Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Многочлены и алгебраические уравнения

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Многочлены и алгебраические уравнения

ПЛАН

- Азбука квадратного трёхчлена:
  - знаки корней квадратного трёхчлена;
  - сравнение корней квадратного трёхчлена с другими числами.
- Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ.
- Исследовательские работы для учащихся:
  - формула Тейлора;
  - кратные корни.

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Знаки корней квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c = 0$

0) два различных корня:

$$D > 0.$$

1) два корня разных знаков:

$$ac < 0.$$

2) два различных корня одного знака:

$$ac > 0.$$

3) два различных положительных корня:

$$ac > 0 \text{ и } ab < 0.$$

4) два различных отрицательных корня:

$$ac > 0 \text{ и } ab > 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Знаки корней квадратного трёхчлена

З а д а ч а . Доказать, что корни квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ действительны и положительны тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$D = p^2 - 4q \geq 0, p < 0, q > 0.$$

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена.

$\Rightarrow$.

(1) Так как $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то $x_1 + x_2 > 0$ и $x_1 x_2 > 0$ и в силу формул Виета $p < 0, q > 0$.

(2) Так как x_1 и x_2 – действительные числа, то $D = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

$\Leftarrow$.

(1) Если $D \geq 0$, то x_1 и x_2 – действительные числа.

(2) По формулам Виета

$$-p = x_1 + x_2 > 0 \text{ и } q = x_1 x_2 > 0,$$

то есть x_1 и x_2 – одного знака (следует из из второго неравенства) и оба положительны (из первого неравенства).

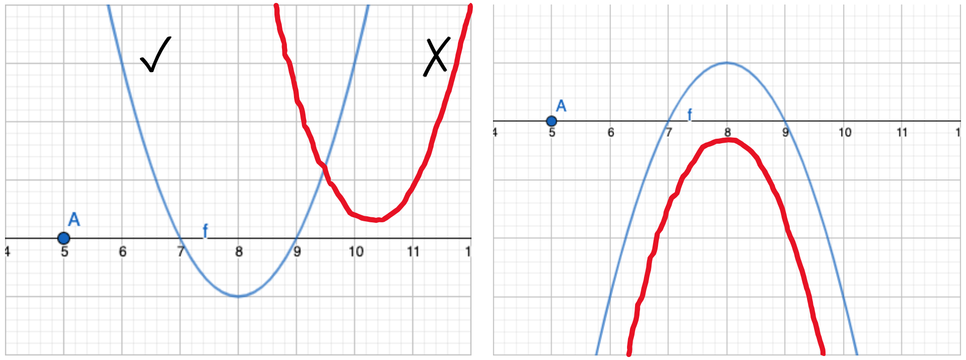
Сравнение корней квадратного трёхчлена с другими числами

$$f = ax^2 + bx + c$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

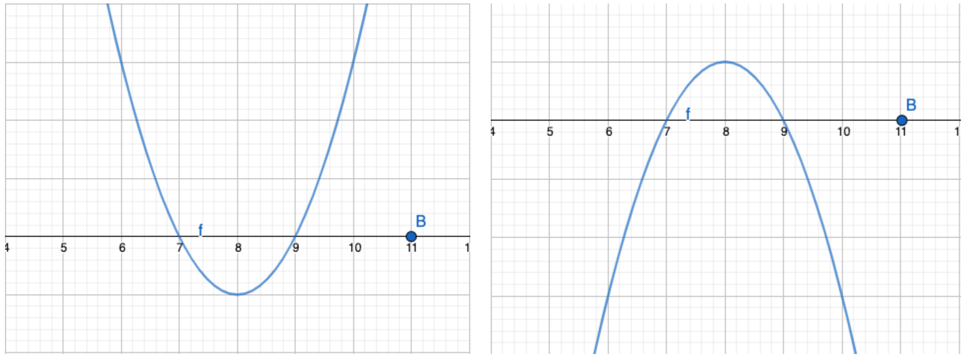
1) оба корня больше данного числа $(A < x_1 < x_2)$:

