

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Элементарная алгебра: введение

*Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики*

Элементарная математика: введение

ПЛАН

- Бинарные операции и их свойства.
- Изоморфизм.
- Основные множества в элементарной алгебре.

Перейти к материалам курса «Элементарная математика (алгебра)» можно по ссылке

<https://el.mpgu.su/course/view.php?id=7931>

Все учебные материалы доступны на сайте: <http://emmom.ru>

Бинарные операции

Задание 1.

Построить таблицы для множеств из 4 элементов с заданной бинарной операцией:

(а) $\{0, 1, 2, 3\}$, сложение по модулю 4 (арифметика остатков);

(б) $\{I, Q, H, T\}$, повороты квадрата вокруг центра симметрии по часовой стрелке на углы $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$;

(в) $\{e, f, g, h\}$, где $e(x) = x$, $f(x) = 1/x$, $g(x) = -x$, $h(x) = -1/x$, композиция функций;

(г) $\{1, 2, 4, 3\}$, умножение по модулю 5 (арифметика остатков).

Что общего и что различного вы заметили?

Бинарные операции

$+$ mod 4	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

	I	Q	H	T
I	I	Q	H	T
Q	Q	H	T	I
H	H	T	I	Q
T	T	I	Q	H

	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	h	e	f
h	h	g	f	e

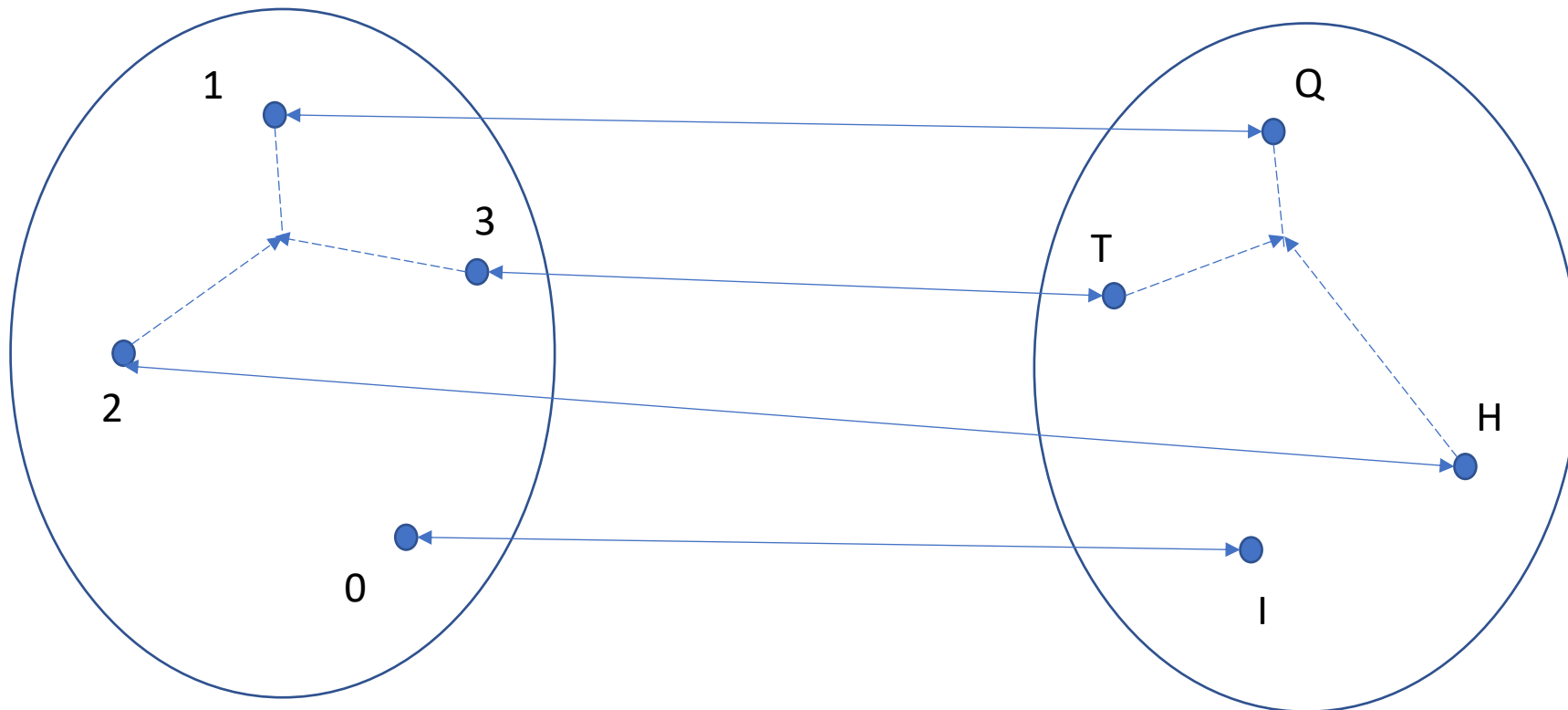
\times mod 4	1	2	4	3
1	1	2	4	3
2	2	4	3	1
4	4	3	1	2
3	3	1	2	4

