Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Тождества и тождественные преобразования: практикум-1

Е.А. Седова, к.п.н.,

проф. кафедры элементарной математики

Тождества и тождественные преобразования: практикум-1

ПЛАН

- Тождество
- Тождественные преобразования:
  - Доказательство тождеств
  - Упрощение выражений

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Тождество

Задача 1. На каком множестве справедливо тождество?

(1) $x^2 - 1 = x + 1$.

(2) $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$.

(3) $\frac{(x-1)^3}{x-1} = (x - 1)^2$.

(4) $\sqrt{x^2} = x$.

(5) $\sqrt{x^2} = |x|$.

(6) $\lg x^2 = 2 \lg x$.

(7) $\lg x^2 = 2 \lg|x|$.

(8) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$.

Тождество

На каком множестве справедливо тождество?

(1) $x^2 - 1 = x + 1$ является тождеством на множестве $\{-1, 2\}$.

(2) $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ является тождеством.

(3) $\frac{(x-1)^3}{x-1} = (x - 1)^2$ является тождеством на множестве $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(4) $\sqrt{x^2} = x$ является тождеством на $[0, +\infty[$.

(5) $\sqrt{x^2} = |x|$ является тождеством.

(6) $\lg x^2 = 2 \lg x$ является тождеством на $]0, +\infty[$.

(7) $\lg x^2 = 2 \lg |x|$ является тождеством на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(8) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$ является тождеством на множестве $\left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Тождество

З а д а ч а 2. На каком множестве справедливо тождество?

(1) $\sqrt{(x+3)^2} = x + 3$.

(2) $\sqrt{(x+3)^2} = -x - 3$.

(3) $\sqrt{(x+3)^2} = |x + 3|$.

(4) $\sqrt{(x+1)(x-2)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2}$.

(5) $\sqrt{(x+1)(x-2)} = \sqrt{-x-1} \cdot \sqrt{2-x}$.

(6) $\sqrt{(x+1)(x-2)} = \sqrt{|x+1|} \cdot \sqrt{|x-2|}$.

(7) $\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{3-x}}$.

Тождество

На каком множестве справедливо тождество?

(1) $\sqrt{(x+3)^2} = x + 3.$ Ответ. $[-3, +\infty[.$

(2) $\sqrt{(x+3)^2} = -x - 3.$ Ответ. $]-\infty, -3]$

(3) $\sqrt{(x+3)^2} = |x + 3|.$ Ответ. $\mathbb{R}.$

(4) $\sqrt{(x+1)(x-2)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2}.$ Ответ. $[2, +\infty[.$

(5) $\sqrt{(x+1)(x-2)} = \sqrt{-x-1} \cdot \sqrt{2-x}.$ Ответ. $]-\infty, -1].$

(6) $\sqrt{(x+1)(x-2)} = \sqrt{|x+1|} \cdot \sqrt{|x-2|}.$ Ответ. $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[.$

(7) $\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{3-x}}.$ Ответ. $\mathbb{R}\backslash\{3\}.$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 3. Доказать тождество

$$\frac{(x-y)^7-x^7+y^7}{(x-y)^5-x^5+y^5}=\frac{7}{5}(x^2-xy+y^2).$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 4. Доказать тождества:

(1) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$,

(2) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$

$$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

(1) Решение.

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=$$

$$=\big((x+y)+z\big)^3-x^3-y^3-z^3=$$

$$=[(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3]-x^3-y^3-z^3=$$

$$=[\{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\}+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3]-x^3-y^3-z^3=$$

$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3-x^3-y^3-z^3=$$

$$=3xy(x+y)+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2=$$

$$=3(x+y)[xy+xz+yz+z^2]=$$

$$=3(x+y)(y+z)(z+x).$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

(2) Решение.

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=$$

$$=x^3+xy^2+xz^2-x^2y-xyz-x^2z+$$

$$+x^2y+y^3+yz^2-xy^2-y^2z-xyz+$$

$$+x^2z+y^2z+z^3-xyz-yz^2-xz^2=$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. Доказать тождество:

$$\frac{x^3+y^3-z^3+3xyz}{(x-y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2} = \frac{1}{2}(x+y-z)\,.$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. Доказать тождество:

$$\frac{x^3+y^3-z^3+3xyz}{(x-y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2} = \frac{1}{2}(x+y-z)\ .$$

Решение.

