Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Комплексные числа и геометрия

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Комплексные числа и геометрия

ПЛАН

- Извлечение квадратного корня (письменный алгоритм).
- Геометрическое представление комплексных чисел.
- Геометрический смысл сложения и вычитания.
- Геометрический смысл умножения на действительное число.
- Середина отрезка.
- Геометрический смысл умножения на мнимую единицу.
- Множества точек на плоскости комплексных чисел.

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Извлечение квадратного корня

В армии сержант: Так всем копать. Кто тут склонен к математике? Ты Сидоров? Так бери лопату будешь корни извлекать...

Источник: https://www.alexlarin.com/viewtopic.php?f=10&t=8554

Извлечение квадратного корня

Формула

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

«говорит», что таблицу квадратов натуральных чисел можно составить с помощью сложений:

$$21^2 = 400 + 2 \cdot 20 + 1 = 441,$$
$$22^2 = 441 + 2 \cdot 21 + 1 = 484,$$
$$23^2 = 484 + 2 \cdot 22 + 1 = 529,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$29^2 = 784 + 2 \cdot 28 + 1 = 841.$$

Извлечение квадратного корня

Формула

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)b$$

«говорит», что квадрат числа можно составить с помощью сложений:

$$21^2 = 400 + (2\cdot 20 + 1)\cdot 1 = 441,$$
$$22^2 = 400 + (2\cdot 20 + 2)\cdot 2 = 484,$$
$$23^2 = 400 + (2\cdot 20 + 3)\cdot 3 = 529,$$

……………………………………………

$$29^2 = 400 + (2\cdot 20 + 9)\cdot 9 = 841.$$

Извлечение квадратного корня

Извлечение корня путём «систематических проб»:

с точностью до $\frac{1}{n}$ с недостатком

с точностью до $\frac{1}{n}$ с избытком

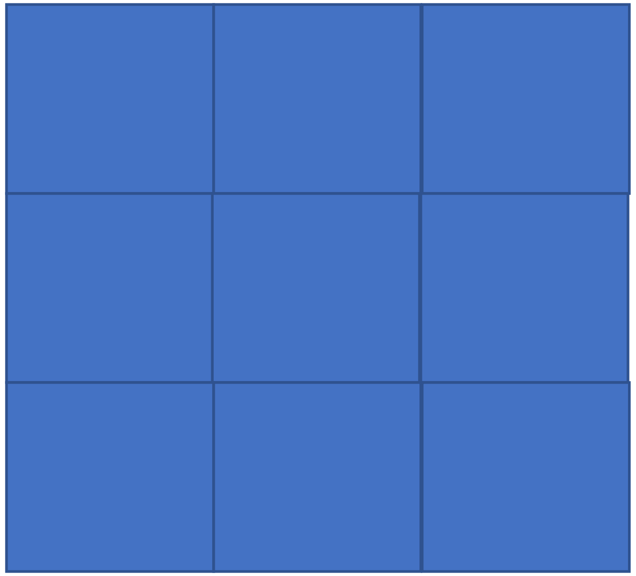
$$3 \leq \sqrt{12} \leq 4,$$
$$3{,}4 \leq \sqrt{12} \leq 3{,}5,$$
$$3{,}46 \leq \sqrt{12} \leq 3{,}47,$$

……………………………………….

Извлечение квадратного корня

Вопрос ставится так: имеется 12 квадратных метров, и их требуется уложить так, чтобы из них получился квадрат.

1) В искомый квадрат войдут 9 квадратных метров (см. рис.)