$$D > 0, af(A) > 0, x_0 > A;$$



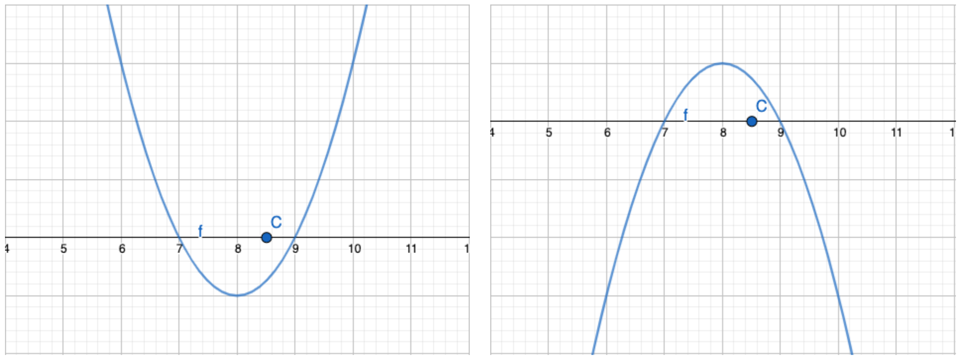
2) оба корня меньше данного числа $(x_1 < x_2 < B)$:

$$D > 0, af(B) > 0, x_0 < B;$$



3) один из корней больше, а другой меньше данного числа $(x_1 < C < x_2)$:

$$af(C) < 0;$$



4) корни находятся «между тремя полицейскими» $(A < x_1 < C < x_2 < B)$:

$$af(A) > 0, af(B) > 0, af(C) < 0.$$

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ:
сравнение корней квадратного трёхчлена с другими числами

Задача. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение

$$(k-4)x^2-3kx+k-2=0$$

имеет два корня разных знаков.

Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение

$$(k-4)x^2-3kx+k-2=0$$

имеет два корня разных знаков.

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ: сравнение корней квадратного трёхчлена с другими числами

Решение. I способ.

1) В левой части уравнения – квадратный трёхчлен:

$$k - 4 \neq 0.$$

2) Один из корней больше нуля, а второй меньше $(af(0) < 0)$:

$$(k-4)[(k-4)\cdot 0^2 - 3k\cdot 0 + k - 2] < 0,$$
$$(k-4)(k-2) < 0.$$

Решив неравенство, получаем ответ: $(2; 4)$.

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ:
сравнение корней квадратного трёхчлена с другими числами

Р е ш е н и е. II способ.

1) В левой части уравнения – квадратный трёхчлен:

$$k-4\neq 0.$$

2) Корни квадратного трёхчлена имеют разные знаки $(ac<0)$:

$$(k-4)(k-2)<0.$$

Решив неравенство, получаем ответ: $(2;4)$.

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ:
сравнение корней квадратного трёхчлена с другими числами

Задача. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - (4k+3)x + 3k + 4 = 0$$

имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 5.

Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - (4k + 3)x + 3k + 4 = 0$$

имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 5.

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ:
сравнение корней квадратного трёхчлена с другими числами

Решение.

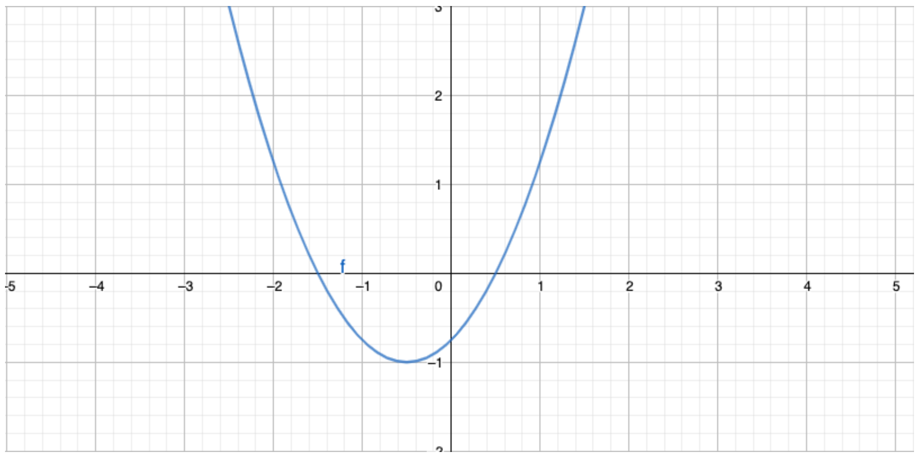
Пусть $x_1 < x_2$ — корни разных знаков, модуль каждого из которых меньше 5, то есть

