Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Тождества и тождественные преобразования: практикум-2

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Тождества и тождественные преобразования: практикум-2

ПЛАН

- Формулы сокращённого умножения
- Бином Ньютона
- Тождественные преобразования алгебраических выражений
- Доказательство тождеств по индукции
- Комбинаторные рассуждения
- Задачи ЕГЭ

Из предыдущего конспекта: решение задач 3, 11, 12.

Исправлено: условие задачи 12 (4) и задачи «ЕГЭ».

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Формулы сокращённого умножения

(1) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

(2) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$

(3) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

(4) $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$

(5) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Формулы сокращённого умножения

(6) $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 =$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n$$

(7) $x^n - y^n =$

$$= (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

(8) $x^{2n+1} + y^{2n+1} =$

$$= (x + y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \cdots - xy^{n-1} + y^{2n})$$

Формулы сокращённого умножения

Задача 1. Применить формулы сокращённого умножения

(1) $(x + y + z)^2$

(2) $x^6 - y^6$

(3) $x^5 + y^5$

Формулы сокращённого умножения

Задача 1. Решение.

(1) $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

(2) $x^6 - y^6 = (x-y)(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)$

(3) $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

Бином Ньютона

$(x + y)^n =$

$= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^k x^{n-k} y^k + \cdots + C_n^n y^n,$

где C_n^k -- биномиальные коэффициенты.

Бином Ньютона

Если коэффициенты отбросить, получаются одночлены степени *n:*

$$x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \dots, x^{n-k}y^k, \dots, y^n.$$

Коэффициенты можно найти по таблице (треугольник Паскаля)

1 , 1

1 , 2 , 1

1 , 3 , 3 , 1

1 , 4 , 6 , 4 , 1

1 , 5 , 10, 10, 5, 1

…

Бином Ньютона

Задача 2. Найти десятую степень двучлена $(x + y)$

Бином Ньютона

Задача 2. Найти десятую степень двучлена $(x+y)$

Решение.

$$(x+y)^{10} =$$

$$= x^{10} + 10x^9y + 45x^8y^2 + 120x^7y^3 + 210x^6y^4 + 252x^5y^5 +$$

$$+210x^4y^6 + 120x^3y^7 + 45x^2y^8 + 10xy^9 + y^{10}$$

Бином Ньютона

Сумма коэффициентов в каждой строке равна степени 2:

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 + 1 = 4$$

$$1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

…

Бином Ньютона

Формула биномиальных коэффициентов

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

Бином Ньютона

$$\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{7}$$

$$(x+y)^7 = x^7 +$$

$$\frac{7}{1}$$

$$+7x^6y+$$

$$\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}$$

$$+21x^5y^2+$$

$$\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}$$

$$+35x^4y^3+$$

$$\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}$$

$$+35x^3y^4+$$

$$\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{5}$$

$$+21x^2y^5+$$

$$\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}$$

$$+7xy^9+$$

$$\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{7}$$

$$+y^{10}$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 3. (№3, 2020-09-25_ПЗ_ЭМ(Алгебра)(БАК))

Доказать тождество

$$\frac{(x-y)^7-x^7+y^7}{(x-y)^5-x^5+y^5}=\frac{7}{5}(x^2-xy+y^2).$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 3. Решение.

$$\frac{(x-y)^7-x^7+y^7}{(x-y)^5-x^5+y^5}=\frac{(x-y)^7-(x^7-y^7)}{(x-y)^5-(x^5-y^5)}=$$

$$=\frac{(x-y)^6-(x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6)}{(x-y)^4-(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)}=(*)$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 3. Решение.

В числителе:

$$(x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$$

$$x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$$

В знаменателе:

$$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

$$= \frac{-7x^5y + 14x^4y^2 - 21x^3y^3 + 14x^2y^4 - 7xy^5}{-5x^3y + 5x^2y^2 - 5xy^3} = (**)$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 3. Решение.

$$(**) = \frac{-7x^5y + 14x^4y^2 - 21x^3y^3 + 14x^2y^4 - 7xy^5}{-5x^3y + 5x^2y^2 - 5xy^3} = \frac{7}{5} \cdot \frac{x^4 - 2x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + y^4}{x^2 - xy + y^2} =$$

$$= \frac{7}{5} \cdot \frac{x^2(x^2 - xy + y^2) - x^3y + 2x^2y^2 - 2xy^3 + y^4}{x^2 - xy + y^2} =$$

$$= \frac{7}{5} \cdot \frac{x^2(x^2 - xy + y^2) - xy(x^2 - xy + y^2) + x^2y^2 - xy^3 + y^4}{x^2 - xy + y^2} =$$

$$= \frac{7}{5} \cdot \frac{x^2(x^2 - xy + y^2) - xy(x^2 - xy + y^2) + y^2(x^2 - xy + y^2)}{x^2 - xy + y^2} =$$

$$= \frac{7}{5}(x^2 - xy + y^2).$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 4. (№11, 2020-09-25_ПЗ_ЭМ(Алгебра)(БАК))

Найти область определения и упростить выражение.