Изоморфизм

В задании 1 можно установить соответствие между элементами первой и второй таблиц; бинарная операция сохраняется:

$$2 + 3 = 1$$

$$HT = Q$$



Изоморфизм

Две алгебраические структуры (S, \circ) и $(T, *)$ изоморфны, если существует биективное отображение φ множества S на множество T , обладающее свойством:

$$(\forall x, y \in S) \varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y).$$

Задание 2. Установить изоморфизм структур в задании 1 (а) и (б).

Изоморфизм

Задание 3. Для структур в задании 1 (а) и (б) установлено соответствие:

$$\varphi(0) = Q, \quad \varphi(1) = H, \quad \varphi(2) = T, \quad \varphi(3) = I.$$

Верно ли, что при этом отображении выполняется свойство сохранения операции

$$(\forall x, y \in S) \varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)?$$

Можно ли утверждать, что структуры не изоморфны?

Изоморфизм

Задание 4. Установить изоморфизм структур:

Множество

\mathbb{R}^+

\mathbb{R}

Бинарная операция

Умножение

Сложение

Соответствие множеств

x



$\ln x$

Сохранение операции

x



$\ln x$

y



$\ln y$

$x \cdot y$



$\ln x + \ln y$

Числовой пример

$$3 \cdot 4 = 12$$

$$0,4771 + 0,6229 = 1,1050$$

Изоморфизм структур

Задание 5. Изоморфны ли структуры:

Множество	\mathbb{R}^+		\mathbb{R}
Бинарная операция	Модуль суммы		Сумма модулей
Соответствие множеств	x	\longleftrightarrow	x
Соответствие операций	x	\longleftrightarrow	x
	y	\longleftrightarrow	y
	$ x + y $	\longleftrightarrow	$ x + y $

Основные множества в элементарной алгебре

- Ассоциативное и коммутативное полукольцо с единицей натуральных чисел $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$.
- Ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей целых чисел $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
- Поле рациональных чисел $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.
- Поле действительных чисел $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- Множество многочленов относительно введенных операций сложения и умножения представляет собой ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей.
- Поле рациональных функций (алгебраических дробей).

Основные множества в элементарной алгебре

В элементарной алгебре рассматриваются действия вычитания и деления, которые также называют алгебраическими операциями.

В множестве A , в котором определена операция сложения, выполняется операция вычитания, если для всякой пары элементов a, b из A существует единственный элемент c такой, что $b + c = a$. Элемент c называют разностью элементов a и b :

$$c = a - b.$$

В множестве A , в котором определена операция умножения, выполняется операция деления, если для всякой пары элементов a, b из A существует единственный элемент c такой, что $bc = a$. Элемент c называют частным элементов a и b :

$$c = a : b \text{ или } c = a / b .$$

Основные множества в элементарной алгебре

Определение. Отображение n -й декартовой степени множества \mathfrak{A} в само множество \mathfrak{A}

$$\omega: \mathfrak{A}^n \rightarrow \mathfrak{A}$$

называется n -арной алгебраической операцией.

Другими словами, алгебраической операцией на множестве \mathfrak{A} называют отображение, при котором каждому кортежу из n элементов соответствует единственный $(n + 1)$ -й элемент из того же множества.

Примеры бинарных операций:

- сложение, вычитание, умножение на множестве действительных чисел,
- деление на множестве действительных чисел без нуля,
- сложение, вычитание и умножение на множестве многочленов и пр.

Основные множества в элементарной алгебре

Определение. Отображение n -й декартовой степени множества \mathfrak{A} в само множество \mathfrak{A}

$$\omega: \mathfrak{A}^n \rightarrow \mathfrak{A},$$

где при некоторых a_k значение $\omega(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$ может не существовать, называется частичной n -арной алгебраической операцией.

В этом случае говорят, что значение $\omega(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$ не определено. Совокупность точек, в которых заданная частичная операция определена, называют областью определённости ω .