Обозначим $-z = t$.

$$x^3 + y^3 + t^3 - 3xyt =$$
$$= (x + y + t)(x^2 + y^2 + t^2 - xy - yt - tx) =$$
$$= \frac{1}{2}(x + y + t)(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yt + t^2 + t^2 - 2tx + x^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(x + y + t)\big((x - y)^2 + (y - t)^2 + (t - x)^2\big),$$

возвращаемся к исходным переменным и получаем ответ: $\frac{1}{2}(x + y - z)$.

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 6. Найти область определения и упростить выражение

$$\varphi(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 6. Найти область определения и упростить выражение

$$\varphi(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.$$

Решение.

1)

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 2\sqrt{x-1} \geq 0 \\ x - 2\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 2\sqrt{x-1} \geq 0. \end{cases}$$

Найдём нули функций в левых частях неравенств:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

$$x = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Применяя метод интервалов, получаем:

$$1{,}25 - 2\sqrt{1{,}25 - 1} = 0{,}25 \geq 0,$$

$$10 - 2\sqrt{10 - 1} = 4 \geq 0,$$

откуда $D(\varphi) = [1, +\infty[$.

Тождественные преобразования: упрощение выражений

$$\varphi(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \sqrt{(x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1} - \sqrt{(x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2} =$$

$$= \left|\sqrt{x-1} + 1\right| - \left|\sqrt{x-1} - 1\right| = \sqrt{x-1} + 1 - \left|\sqrt{x-1} - 1\right|.$$

Так как

$$\sqrt{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2,$$

то

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} + 1 = 2 \text{ при } x \geq 2, \\ \sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{x-1} - 1 = 2\sqrt{x-1} \text{ при } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Ответ: $\varphi(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } x \geq 2, \\ 2\sqrt{x-1} \text{ при } 1 < x < 2. \end{cases}$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 7. Упростить выражение

$$\frac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}.$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 7. Упростить выражение

$$\frac{\left(5\sqrt{3}+\sqrt{50}\right)\left(5-\sqrt{24}\right)}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}.$$

Решение.

$$\frac{\left(5\sqrt{3}+\sqrt{50}\right)\left(5-\sqrt{24}\right)}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}} = 3-2=1.$$

Ответ. 1.

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 8. Упростить выражение

$$\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{-1}+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Решение.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)}+\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})-2\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ответ. $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 9. Упростить выражение

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}.$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Решение.

Первый способ:

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2}=6.$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Решение.

Второй способ:

$$17 + 12\sqrt{2} = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$a^2 + b^2 = 17, a^2b^2 = 72,$$

$$a = \pm 2\sqrt{2}, b = \pm 3 \text{ или } a = \pm 3, b = \pm 2\sqrt{2}.$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Решение.

Третий способ:

$$17 + 12\sqrt{2} = (a + b)^2,$$

$$a^2 + b^2 = 17, 2ab = 12\sqrt{2}, a^2b^2 = 72,$$

$$(a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2; (a^2 - b^2)^2 = 289 - 288 = 1;$$

$$a^2 + b^2 = 17, a^2 - b^2 = 1,$$

$$a^2 = 8, b^2 = 9; a = 3, b = 2\sqrt{2}.$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Решение.

Четвёртый способ:

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\alpha>0,$$

$$\alpha^2=34+2\sqrt{289-288}=36, \alpha=6.$$

Ответ. 6.

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 10. Упростить выражение

(1) $\sqrt{4+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}-\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}.$

(2) $\sqrt{7-\sqrt{21+4\sqrt{5}}}-\sqrt{7+\sqrt{21-4\sqrt{5}}}.$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 11. Найти область определения и упростить выражение.

(1) $\frac{2x^2-xy-3y^2}{2x^2-5xy+3y^2}$.

(2) $\frac{\left(x^3-1-\frac{7-x^3}{3+x^3}\right)\cdot\frac{4}{x^5+3x^2}}{\frac{6x^6-24}{x^9+6x^6+9x^3}\cdot\frac{2x}{3x^3+6}}$.

(3) $\frac{1}{(x+y)^3}\cdot\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right)+\frac{2}{(x+y)^4}\cdot\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right)+\frac{2}{(x+y)^5}\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$.

Тождественные преобразования: упрощение выражений

(1) $\frac{2x^2-xy-3y^2}{2x^2-5xy+3y^2}$.