(1) $\frac{2x^2-xy-3y^2}{2x^2-5xy+3y^2}$.

(2) $\frac{\left(x^3-1-\frac{7-x^3}{3+x^3}\right)\cdot\frac{4}{x^5+3x^2}}{\frac{6x^6-24}{x^9+6x^6+9x^3}\cdot\frac{2x}{3x^3+6}}$.

(3) $\frac{1}{(x+y)^3}\cdot\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right)+\frac{2}{(x+y)^4}\cdot\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right)+\frac{2}{(x+y)^5}\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$.

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 4. Решение (1)

$$\frac{2x^2 - xy - 3y^2}{2x^2 - 5xy + 3y^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2xy - 3xy - 3y^2}{2x^2 - 2xy - 3xy + 3y^2} =$$

$$= \frac{2x(x + y) - 3y(x + y)}{2x(x - y) - 3y(x - y)} =$$

$$= \frac{x + y}{x - y}.$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

З а д а ч а 4. Решение (2).

$$\frac{\left(x^3-1-\dfrac{7-x^3}{3+x^3}\right)\cdot\dfrac{4}{x^5+3x^2}}{\dfrac{6x^6-24}{x^9+6x^6+9x^3}\cdot\dfrac{2x}{3x^3+6}}=$$

$$=\frac{4\cdot\left((x^3-1)(x^3+3)-7+x^3\right)}{(x^3+3)\cdot x^2\cdot(x^3+3)}\cdot\frac{x^3\cdot(x^3+3)^2\cdot 3\cdot(x^3+2)}{6\cdot(x^6-4)\cdot 2x}=$$

$$=\frac{12x^3(x^3+3)^2(x^3+2)(x^6+3x^3-10)}{12x^3(x^3+3)^2(x^3+2)(x^3-2)}=$$

$$=\frac{x^6+3x^3-10}{x^3-2}=x^3+5.$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 4. Решение (3). Приводим дроби к общему знаменателю:

$$\frac{1}{(x+y)^3}\cdot\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right)+\frac{2}{(x+y)^4}\cdot\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right)+\frac{2}{(x+y)^5}\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)=$$

$$=\frac{y^4-x^4}{x^4y^4(x+y)^3}+\frac{2(y^3-x^3)}{x^3y^3(x+y)^4}+\frac{2(y^2-x^2)}{x^2y^2(x+y)^5}=$$

$$=\frac{(y^4-x^4)(x+y)^2+2xy(y^3-x^3)(x+y)+2x^2y^2(y^2-x^2)}{x^4y^4(x+y)^5}\,(*)$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 4. Решение (3). Сокращаем дробь на $(x+y)$ и в числителе выносим множитель $(y-x)$:

$$(*)\ \frac{(y^4-x^4)(x+y)^2+2xy(y^3-x^3)(x+y)+2x^2y^2(y^2-x^2)}{x^4y^4(x+y)^5}=$$

$$=\frac{(y^4-x^4)(x+y)+2xy(y^3-x^3)+2x^2y^2(y-x)}{x^4y^4(x+y)^4}=$$

$$=\frac{(y-x)[(y^2+x^2)(x+y)^2+2xy(y^2+xy+x^2)+2x^2y^2]}{x^4y^4(x+y)^4}=(**)$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

Задача 4. Решение (3). Упрощаем выражение в квадратных скобках:

$$(**) = \frac{(y-x)[(y^2+x^2)(x+y)^2+2xy(y^2+xy+x^2)+2x^2y^2]}{x^4y^4(x+y)^4} =$$

$$= \frac{(y-x)[(y^2+x^2)(x+y)^2+2xy(y^2+xy+x^2+xy)]}{x^4y^4(x+y)^4} =$$

$$= \frac{(y-x)[(y^2+x^2)(x+y)^2+2xy(x+y)^2]}{x^4y^4(x+y)^4} = \frac{y-x}{x^4y^4}$$

Тождественные преобразования: упрощение выражений

(1) $\frac{2x^2-xy-3y^2}{2x^2-5xy+3y^2}$.

