Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Комплексные числа: алгебраическая форма

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Комплексные числа: алгебраическая форма

ПЛАН

- Основная теорема алгебры.
- Арифметика и алгебра комплексных чисел.

Слайды 23—6 из предыдущего конспекта

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Основная теорема алгебры

Основная теорема алгебры. *Любой многочлен f, степень которого отлична от нуля, имеет по крайней мере один корень.*

В этой теореме коэффициенты многочлена и его корни могут быть как действительными, так и комплексными.

Теорема о разложении многочлена на линейные множители. *Любой многочлен n-ой степени*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

может быть представлен в виде произведения

$$f = a_0(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n).$$

Это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Основная теорема алгебры

Следствие 1. *Пусть многочлен n-ой степени представлен в виде произведения линейных множителей*

$$f = a_0(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n).$$

Тогда числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ являются корнями многочлена f и других корней этот многочлен не имеет.

Если среди чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ есть совпадающие, говорят, что у многочлена есть **кратные корни**.

Следствие 2. *Каждый многочлен n-ой степени имеет ровно n корней.*

Основная теорема алгебры

Теорема (основная теорема алгебры). *Любой многочлен степени n*

$$f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_{n-1} x + \alpha_n,$$

может быть представлен в виде произведения ровно n множителей

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *– комплексные числа, корни уравнения* $f(x) = 0$ [Курант, с. 127–128].

Сопряжённость мнимых корней многочлена

Теорема. Если многочлен p с действительными коэффициентами, степень которого отлична от нуля, имеет мнимый корень $\alpha = a + bi\ (b \neq 0)$, то сопряжённое число $a - bi$ также является корнем этого многочлена.

Доказательство. Пусть $p(a + bi) = u + iv$. Сопряжённому значению переменной соответствует сопряжённое значение многочлена:

$$p(a - bi) = u - iv.$$

Если $p(a + bi) = 0$, то $u = v = 0$ и следовательно,

$$p(a - bi) = 0 - 0i = 0,$$

то есть $a - bi$ тоже корень p, что и следовало доказать.

Сопряжённость мнимых корней многочлена

Пример. При каких условиях многочлен с действительными коэффициентами

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

делится на двучлен $x^2 + 1$?

Сопряжённость мнимых корней многочлена

Решение. Для делимости многочлена на $x^2 + 1$ необходимо и достаточно, чтобы мнимая единица была корнем этого многочлена. Тогда многочлен будет делиться на

$$(x - i)(x + 1) = x^2 + 1.$$

Тогда

$$f(i) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots + a_n i^n =$$
$$= (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots) + i(a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)$$

и искомое условие запишется так:

$$(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots) = 0 \text{ и } (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots) = 0.$$

Сопряжённость мнимых корней многочлена

П р и м е р. Доказать, что трёхчлен

$$x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3p+2}$$

(n, m, p -- любые натуральные числа) делится на квадратный трёхчлен $x^2 + x + 1$.

Сопряжённость мнимых корней многочлена

Решение. Квадратный трёхчлен $x^2 + x + 1$ имеет два различных корня

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Так как

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1\ )$$

и $x_1^2 + x_1 + 1 = 0$, то $x_1^3 = 1$.

Покажем, что x_1 является корнем трёхчлена $x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3p+2}$:

$$x_1^{3n} + x_1^{3m+1} + x_1^{3p+2} = 1 + x_1 + x_1^2 = 0.$$

Следовательно, трёхчлен имеет и сопряжённый корень, то есть делится на $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + x + 1$, что и следовало доказать.

Алгебра комплексных чисел

Задача. Найдите остаток от деления многочлена

$$f = x^{2020} + 2x^{57} + 1 \text{ на } x^2 + 1.$$

Алгебра комплексных чисел

Решение. Пусть

$$f = (x^2 + 1)q + ax + b.$$

Так как многочлен $x^2 + 1$ имеет корень $x = i$, то по теореме Безу

$$f(i) = ai + b,$$

то есть выполняется равенство

$$i^{2020} + 2i^{57} + 1 = ai + b,$$

$$i^{2020} + 2i^{57} + 1 = 1 + 2i + 1 = 2 + 2i,$$

$$ai + b = 2 + 2i,$$

откуда искомый остаток равен $2x + 2$.

Алгебра комплексных чисел

Задача. Вычислите.

а) $\left(1+\sqrt{5}i\right)^2+\left(\sqrt{5}-i\right)^2$;

б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$;

в) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$;

г) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$.

Алгебра комплексных чисел

З а д а ч а. Верно ли, что

а) если сумма двух комплексных чисел – число действительное, то эти числа сопряженные;

б) если произведение двух комплексных чисел – число действительное, то эти числа сопряжённые;

в) если действительны и сумма, и произведение двух комплексных чисел, не являющихся вещественными, то эти числа сопряжённые?

Алгебра комплексных чисел

Задача. Какие из утверждений верны:

а) если сумма квадратов двух чисел равна нулю, то каждое из них равно нулю;

б) если одинаковые чётные степени двух чисел равны, то эти числа равны или отличаются знаком;

в) если одинаковые нечётные степени двух чисел равны, то равны и сами числа;

г) если число отлично от 0 и ± 1, то его различные степени различны?

Алгебра комплексных чисел

Задача. Составьте уравнение с действительными коэффициентами, корнем которого является число

а) $5i$;

б) $-3i$;

в) $3 + i$;

г) $1 + i\sqrt{3}$.

Алгебра комплексных чисел

Задача. Составьте уравнение с действительными коэффициентами, корнем которого является число

а) $5i$;

б) $-3i$;

в) $3 + i$;

г) $1 + i\sqrt{3}$.