$$-5 < x_1 < 0 < x_2 < 5.$$

Так как старший коэффициент квадратного трёхчлена равен 1, это условие можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} f(-5) > 0, \\ f(0) < 0, \\ f(5) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 23k + 44 > 0, \\ 3k + 4 < 0, \\ 14 - 17k > 0, \end{cases}$$

откуда получаем ответ: $-\frac{44}{23} < k < -\frac{4}{3}$.



Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ:
сравнение корней квадратного трёхчлена с другими числами

Задача. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых неравенство

$$x^2 + kx + k^2 + 6k < 0$$

выполняется для любого x из интервала $(0, 4)$.

Найдите все значения параметра k, при каждом из которых неравенство

$$x^2 + kx + k^2 + 6k < 0$$

выполняется для любого x из интервала (0, 4).

Квадратный трёхчлен в задачах ЕГЭ:
сравнение корней квадратного трёхчлена с другими числами

Решение.

Условие задачи выполнено, если

$$x_1 \le 0 < 4 \le x_2,$$

то есть

$$x_1 \le 0 \le x_2 \text{ и } x_1 \le 4 \le x_2.$$

Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} k^2 + 6k \le 0, \\ k^2 + 10k + 16 \le 0, \end{cases} \begin{cases} k(k+6) \le 0, \\ (k+2)(k+8) \le 0. \end{cases}$$

Ответ: $-6 \le k \le -2$.

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Шаг 1. Постановка задачи.

Задача 1. Имеет ли многочлен

$$f = 123x^3 + 456x^2 + 78x + 90$$

положительные корни?

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Решение. Данный многочлен имеет положительные коэффициенты, поэтому при подстановке в него положительных чисел получаются положительные числа. Следовательно, он не имеет положительных корней.

Как можно обобщить сделанный вывод?

- ✓ Если многочлен имеет только положительные коэффициенты, то он не имеет положительных корней. (Верно)
- ✓ Если многочлен имеет только неотрицательные коэффициенты, то он не имеет положительных корней. (Неверно)
- ✓ Если ненулевой многочлен имеет неотрицательные коэффициенты, то он не имеет положительных корней. (Верно)
- ✓ Многочлен с положительными коэффициентами имеет отрицательные корни. (Неверно)
- ✓ Ненулевой многочлен с неотрицательными коэффициентами имеет отрицательные или равные нулю корни. (Неверно)
- ✓ Если ненулевой многочлен с неотрицательными коэффициентами имеет корни, то они отрицательные или равны нулю. (Верно)

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Шаг 2. «Окрестность» задачи.

Задача осложняется, если корни многочлена требуется сравнить не с нулём, а с некоторым другим числом.

Задача 2. Имеет ли многочлен

$$f = 3x^3 - 12x^2 + 16x - 16$$

корни меньше 3?

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Шаг 3. Ознакомление со способом решения задачи.

Решение. Во многих случаях такие задачи можно решить с помощью *расширенной* схемы Горнера. Формально составим таблицу:

	3	-12	16	-16
3	3	-3	7	5
3	3	6	25	
3	3	15		
3	3			

Вывод. Так как многочлен $p = 3x^3 + 15x^2 + 25x + 5$ не имеет положительных корней, то корни исходного многочлена, если они существуют, меньше 3.

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Ш а г 4. Восполнение пропусков в рассуждении.