Примеры :

- Вычитание на множестве натуральных чисел не всегда возможно, область определённости операции вычитания на \mathbb{N} состоит из пар вида (a, b) , где $a \geq b$.
- Деление является частичной операцией на множестве \mathbb{N} и на множестве \mathbb{R} ,

область определённости операции деления на \mathbb{R} состоит из пар вида (a, b) , где $b \neq 0$.

область определённости операции деления на \mathbb{N} состоит из пар вида (a, b) , где $b \geq 0$ и число a кратно числу b .

Свойства бинарных операций

1. Множество G замкнуто относительно операции $*$:

$$(\forall a, b \in G) \exists! c \in G: a * b = c.$$

2. Операция $*$ ассоциативна:

$$(\forall a, b, c \in G) a * (b * c) = (a * b) * c.$$

3. Существует нейтральный элемент:

$$(\forall a \in G) a * e = e * a = a.$$

4. Существует обратный элемент:

$$(\forall a \in G) \exists a' \in G: a * a' = a' * a = e.$$

5. Операция $*$ коммутативна:

$$(\forall a, b \in G) a * b = b * a.$$

6. Операция \circ дистрибутивна относительно $*$:

$$(\forall a, b, c \in G) a \circ (b * c) = (a * b) \circ (a * c), (b * c) \circ a = (b * a) \circ (c * a)$$

Свойства бинарных операций

Задание 6. В элементарной алгебре доказывается тождество:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Запишите полный вывод этой формулы.

Свойства бинарных операций

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$= a(a + b) + b(a + b)$$

$$= (a^2 + ab) + (ba + b^2)$$

$$= (a^2 + ab) + (ab + b^2)$$

$$= ((a^2 + ab) + ab) + b^2$$

$$= (a^2 + (ab + ab)) + b^2$$

$$= (a^2 + (1 + 1)ab) + b^2$$

$$= (a^2 + 2ab) + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2.$$

определение степени

дистрибутивность

дистрибутивность

коммутативность умножения

ассоциативность сложения

ассоциативность сложения

дистрибутивность

соглашение о скобках

Свойства бинарных операций

Задание 7. Какие из следующих свойств выполняются для всех действительных чисел a , b , и c ?

(а) $a : (b + c) = (a : b) + (a : c)$,

(б) $(b + c) : a = (b : a) + (c : a)$.

Задание 8. Существуют ли действительные числа a , b , и c , для которых выполняется равенство

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)?$$

Свойства бинарных операций

Задание 9. Доказать тождество:

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu + yv)^2 + (yu - xv)^2.$$

Задания для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1FDPxHsPt80jg3_zqoYqLkifli_jebPtKmPrxuBl09Zc/edit?usp=sharing

Задание 1. Найти сумму чисел 25 и 36 по модулю 14 (в арифметике остатков).

Задание 2. Даны многочлены $P = 3x - 1$ и $Q = 2x + 1$.

Упростить выражение

$$\frac{P^3 - Q^3}{P^2 + PQ + Q^2}$$

и записать ответ в виде многочлена от x .

Задания для самостоятельного решения

Задание 3. Пусть на множестве \mathbb{N} задана бинарная операция $*$, обозначающая действие «выберите большее из», например,

$$3 * 3 = 3, \quad 4 * 3 = 4, \quad 2 * 5 = 5.$$

Какие из утверждений верны?

- (1) Операция $*$ коммутативна
- (2) Операция $*$ ассоциативна
- (3) В \mathbb{N} существует нейтральный элемент относительно $*$

Задание 4. Пусть на множестве \mathbb{Z} задана бинарная операция $*$, обозначающая действие «выберите меньшее из», например,

$$3 * 3 = 3, \quad 4 * 3 = 3, \quad 2 * 5 = 2.$$

Какие из утверждений верны?

- (1) Операция $*$ коммутативна
- (2) Операция $*$ ассоциативна
- (3) В \mathbb{Z} существует нейтральный элемент относительно $*$

Задания для самостоятельного решения

Задание 5. Записать полный вывод с обоснованием каждого шага для формулы

$$a + b + c + d = d + c + b + a.$$

Литература

- Современные основы школьного курса математики: пособие для студентов пед. ин-тов / Н.Я. Виленкин, К.И. Дуничев, Л.А. Калужнин, А.А. Столяр. М.: Просвещение, 1980. 240 с.
- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968, 232 с.

КОНЕЦ СЕМИНАРА