $M_B = \{-1, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$
$x + 3 = 2$	$(x + 3)(x - 2) = 2(x - 2)$	$\mathbb{R}$	$+$	$-$	$-$	$M_A = \{-1\}$, $M_B = \{-1, 2\}$

Равносильность уравнений

Теорема 4. Если $P = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, то

$$\frac{f}{g} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f = 0, \\ g \neq 0. \end{cases}$$

Используется при решении дробных алгебраических (рациональных) уравнений.

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$x+3=2$	$\frac{x+3}{x^2+1}=\frac{2}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$				
$x+3=2$	$\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-1}$	$\mathbb{R}$				
$x+3=2$	$\frac{x+3}{x^2-4}=\frac{2}{x^2-4}$	$\mathbb{R}$				

Равносильность уравнений

A	B	M	$A \Rightarrow B$ над M	$A \Leftarrow B$ над M	$A \Leftrightarrow B$ над M	Комментарий
$x + 3 = 2$	$\frac{x+3}{x^2+1} = \frac{2}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	+	+	+	$M_A = \{-1\}$, $M_B = \{-1\}$
$x + 3 = 2$	$\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$	$\mathbb{R}$	−	+	−	$M_A = \{-1\}$, $M_B = \emptyset$
$x + 3 = 2$	$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{2}{x^2-4}$	$\mathbb{R}$	+	+	+	$M_A = \{-1\}$, $M_B = \{-1\}$

Равносильность уравнений

Теорема 5. Если $P = \mathbb{R}$, то

(1) $f = g \Leftrightarrow f^{2k+1} = g^{2k+1}, k \in \mathbb{N}$.

(2) $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} fg \geq 0, \\ f^{2k} = g^{2k}, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(3) $\sqrt[2k]{f} = g \Leftrightarrow \begin{cases} g \geq 0, \\ f = g^{2k}, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(4) $a^f = a^g \Leftrightarrow f = g, a > 0, a \neq 1$.

(5) $\log_a f = \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases} f > 0, \\ f = g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g > 0, \\ f = g. \end{cases}$

(6) $f = g \Rightarrow \sin f = \sin g$.

(7) $f = g \Rightarrow \cos f = \cos g$.

(1)-(3) используются при решении иррациональных уравнений,

(4)-(5) – показательных и логарифмических уравнений,

(6)-(7) – уравнений, содержащих обратные тригонометрические выражения.

Стандартные приёмы решения целых алгебраических уравнений: поиск рациональных корней

Теорема о целых корнях. *Всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена*.

Теорема о рациональных корнях. *Если число* $c = \frac{p}{q}$*, где дробь* $\frac{p}{q}$ *несократима, является корнем члена многочлена с целыми коэффициентами, то p – делитель свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента этого многочлена*.

Следствие. *Корни многочлена с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом* 1 *либо целые, либо иррациональные.*

Стандартные приёмы решения целых алгебраических уравнений: разложение на множители

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена* f *на двучлен* $x - c$ *равен* $f(c)$ *– значению* f *при* $x = c$.

Следствие 1. *Многочлен* f *делится на* $x - c$ *тогда и только тогда, когда число с является корнем* f.

Это утверждение о выделении линейного множителя из многочлена.

Следствие 2. *Многочлен степени* n *имеет не более* n *корней.*

Следствие 3. *Если значения двух многочленов, степень которых не больше* n, *совпадают при* $n + 1$ *значении переменной, то эти многочлены равны.*

Стандартные приёмы решения целых алгебраических уравнений: разложение на множители

Теорема. Над полем действительных чисел неприводимыми (неразложимыми) являются только двучлены первой степени и трёхчлены с мнимыми корнями.

Следствие. Всякий многочлен с действительными коэффициентами нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

Уравнения с параметрами

Решить уравнение с параметрами – это значит для каждого допустимого набора значений параметров определить множество всех решений получающегося уравнения с переменными (без параметров).