Ответ. $\frac{x+y}{x-y}; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq x \wedge y \neq \frac{2x}{3}\right\}$.

(2) $\frac{\left(x^3-1-\frac{7-x^3}{3+x^3}\right)\cdot\frac{4}{x^5+3x^2}}{\frac{6x^6-24}{x^9+6x^6+9x^3}\cdot\frac{2x}{3x^3+6}}$.

Ответ. $x^3+5; \mathbb{R}\backslash\left\{0, -\sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right\}$.

(3) $\frac{1}{(x+y)^3}\cdot\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right)+\frac{2}{(x+y)^4}\cdot\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right)+\frac{2}{(x+y)^5}\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$.

Ответ. $\frac{y-x}{x^4y^4}; \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge y \neq -x\}$.

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. (№12, 2020-09-25_ПЗ_ЭМ(Алгебра)(БАК)) Доказать тождества:

(1) $\frac{\frac{x^2(z-y)}{yz}+\frac{y^2(x-z)}{zx}+\frac{z^2(y-x)}{xy}}{\frac{x(z-y)}{yz}+\frac{y(x-z)}{zx}+\frac{z(y-x)}{xy}} = x+y+z.$

(2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}+\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 0.$

(3) $\frac{x^3\left(y^2-z^2\right)+y^3\left(z^2-x^2\right)+z^3\left(x^2-y^2\right)}{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)} = \frac{yz+zx+xy}{x+y+z}.$

(4) $\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} = \frac{x+y+z}{2}.$

(5) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)^2+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)^2-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) = 4.$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. Решение. (1)

$$\frac{\frac{x^2(z-y)}{yz}+\frac{y^2(x-z)}{zx}+\frac{z^2(y-x)}{xy}}{\frac{x(z-y)}{yz}+\frac{y(x-z)}{zx}+\frac{z(y-x)}{xy}}=x+y+z$$

Применим тактику из примера 5 (2020-09-25_ЛК_ЭМ(Алгебра)(БАК)):

$$(z-y)+(x-z)+(y-x)=0.$$

Следовательно,

$$(z-y)=-[(x-z)+(y-x)].$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

З а д а ч а 5 . Сделаем подстановку числителе дроби:

$$\frac{x^2(z-y)}{yz}+\frac{y^2(x-z)}{zx}+\frac{z^2(y-x)}{xy}=$$

$$=\frac{-x^2[(x-z)+(y-x)]}{yz}+\frac{y^2(x-z)}{zx}+\frac{z^2(y-x)}{xy}=$$

$$=\frac{-x^3(x-z)-x^3(y-x)+y^3(x-z)+z^3(y-x)}{xyz}=$$

$$=\frac{(y^3-x^3)(x-z)+(z^3-x^3)(y-x)}{xyz}=$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

З а д а ч а 5 . Вынесем общий множитель $(x-z)(y-x)$:

$$=\frac{(y^3-x^3)(x-z)+(z^3-x^3)(y-x)}{xyz}=$$

$$=\frac{(x-z)(y-x)(y^2+yx+x^2-z^2-zx-x^2)}{xyz}=$$

$$=\frac{(x-z)(y-x)(y^2-z^2+yx-zx)}{xyz}=$$

$$=\frac{(x-z)(y-x)(y-z)(x+y+z)}{xyz}=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)}{xyz}.$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. Сделаем подстановку знаменателе дроби:

$$\frac{x(z-y)}{yz}+\frac{y(x-z)}{zx}+\frac{z(y-x)}{xy}=$$

$$=\frac{-x[(x-z)+(y-x)]}{yz}+\frac{y(x-z)}{zx}+\frac{z(y-x)}{xy}=$$

$$=\frac{-x^2(x-z)-x^2(y-x)+y^2(x-z)+z^2(y-x)}{xyz}=$$

$$=\frac{(y^2-x^2)(x-z)+(z^2-x^2)(y-x)}{xyz}=$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. Вынесем общий множитель $(x-z)(y-x)$:

$$=\frac{(y^2-x^2)(x-z)+(z^2-x^2)(y-x)}{xyz}=$$

$$=\frac{(x-z)(y-x)(y+x-z-x)}{xyz}=$$

$$=\frac{(x-z)(y-x)(y-z)}{xyz}=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}.$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. Объединим результаты:

$$\frac{\frac{x^2(z-y)}{yz}+\frac{y^2(x-z)}{zx}+\frac{z^2(y-x)}{xy}}{\frac{x(z-y)}{yz}+\frac{y(x-z)}{zx}+\frac{z(y-x)}{xy}}=$$

$$=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)}{xyz}:\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}=$$

$$=x+y+z.$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. (2) Рассмотрим отдельно первые три слагаемых и сделаем подстановку $(z-y)=-[(y-z)+(z-x)]$:

$$\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}=$$

$$=\frac{-[(y-z)+(z-x)]}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}=$$

$$=-\frac{y-z}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}-\frac{z-x}{x+y}+\frac{z-x}{z+x}=$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. (2) Решение.