Извлечение квадратного корня

2) Оставшиеся

$$3 \text{ м}^2 = 300 \text{ дм}^2$$

будем укладывать полосками шириной 1 дм справа и снизу (см. рис.). На каждую пару таких полосок пойдёт

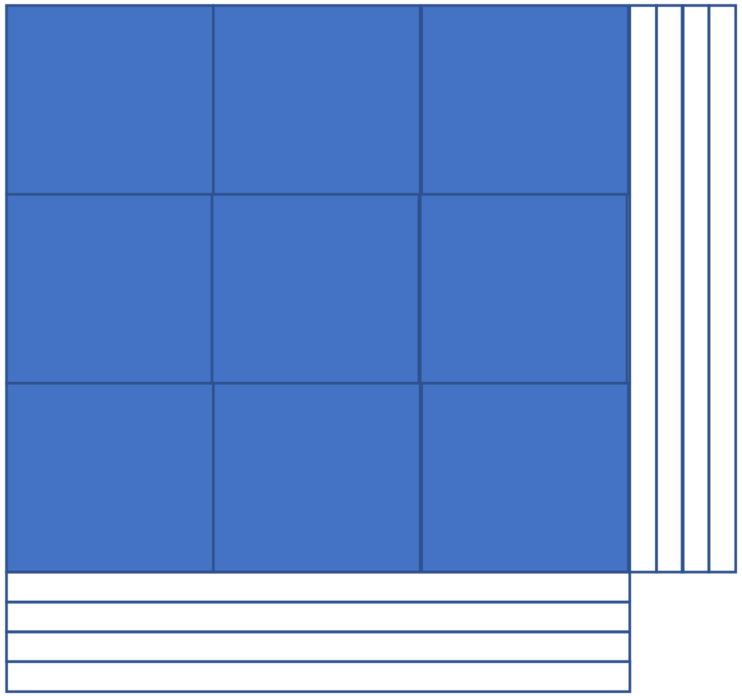
$$2 \cdot (3 \cdot 10) = 60 \text{ (дм}^2\text{)},$$

так что их может быть не более 5 пар:

$$300 \text{ дм}^2 : 60 \text{ дм}^2 = 5.$$

Но надо будет заполнить маленький квадрат справа снизу, поэтому полосок можно взять только 4 пары:

$$300 \text{ дм}^2 = 4 \cdot 60 \text{ дм}^2 + 60 \text{ дм}^2.$$



Извлечение квадратного корня

3) Уложив 4 пары полосок шириной 1 дм и заполнив маленький квадрат, получаем квадрат со стороной 3 м 4 дм новый остаток:

$$300 \text{ дм}^2 - (4 \cdot 60 \text{ дм}^2 + 16 \text{ дм}^2) = 44 \text{ дм}^2.$$

4) Оставшиеся

$$44 \text{ дм}^2 = 4400 \text{ см}^2.$$

будем укладывать полосками шириной 1 см справа и снизу второго квадрата. На каждую пару таких полосок пойдёт

$$2 \cdot (34 \cdot 10) = 680 \ (\text{см}^2),$$

так что их может быть не более 6 пар:

$$4400 \text{ дм}^2 : 680 \text{ см}^2 = 6 \ (\text{ост. } 32 \text{ см}^2).$$

Ими надо будет заполнить маленький квадрат справа снизу, после этого останется:

$$4400 \text{ дм}^2 - (6 \cdot 680 \text{ см}^2 + 36 \text{ см}^2) = 284 \text{ см}^2.$$

И так далее.

Письменное действие:

Извлекаем корень из первой грани: $\sqrt{12} \approx 3$

Вычитаем квадрат первой цифры.

Выписываем остаток и следующую грань: $30'0$.

Слева от остатка проводим вертикальную черту.

В числе $30'0$ должна содержаться сумма
$$2 \cdot (3\text{ дес.}) \cdot (n\text{ ед.}) + (n\text{ ед.})^2.$$

Разделим 30 дес. на $2 \cdot 3 = 6$:

испытываем цифру 5:

$$2 \cdot (3\text{ дес.}) \cdot (5\text{ ед.}) + (5\text{ ед.})^2 = [2 \cdot (3\text{ дес.}) + (5\text{ ед.})] \cdot (5\text{ ед.}),$$

больше остатка, цифра 5 велика;

испытываем цифру 4:

$$2 \cdot (3\text{ дес.}) \cdot (4\text{ ед.}) + (4\text{ ед.})^2 = [2 \cdot (3\text{ дес.}) + (4\text{ ед.})] \cdot (4\text{ ед.}),$$

меньше остатка, цифра 4 годится.