В этой таблице:

первая и вторая строки – схема Горнера для $f = 3x^3 - 12x^2 + 16x - 16$ и числа 3,

вторая и третья – для частного $g = 3x^2 - 3x + 7$ и того же числа 3,

третья и четвёртая – для следующего частного $h = 3x + 6$,

четвёртая и пятая – для последнего частного $k = 3$.

Получающиеся остатки дальше не используются, поэтому таблица получается «усечённой».

	3	-12	16	-16
3	3	-3	7	5
3	3	6	25	
3	3	15		
3	3			

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Коэффициенты многочлена $p = 3x^3 + 15x^2 + 25x + 5$ являются остатками по диагонали таблицы, взятыми «снизу вверх».

Почему же такие вычисления приводят к нужному результату?

	3	-12	16	-16
3	3	-3	7	5
3	3	6	25	
3	3	15		
3	3			

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Распишем вычисления в схеме:

$$f = (x-3)g + 5 =$$

$$= (x-3)[(x-3)h + 25] + 5 =$$

$$= (x-3)[(x-3)\{(x-3)k + 15\} + 25] + 5 =$$

$$= (x-3)[(x-3)\{(x-3)\cdot 3 + 15\} + 25] + 5 =$$

$$= (x-3)^2\{(x-3)\cdot 3 + 15\} + 25(x-3) + 5 =$$

$$= 3(x-3)^3 + 15(x-3)^2 + 25(x-3) + 5.$$

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Мы получили «диагональный» многочлен от $(x-3)$:

$$f = 3(x-3)^3 + 15(x-3)^2 + 25(x-3) + 5.$$

Теперь становится понятно, почему f не имеет корней больших 3: при $x > 3$ его значения положительны.

Для решения задачи мы разложили многочлен f по степеням двучлена $x-3$.

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Шаг 4. Что мы получили?

Такое разложение называется *формулой Тейлора*, по имени английского математика XIX в. Эта формула широко используется в математике.

Таким образом, мы получили алгоритм разложения произвольного многочлена f по степеням двучлена $x - c$ *элементарными средствами*.

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Задача 2. Представьте многочлен f в виде многочлена от $x - c$:

а) $f = x^2 - 5x + 7, c = 1;$

б) $f = x^2 + x - 3, c = 2;$

в) $f = x^3 + 3x - 2, c = -1;$

г) $f = x^3 + 2x^2 + x - 1, c = 1;$

д) $f = x^5, c = 1;$

е) $f = x^6, c = -1.$

$$f = x^3 + 3x - 2, c = -1$$

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Ответы:

а) $f = x^2 - 5x + 7, c = 1;$ $f = (x-1)^2 - 3(x-1) + 3;$

б) $f = x^2 + x - 3, c = 2;$ $f = (x-2)^2 + 5(x-2) + 3;$

в) $f = x^3 + 3x - 2, c = -1;$ $f = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 6(x+1) - 6;$

г) $f = x^3 + 2x^2 + x - 1, c = 1;$ $f = (x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 8(x-1) + 3;$

д) $f = x^5, c = 1;$ $f = (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1;$

е) $f = x^6, c = -1;$ $f = (x+1)^6 - 6(x+1)^5 + 15(x+1)^4 - 20(x+1)^3 + 15(x+1)^2 - 6(x+1) + 1.$

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Задача 3. Докажите, что данные многочлены не имеют корней, больших $\frac{3}{2}$:

а) $3x^3 - 6x^2 + 4x - 2$;

б) $3x^5 - 12x^2 + 8x - 4$.

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Решение.

а) $f = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 2$;

$$8f = 24\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + 60\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 50\left(x - \frac{3}{2}\right) + 5.$$

При $x > \frac{3}{2}$ выполняется неравенство $f > 0$, так что f не имеет корней, больших $\frac{3}{2}$.

	3	-6	4	-2
$\frac{3}{2}$	3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{3}{2}$	3	$\frac{6}{2}$	$\frac{25}{4}$	
$\frac{3}{2}$	3	$\frac{15}{2}$		
$\frac{3}{2}$	3			

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Решение.