Уравнения с параметрами

Задача. Решить уравнение:

$$\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2.$$

Решить уравнение: $\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2.$

Уравнения с параметрами

Р е ш е н и е. Перенесём все члены в левую часть и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2;$$

$$\frac{x^2-a^2+x^2-b^2-2(x^2-(a+b)x+ab)}{(x-a)(x-b)}=0;$$

$$\frac{2(a+b)x+2ab-a^2-b^2}{(x-a)(x-b)}=0;$$

$$\frac{2(a+b)x-(a+b)^2}{(x-a)(x-b)}=0;$$

Уравнения с параметрами

В числителе дроби – линейное уравнение:

$$\begin{cases} 2(a+b)x - (a+b)^2 = 0, \\ (x-a)(x-b) \neq 0; \end{cases}$$

1) Линейное уравнение может иметь бесконечно много решений; все они, кроме нулей знаменателя, будут решениями системы:

$$\begin{cases} 2(a+b) = 0, \\ (a+b)^2 = 0, \\ (x-a)(x-b) \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b = 0, \\ x \neq a, \\ x \neq b; \end{cases}$$

Уравнения с параметрами

В числителе дроби – линейное уравнение:

$$\begin{cases} 2(a+b)x-(a+b)^2=0, \\ (x-a)(x-b)\neq 0; \end{cases}$$

2) Линейное уравнение может иметь единственное решение; оно может быть или не быть нулём знаменателя:

$$\begin{cases} a+b\neq 0, \\ x=\frac{a+b}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} \left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)=0 \\ \left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)\neq 0; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b\neq 0, \\ x\in\emptyset, \\ a=b; \end{cases} \\ \begin{cases} a+b\neq 0, \\ x=\frac{a+b}{2}, \\ a\neq b; \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнения с параметрами

В числителе дроби – линейное уравнение:

$$\begin{cases} 2(a+b)x-(a+b)^2=0, \\ (x-a)(x-b)\neq 0; \end{cases}$$

3) Линейное уравнение может не иметь решений при условии

$$\begin{cases} 2(a+b)=0, \\ (a+b)^2\neq 0. \end{cases}$$

Система не имеет решений, так что этот случай невозможен.

Ответ: если $a+b=0$, то $\mathbb{R}\backslash\{a,b\}$;

если $a+b\neq 0$ и $a=b$, то $\emptyset$;

если $a+b\neq 0$ и $a\neq b$, то $\left\{\frac{a+b}{2}\right\}$.

Уравнения с параметрами

Задача. Решить уравнение:

(1) $a^2x = a(x+2) - 2$;

(2) $x - \frac{2}{a^3} = \frac{1}{a^2}(4x+1)$;

(3) $a(a+1)x^2 + x - a(a-1) = 0$;

(4) $ax^2 - (a-b)x - b = 0$;

(5) $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0$.

Уравнения с параметрами

Р е ш е н и е. Решить уравнение:

(1) $a^2x = a(x+2) - 2$;

Ответ: если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то $\left\{\frac{2}{a}\right\}$;

если $a = 1$, то $\mathbb{R}$;

если $a = 0$, то $\emptyset$.

Уравнения с параметрами

Р е ш е н и е . Решить уравнение:

(2) $x - \frac{2}{a^3} = \frac{1}{a^2}(4x + 1)$;

Ответ: если $a \neq -2$ и $a \neq 2$, то $\left\{\frac{1}{a(a-2)}\right\}$;

если $a = -2$, то $\mathbb{R}$;

если $a = 2$, то $\emptyset$.

Уравнения с параметрами

Р е ш е н и е. Решить уравнение:

(3) $a(a+1)x^2 + x - a(a-1) = 0$;

Ответ: если $a \neq 0$ и $a \neq -1$, то $\left\{\frac{a-1}{a}, -\frac{a}{a+1}\right\}$;

если $a = -1$, то $\{2\}$;

если $a = 0$, то $\{0\}$.

Уравнения с параметрами

Р е ш е н и е . Решить уравнение:

(4) $ax^2 - (a - b)x - b = 0$;

Ответ: если $a \neq 0$, то $\left\{-\frac{b}{a}, 1\right\}$;

если $a = b = 0$, то $\mathbb{R}$;

если $a = 0$ и $b \neq 0$, то $\{1\}$.

Уравнения с параметрами

Р е ш е н и е . Решить уравнение:

(5) $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0.$

Ответ: если $a^2 \neq b^2$, то $\left\{\frac{1}{a-b}, \frac{1}{a+b}\right\}$;

если $a^2 = b^2 \neq 0$ и $a \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{2a}\right\}$;

если $a = b = 0$, то $\emptyset$.

Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1aFGl5k2n4_55FsX1TwerbwA4azypcOuA2LgVhi-VxpI/edit?usp=sharing

Для самостоятельного решения

Задание 1. Выберите все квадратные трёхчлены, имеющие различные положительные корни:

(1) $2x^2 - 5x + 2\sqrt{2} = 0.$

(2) $2x^2 + 11x + 15 = 0.$

(3) $5x^2 - 9x - 2 = 0.$

(4) $4x^2 - 4x + 1 = 0.$

(5) $2x^2 - 5\sqrt{2}x + 10 = 0.$

(6) $x^2 - 12x + 35 = 0.$

Для самостоятельного решения

З а д а н и е 2. Укажите все пары равносильных уравнений над $\mathbb{R}$.

(1) $3x+1=2x+4$ и $3x+1+\frac{1}{x-1}=2x+4+\frac{1}{x-1}$.

(2) $3x+1=2x+4$ и $3x+1+\frac{1}{x-3}=2x+4+\frac{1}{x-3}$.

(3) $3x+1=2x+4$ и $3x+1+\sqrt{x^2+2}=2x+4+\sqrt{x^2+2}$.

(4) $3x+1=2x+4$ и $3x+1+\lg(1-x)=2x+4+\lg(1-x)$.

Для самостоятельного решения

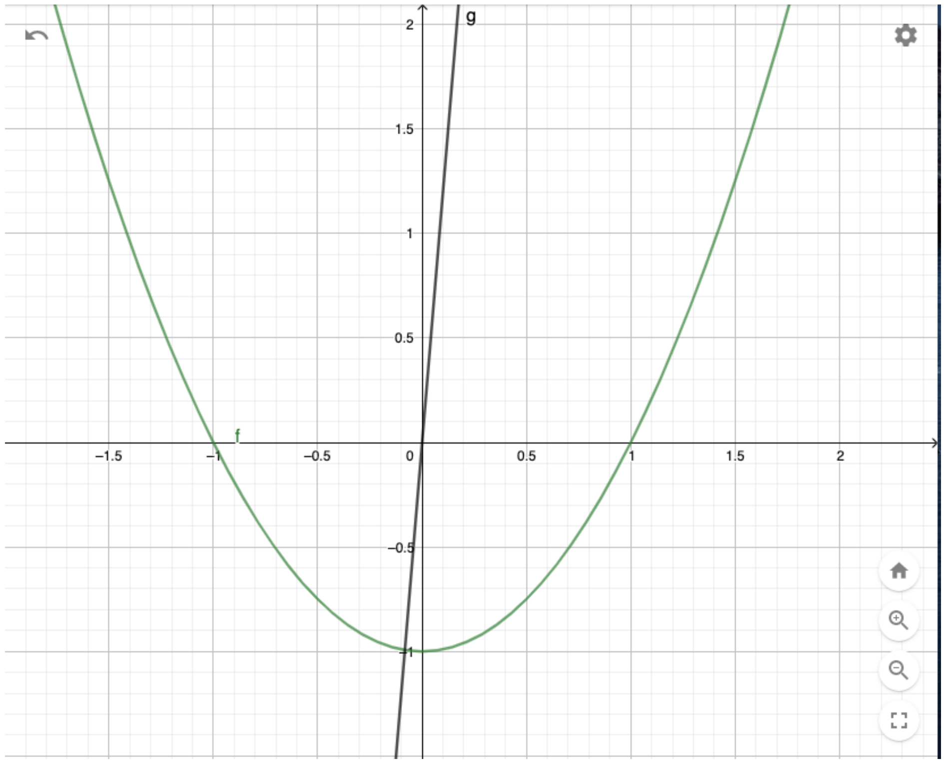
Задание 3. Сколько корней не может иметь уравнение $f = g$, где $f = x^2 - 1, g = kx \ (k \in \mathbb{R})$? Укажите все подходящие ответы.

(1) 0.

(2) 1.

(3) 2.

(4) 3.



Для самостоятельного решения

Задание 4. Многочлен

$$f = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$$

имеет корни a и b.

Запишите через запятую строку коэффициентов многочлена с целыми коэффициентами в стандартном виде (по убыванию степеней), имеющего корни $-\frac{a}{2}$ и $-\frac{b}{2}$.

Для самостоятельного решения

Задание 5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых больший корень уравнения

$$x^2 - (6a - 1)x + 9a^2 - 3a = 0$$

в 9 раз больше, чем его меньший корень.

Литература

- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.
- Популярные лекции по математике. https://math.ru/lib/ser/plm
- Дорофеев Г.В. Квадратный трёхчлен в задачах. Львов: Квантор, 1991. 104 с.

КОНЕЦ СЕМИНАРА