$$= -\frac{y-z}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} - \frac{z-x}{x+y} + \frac{z-x}{z+x} =$$

$$= \frac{(y-z)(x-z)}{(x+y)(y+z)} + \frac{(z-x)(y-z)}{(x+y)(z+x)} =$$

$$= \frac{(y-z)(x-z)(z+x) + (z-x)(y-z)(y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} =$$

$$= \frac{-(z^2-x^2)(y-z) + (z-x)(y^2-z^2)}{(x+y)(y+z)(z+x)} =$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. (2) Решение.

$$= \frac{-(z^2 - x^2)(y - z) + (z - x)(y^2 - z^2)}{(x + y)(y + z)(z + x)} =$$

$$= \frac{(y - z)(z - x)[-z - x + y + z]}{(x + y)(y + z)(z + x)} =$$

$$= \frac{(y - z)(z - x)(y - x)}{(x + y)(y + z)(z + x)} = \frac{-(x - y)(y - z)(z - x)}{(x + y)(y + z)(z + x)}$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. (2) Подставим полученное выражение в исходное:

$$\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}+\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=$$

$$=\frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}+\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=0.$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

З а д а ч а 5 . (3) Решение.

Повторим трюк из примера 5 (ЛК), чтобы сделать удобную подстановку:

$$(x-y)+(y-z)+(z-x)=0,$$

следовательно,

$$(y-z)=-[(x-y)+(z-x)].$$

И аналогично для квадратов неизвестных:

$$(x^2-y^2)+(y^2-z^2)+(z^2-x^2)=0,$$

следовательно,

$$(y^2-z^2)=-[(x^2-y^2)+(z^2-x^2)].$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. (3) Решение.

$$\frac{-x^3[(x^2-y^2)+(z^2-x^2)]+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{-x^3[(x-y)+(z-x)]+y^3(z-x)+z^3(x-y)}=$$

$$=\frac{-x^3(x^2-y^2)-x^3(z^2-x^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{-x^3(z-x)-x^3(x-y)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}=$$

$$=\frac{(z^3-x^3)(x^2-y^2)-(y^3-x^3)(z^2-x^2)}{(z^3-x^3)(z-x)-(y^3-x^3)(x-y)}=$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. (3) Сокращаем дробь на $(z-x)\ (x-y)$.

$$=\frac{(z^3-x^3)(x^2-y^2)-(y^3-x^3)(z^2-x^2)}{(z^3-x^3)(z-x)-(y^3-x^3)(x-y)}=$$

$$=\frac{(z^2+zx+x^2)(x+y)-(y^2+yx+x^2)(z+x)}{(z^2+zx+x^2)-(y^2+yx+x^2)}=$$

$$=\frac{(z^2+zx+x^2)(x+y)-(y^2+yx+x^2)(z+x)}{z^2-y^2+zx-yx}=$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

З а д а ч а 5 . (3) Сокращаем дробь на $(z-x)\ (x-y)$.

$$=\frac{(z^2+zx+x^2)(x+y)-(y^2+yx+x^2)(z+x)}{z^2-y^2+zx-yx}=$$

$$=\frac{xz^2+zx^2+x^3+yz^2+yzx+x^2y-(y^2z+yxz+x^2z+xy^2+yx^2+x^3)}{(y-z)(x+y+z)}=$$

$$=\frac{xz^2+yz^2-(y^2z+xy^2)}{(y-z)(x+y+z)}=\frac{(yz^2-y^2z)+(xz^2-xy^2)}{(y-z)(x+y+z)}=$$

$$=\frac{yz(z-y)+x(z+y)(z-y)}{(y-z)(x+y+z)}=\frac{yz+zx+xy}{x+y+z}.$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. (4) Решение: воспользуемся результатом задачи 4 (2):

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Получаем:

$$\frac{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2} =$$

$$\frac{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2xz} = \frac{x + y + z}{2}.$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. (5) Решение:

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)^2+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)^2-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=$$

$$=6+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}-\frac{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}{x^2y^2z^2}$$

$$=(*)$$

Отдельно преобразуем последнее слагаемое:

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. (5) Преобразуем последнее слагаемое:

$$\frac{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}{x^2y^2z^2} = \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{y^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{z^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right) =$$

$$= 1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+1 =$$

$$= 2+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}$$

Тождественные преобразования: доказательство тождеств

Задача 5. (5) Продолжим цепочку преобразований:

$$= 6 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} - \frac{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}{x^2y^2z^2} = (*)$$

$$= 6 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} - \left(2 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2}\right) =$$

$$= 6 - 2 = 4.$$

Доказательство тождеств по индукции

Задача 6. Доказать тождество

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Комбинаторные рассуждения

Задача 7. Вычислить суммы

(1) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$

(2) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2$

Комбинаторные рассуждения

Задача 7. Решение.

(2) Так как $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, то

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) =$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

Комбинаторные рассуждения

Задача 7. Решение.

(1)

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 =$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2) -$$

$$-(2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n-2)^2) =$$

$$= \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

Задачи ЕГЭ

(2020-09-25_ПЗ_ЭМ(Алгебра)(БАК))

Дано уравнение $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

(1) Решить уравнение.

(2) Найти все корни этого уравнения на промежутке $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Задачи ЕГЭ

Решение.

(1) Выразим синус через косинус

$$4 - 4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0,$$
$$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0.$$

Положим $\cos x = y$ и получим квадратное уравнение:

$$4y^2 + 4y - 3 = 0,$$

корнями которого являются числа $-\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$, то есть равенство

$$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$$

выполняется, если $\cos x = -\frac{3}{2}$ или $\cos x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\cos x = -\frac{3}{2}$ решений не имеет.

Уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ имеет две серии решений:

$$x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Задачи ЕГЭ

(2) Отберём корни из заданного промежутка.

1) $-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq -\frac{3\pi}{2}, -\frac{17}{12} \leq k \leq -\frac{11}{12}, k = -1,$

откуда $x_1 = -\frac{5\pi}{3}.$

2) $-\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq -\frac{3\pi}{2}, -\frac{13}{12} \leq k \leq -\frac{7}{12}, k = -1,$

откуда $x_2 = -\frac{7\pi}{3}.$

Ответ: (1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. (2) $-\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}.$

Задачи ЕГЭ

Дано уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$.

(1) Решить уравнение.

(2) Найти все корни этого уравнения на промежутке $\left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Задачи ЕГЭ

Дано уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$.

(1) Решить уравнение.

(2) Найти все корни этого уравнения на промежутке $\left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

(1) Применим основное тригонометрическое тождество

$$6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0,\ 6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0,$$

Положим $\cos x = y$ и получим квадратное уравнение $6y^2 - 7y - 5 = 0$, корнями которого являются числа $\frac{5}{3}$ и $-\frac{1}{2}$.

Следовательно, $\cos x = \frac{5}{3}$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Уравнение $\cos x = \frac{5}{3}$ решений не имеет.

Уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ имеет две серии решений:

$$x_{1,2} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Задачи ЕГЭ

Дано уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$.

(1) Решить уравнение.

(2) Найти все корни этого уравнения на промежутке $\left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

(2) Отберём корни из заданного промежутка.

1) $-\frac{7\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq -\frac{5\pi}{2}, -\frac{25}{12} \leq k \leq -\frac{19}{12}, k = -2$, откуда $x_1 = -\frac{10\pi}{3}$.

2) $-\frac{7\pi}{2} \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq -\frac{5\pi}{2}, -\frac{17}{12} \leq k \leq -\frac{9}{12}, k = -1$, откуда $x_2 = -\frac{8\pi}{3}$.

Ответ:

(1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

(2) $-\frac{10\pi}{3}, -\frac{8\pi}{3}$.

Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1MJLU5buq4XNU9Sg5-KQfhrr1Yr-ODkWqX8u5s49CoYI/edit?usp=sharing

Задание 1. Найти коэффициент при x^5y^7 в разложении $(x+y)^{12}$.

Для самостоятельного решения

З а д а н и е 2. Найти сумму коэффициентов в разложении $(a+b)^{15}$.

Для самостоятельного решения

Задание 3. Упростить выражение на ОДЗ

$$\frac{2x^2}{x^2-a^2}+\frac{a}{x+a}+\frac{x}{a-x}.$$

Для самостоятельного решения

Задание 4. Решить уравнение

$$x^7 - 14x^6 + 84x^5 - 280x^4 + 560x^3 - 672x^2 + 448x - 128 = 0$$

Для самостоятельного решения

Задание 5. Доказать тождество

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Литература

- Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.

КОНЕЦ СЕМИНАРА