б) $3x^5 - 12x^2 + 8x - 4$.

В закрашенных ячейках стоят положительные числа, поэтому все коэффициенты в разложении f по степеням $x - \frac{3}{2}$ положительные, и, следовательно, f не имеет корней, больших $\frac{3}{2}$.

	3	0	0	-12	8	-4
$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{4}$	$-\frac{15}{8}$	$\frac{83}{16}$	$\frac{121}{32}$
$\frac{3}{2}$	3	9	$\frac{81}{4}$	$\frac{57}{2}$	$\frac{767}{16}$	
$\frac{3}{2}$	3	$\frac{27}{2}$	$\frac{81}{2}$	$\frac{357}{4}$		
$\frac{3}{2}$	3	18	$\frac{135}{2}$			
$\frac{3}{2}$	3	$\frac{45}{2}$				
$\frac{3}{2}$	3					

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

З а д а ч а. Докажите, что корни уравнения

$$x^3 - 5x^2 - 5x + 20$$

удовлетворяют неравенствам $-3 < x < 6$.

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Р е ш е н и е. Обозначим многочлен $x^3 - 5x^2 - 5x + 20$ через f.
(1) Пусть f имеет корень $c \le -3$. Положим $d = -c$, и по предположению $d \ge 3$. Тогда $f(-d) = 0$, поэтому d – корень уравнения

$$-x^3 - 5x^2 + 5x + 20 = 0,$$

то есть корень многочлена

$$g = x^3 + 5x^2 - 5x - 20 = (x-3)^3 + 14(x-3)^2 + 52(x-3) + 37,$$

который не имеет корней, больших или равных 3. Следовательно,

$$d < 3, \text{ откуда } c > -3.$$

(2) Аналогично,

$$f = x^3 - 5x^2 - 5x + 20 = (x-6)^3 + 13(x-6)^2 + 43(x-6) + 26,$$

откуда следует, что f не имеет корней, больших 6.

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

З а д а ч а. Найти критерий того, что корни квадратного трёхчлена x^2+px+q действительны и удовлетворяют неравенствам $\alpha < x_1 < \beta, \alpha < x_2 < \beta$.

Р е ш е н и е. Разложим данный трёхчлен по степеням $x-\beta$:

	1	p	q
β	1	$\beta+p$	$\beta^2+\beta p+q$
β	1	$2\beta+p$	
β	1		

$$f = x^2+px+q = (x-\beta)^2+(2\beta+p\,)(x-\beta)+(\beta^2+\beta p+q).$$

Следовательно, корни f действительны и меньше β тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$D = p^2-4q \geq 0, \beta^2+\beta p+q = f(\beta) > 0, 2\beta+p > 0.$$

Исследовательские работы для учащихся: формула Тейлора

Аналогично, рассмотрим трёхчлен $g = x^2 - px + q$, имеющий корень $-\alpha$, и разложим его по степеням $x + \alpha$:

	1	$-p$	q
$-\alpha$	1	$-\alpha - p$	$\alpha^2 + \alpha p + q$
$-\alpha$	1	$-2\alpha - p$	
$-\alpha$	1		

$$g = x^2 - px + q = (x + \alpha)^2 + (-2\alpha - p\ )(x + \alpha) + (\alpha^2 + \alpha p + q).$$

Следовательно, корни f действительны и меньше α тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$D = p^2 - 4q \geq 0, \alpha^2 + \alpha p + q = f(\alpha) > 0, -2\alpha - p > 0.$$

Вывод. Корни квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ действительны и удовлетворяют неравенствам $\alpha < x_1 < \beta, \alpha < x_2 < \beta$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$D = p^2 - 4q \geq 0, f(\alpha) > 0, f(\beta) > 0, -2\beta < p < -2\alpha.$$

Исследовательские работы для учащихся: кратные корни

На экзамене по алгебре студента просят дать определение корня многочлена кратности два. Студент, подумав, отвечает:
— Значит так, если подставить число в многочлен и в результате получится ноль, а затем снова подставить это число, и снова получится ноль, а вот если в третий раз подставить то же самое число и ноль не получится, то это и будет корень кратности два.