Ответ: а) $x^2 + 25 = 0$; б) $x^2 + 9 = 0$; в) $x^2 - 6x + 10 = 0$; г) $x^2 - 2x + 4 = 0$.

Алгебра комплексных чисел

Задача. Решите уравнение

а) $(z+1)i-(4-7i)(1-z)=-4-18i$;

б) $\left(z+\sqrt{3}i\right)(2+3i)+\sqrt{3}(z-1)=2$;

в) $(2-3i)(z+1)+(zi-3)(1-i)=4+i$;

г)$(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$.

Алгебра комплексных чисел

Задача. Решите уравнение

а) $(z+1)i-(4-7i)(1-z)=-4-18i$;

б) $\left(z+\sqrt{3}i\right)(2+3i)+\sqrt{3}(z-1)=2$;

в) $(2-3i)(z+1)+(zi-3)(1-i)=4+i$;

г)$(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$.

Ответы: а) $3-2i$; б) $1-\sqrt{3}i$; в) $1+i$; г) $-1-i$.

Алгебра комплексных чисел

З а д а ч а. Найдите действительные числа *x и* y, для которых

а) $(2+i)x+(4-i)y=2+3i$;

б) $(-3+i)x+(1+2i)y=i$.

Алгебра комплексных чисел

Задача. Найдите действительные числа *x и* y*,* для которых

а) $(2+i)x+(4-i)y=2+3i$;

б) $(-3+i)x+(1+2i)y=i$.

Ответы: а) $x=\frac{7}{3}, y=-\frac{2}{3}$; б) $x=\frac{1}{7}, y=\frac{3}{7}$.

Алгебра комплексных чисел

Задача. Решите систему уравнений

а) $\begin{cases} z + 2w = 1 + i, \\ 3z + iw = 2 - 3i; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2z - w = -1 + i, \\ z + 3w = 24 + 11i. \end{cases}$

Ответы: а) $z = 1 - i$, $w = i$; б) $z = 3 + 2i$, $w = 7 + 3i$.

Модуль комплексного числа

Задача. Докажите, что для любых комплексных чисел выполняются соотношения:

(1) $|z_1\bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)$.

(2) $|z_1\bar{z}_2 - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)$.

(3) $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 - 2[|z_1\bar{z}_2| - \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)]$.

(4) $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2 + 2[|z_1\bar{z}_2| + \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)]$.

Суммирование комплексных чисел

Задача . Найдите сумму первых 2020 членов последовательности $\{z_n\}$:

$$z_1 = 0,\ \ z_2 = i,\ z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2})\ (n = 3, 4, 5, \dots).$$

Тождество Диофанта

- Произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, также можно двумя способами разложить на сумму двух квадратов целых чисел [Цейтен, с. 174]:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac \mp bd)^2 + (ad \pm bc)^2.$$

Тождество Диофанта

В левой части доказываемого тождества нетрудно увидеть произведение квадратов модулей чисел $u = a + bi$ и $v = c + di$ (или сопряжённых с ними чисел), а в правой – квадрат модуля их произведения:

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = |u|^2 |v|^2,$$

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = |(ac - bd) + (ad + bc)i|^2 = |uv|^2,$$

или иначе

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = |\bar{u}|^2 |v|^2,$$

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = |(ac + bd) + (ad - bc)i|^2 = |\bar{u}v|^2.$$

Но так как модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, то $|uv|^2 = |u|^2|v|^2$ и $|\bar{u}v|^2 = |\bar{u}|^2|v|^2$, откуда следует, что рассматриваемое в задаче тождество верно.

Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1-aF0scomtj_RBE03zBMevFnyjP-ArzG9iHeerHvW2Ys/edit?usp=sharing

Задание 1. Выберите все действительные числа:

(1) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{2020}$.

(2) $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2020}$.

(3) $(5+i)^{2020} + (5-i)^{2020}$.

(4) $(5+i)^{2020} + (i-5)^{2020}$.

Для самостоятельного решения

З а д а н и е 2. Выберите все пары сопряжённых чисел:

1. $(2+5i)^{2021}$и $(2-5i)^{2021}$.
2. $\frac{4-7i}{3+17i}(1+i)$ и $\frac{4+7i}{3-17i}(1-i)$.
3. $-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$ и $\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$.
4. $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ и $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

Для самостоятельного решения

Задание 3. Решите систему уравнений с комплексными переменными z и w :

$$\begin{cases}(3-i)z+(4+2i)w=1+3i,\\(4+2i)z-(2+3i)w=7.\end{cases}$$

Для самостоятельного решения

З а д а н и е 4. Найдите остаток от деления многочлена :

$x^{100} + x^{20} - 1$ на $x^2 + 1$.

Для самостоятельного решения

Задание 5. Докажите, что данные числа являются сопряжёнными:

$$-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ и } \left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Литература

1. Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с. http://bookre.org/reader?file=567068
2. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. 416 с.
3. Клайн М. Математика. Утрата определённости: Пер. с англ. / Под ред., с предисл. и примеч. И.М. Яглома. М.: Мир, 1984. 484 с.
4. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? 3-е изд., испр. и доп. М.: МЦНМО, 2001. 568 с.
5. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII веках: Пер. с нем. П. Новикова / Обработка, прим. и предисл. М. Выгодского. М.-Л.: Госуд. технико-теоретическое изд-во, 1933. 429 с.

Лекция опубликована в журнальной версии (см. Седова Е.А., Пчелинцев С.В., Удовенко Л.Н. Комплексные числа в школьном математическом образовании: алгебра комплексных чисел // Математика в школе. 2018. № 8. С. 43—56.)

Литература

- Новоселов С.И. Специальный курс элементарной алгебры. 6 изд. М.: Высшая школа, 1962. 564 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.
- School Mathematics Project (SMP) Book 1&2. Cambridge University Press.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