Ответ. $\frac{x+y}{x-y}$; $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq x \wedge y \neq \frac{2x}{3}\right\}$.

(2) $\frac{\left(x^3-1-\frac{7-x^3}{3+x^3}\right)\cdot\frac{4}{x^5+3x^2}}{\frac{6x^6-24}{x^9+6x^6+9x^3}\cdot\frac{2x}{3x^3+6}}$.

Ответ. x^3+5; $\mathbb{R}\backslash\left\{0, -\sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right\}$.

(3) $\frac{1}{(x+y)^3}\cdot\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right)+\frac{2}{(x+y)^4}\cdot\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right)+\frac{2}{(x+y)^5}\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$.

Ответ. $\frac{y-x}{x^4y^4}$; $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge y \neq -x\}$.

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 12. Доказать тождества:

(1) $$\frac{\frac{x^2(z-y)}{yz}+\frac{y^2(x-z)}{zx}+\frac{z^2(y-x)}{xy}}{\frac{x(z-y)}{yz}+\frac{y(x-z)}{zx}+\frac{z(y-x)}{xy}} = x + y + z.$$

(2) $$\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} + \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 0.$$

(3) $$\frac{x^3\left(y^2-z^2\right)+y^3\left(z^2-x^2\right)+z^3\left(x^2-y^2\right)}{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)} = \frac{yz+zx+xy}{x+y+z}.$$

(4) $$\frac{x^2+y^2+z^2-3xyz}{(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2} = \frac{x+y+z}{2}.$$

(5) $$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) = 4.$$

Задачи ЕГЭ

Дано уравнение $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

(1) Решить уравнение.

(2) Найти все корни этого уравнения на промежутке $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Задачи ЕГЭ

Решение.

(1) Выразим синус через косинус

$$4 - 4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0,$$
$$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0.$$

Положим $\cos x = y$ и получим квадратное уравнение:

$$4y^2 + 4y - 3 = 0,$$

корнями которого являются числа $-\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$, то есть равенство

$$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$$

выполняется, если $\cos x = -\frac{3}{2}$ или $\cos x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\cos x = -\frac{3}{2}$ решений не имеет.

Уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ имеет две серии решений:

$$x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Задачи ЕГЭ

(2) Отберём корни из заданного промежутка.

1) $-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq -\frac{3\pi}{2}, -\frac{17}{12} \leq k \leq -\frac{11}{12}, k = -1,$

откуда $x_1 = -\frac{5\pi}{3}.$

2) $-\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq -\frac{3\pi}{2}, -\frac{13}{12} \leq k \leq -\frac{7}{12}, k = -1,$

откуда $x_2 = -\frac{7\pi}{3}.$

Ответ: (1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. (2) $-\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}.$

Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1vYv4DB7zFUqdxbFKCYbFTMHHrWjTbA9EUQOmowt04qM/edit?usp=sharing

Задание 1. Упростить выражение

$$\frac{\left(11\sqrt{6}-\sqrt{605}\right)\left(11+\sqrt{60}\right)}{\sqrt{726}+11\sqrt{5}}.$$

Для самостоятельного решения

Задание 2. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}-\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{5}}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2.$$

Для самостоятельного решения

Задание 3. Упростить выражение

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2.$$

Для самостоятельного решения

Задание 4. На каком множестве равенство является тождеством? Выберите верные утверждения.

(1) $\sqrt{(x-1)^2} = x - 1$ является тождеством на $\mathbb{R}$.

(2) $\sqrt{(x-1)^2} = -x + 1$ является тождеством на $]-\infty, 1]$.

(3) $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ является тождеством на $[1, +\infty[$.

(4) $\sqrt{(x+3)(x-2)} = \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-2}$ является тождеством на $[2, +\infty[$.

(5) $\sqrt{(x+3)(x-2)} = \sqrt{-x-3} \cdot \sqrt{2-x}$ является тождеством на $]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[$.

(6) $\sqrt{(x+3)(x-2)} = \sqrt{|x+3|} \cdot \sqrt{|x-2|}$ является тождеством на $]-\infty, -3]$.

Для самостоятельного решения

Задание 5. Доказать тождество

$$\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz}{x^2-y^2-z^2-2yz} = \frac{x+y+z}{x-y-z}\ .$$

Литература

- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.

КОНЕЦ СЕМИНАРА