Источник: https://www.alexlarin.com/viewtopic.php?f=10&t=8554

Исследовательские работы для учащихся: кратные корни

Задача. Докажите, что если выполнены равенства

$$c^2 + a_1 c + a_2 = 0 \text{ и } 2c + a_1 = 0,$$

то

$$x^2 + a_1 x + a_2 = (x - c)^2.$$

Докажите, что если выполнены равенства
$c^2 + a_1c + a_2 = 0$ и $2c + a_1 = 0$, то $x^2 + a_1x + a_2 = (x - c)^2$.

Исследовательские работы для учащихся: кратные корни

Р е ш е н и е. Утверждение следует из схемы Горнера:

$$x^2 + a_1x + a_2 = (x-c)^2 + (2c + a_1)(x-c) + (c^2 + a_1c + a_2).$$

	1	a_1	a_2
c	1	$c + a_1$	$c^2 + a_1c + a_2$
c	1	$2c + a_1$	
c	1		

Исследовательские работы для учащихся: кратные корни

Задача. Докажите, что если выполнены равенства

$c^4 + a_1c^3 + a_2c^2 + a_3c + a_4 = 0$ и $4c^3 + 3a_1c^2 + 2a_2c + a_3 = 0$,

то

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \text{ делится на } (x - c)^2.$$

Исследовательские работы для учащихся: кратные корни

Решение. В разложении многочлена по степеням $x - c$ свободный член и коэффициент при $x - c$ равны нулю:

	1	a_1	a_2	a_3	a_4
c	1	$c + a_1$	$c^2 + a_1c + a_2$	$c^3 + a_1c^2 + a_2c + a_3$	$c^4 + a_1c^3 + a_2c^2 + a_3c + a_4$
c	1	$2c + a_1$	$3c^2 + 2a_1c + a_2$	$4c^3 + 3a_1c^2 + 2a_2c + a_3$	
c	1	$3c + a_1$	$6c^2 + 3a_1c + a_2$		
c	1	$4c + a_1$			
c	1				

Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1G35Ci5_UFMhpDvTJ35Fehtoa-a9ws2nuaw_NZMnv8z8/edit?usp=sharing

Для самостоятельного решения

Задание 1. Выберите все квадратные трёхчлены, у которых один из корней больше, а другой меньше 4:

(1) $2x^2 - 9x + 2\sqrt{2} = 0$.

(2) $x^2 + 11x - 60 = 0$.

(3) $5x^2 - 9x - 2 = 0$.

(4) $3x^2 - 12x - 1 = 0$.

Для самостоятельного решения

Задание 2. Какие из многочленов имеют корень 1 кратности 2?

(1) $x^3 - 16x^2 + 29x - 14$.

(2) $x^3 - x^2 - x + 1$.

(3) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

(4) $x^3 - 18x^2 + 18x - 1$.

Для самостоятельного решения

Задание 3. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству

$$x^2 - 18x + 70 < 14?$$

(1) Бесконечно много.

(2) 0.

(3) 9.

(4) 11.

Для самостоятельного решения

Задание 4. Выпишите коэффициенты (по убыванию степеней) в разложении многочлена

$$f = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

по степеням двучлена $x - 2$. Числа запишите в строку, разделяя пробелом.

Для самостоятельного решения

Задание 5. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение

$$x^2 - (3k - 7)x + k - 4 = 0$$

имеет два корня разных знаков и модуль каждого из корней меньше 2.

Литература

- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.
- Шестаков С.А. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В.Ященко. М., 2018. 288 с.
- Дорофеев Г.В., Пчелинцев С.В. Многочлены с одной переменной: кн. для учащихся. М.: Просвещение, 2001. 144 с.
- Дорофеев Г.В. Квадратный трёхчлен в задачах. Львов: Квантор, 1991. 104 с.

КОНЕЦ СЕМИНАРА