Выписываем остаток и следующую грань: $440'0$.

Разделим 440 дес. на $2 \cdot 34 = 68$ и так далее.

$$\sqrt{1\,2{,}0\,0'0\,0'0\,0} = 3{,}\cancel{5}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 9 \\
\hline
6\cancel{5} & 3\,0'0 \\
\cancel{5} & 3\,3\,0 > 3\,0\,0
\end{array}$$

$$\sqrt{1\,2{,}0\,0'0\,0'0\,0} = 3{,}464\ldots$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 9 \\
\hline
64 & 3\,0'0 \\
4 & 2\,5\,6 \\
\hline
686 & 4\,4\,0'0 \\
6 & 4\,1\,1\,6 \\
\hline
6924 & 2\,8\,4\,0'0 \\
4 & 2\,7\,6\,9\,6 \\
\hline
 & \quad\;\; 7\,0\,4
\end{array}$$

Примеры:

$$357{,}82 = [10^2 + 257{,}82]^2 =$$

$$= [10^2 + (2 \cdot 10 + 8) \cdot 8 + 33{,}82]^2 =$$

$$= [18^2 + 33{,}82]^2 =$$

$$= [18^2 + (2 \cdot 18 + 0{,}9) \cdot 0{,}9 + 0{,}61]^2 =$$

$$= [18{,}9^2 + 0{,}61]^2 = \cdots$$

$$\sqrt{3'5\;7{,}8\;2} = 18{,}9$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
28 & 2\;5'7 \\
8 & 2\;2\;4 \\
\hline
369 & 3\;3\;8\;2 \\
9 & 3\;3\;2\;1 \\
\hline
 & \quad\;\;\;6\;1
\end{array}$$

$$\sqrt{2'4\;8{,}0\;0'0\;0} = 15{,}74$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
\hline
25 & 1\;4'8 \\
5 & 1\;2\;5 \\
\hline
307 & 2\;3\;0'0 \\
7 & 2\;1\;4\;9 \\
\hline
3144 & 1\;5\;1\;0'0 \\
4 & 1\;2\;5\;7\;6 \\
\hline
 & \quad\;2\;5\;2\;4
\end{array}$$

Геометрическое представление комплексных чисел

Задача. Где на плоскости комплексных чисел расположены точки, изображающие комплексные числа вида $z = t + (1 - t)i$, $t -$ действительное число?

Геометрическое представление комплексных чисел

Ответ. На прямой $x + y = 1$.

Геометрический смысл сложения и вычитания

Задача. На комплексной плоскости три вершины параллелограмма расположены в точках

$$1+5i, -1+i \text{ и } 3+3i.$$

Найти координаты четвёртой вершины параллелограмма.

(На комплексной плоскости взяты точки A $(1+5i)$, $B(-1+i)$, $C(3+3i)$. Постройте точку D так, чтобы получился параллелограмм.)

Геометрический смысл сложения и вычитания

Р е ш е н и е. Задача имеет три решения, так как из любой трёх отрезков *AB*, *BC* и *AC* можно считать диагональю параллелограмма.

Сведём данные в таблицу:

Параллелограмм	Диагональ	Четвёртая вершина
$ADBC$	AB	$(1+5i)+(-1+i)-(3+3i)=-3+3i$
$ABDC$	BC	$(-1+i)+(3+3i)-(1+5i)=1-i$
$ABCD$	AC	$(1+5i)+(3+3i)-(-1+i)=5+7i$

О т в е т: $-3+3i, 1-i, 5+7i$.

Геометрический смысл умножения на действительное число

Задача. Точки z_1, z_2, z_3 — вершины треугольника. Какое комплексное число соответствует центроиду этого треугольника?

Геометрический смысл умножения на действительное число

Решение. Точки z_1, z_2, z_3 — вершины треугольника.
Пусть z_4 — точка пересечения медиан.
Точка $z_5 = \frac{z_2+z_3}{2}$ — середина стороны с вершинами с точках z_2, z_3.
Отрезок с вершинами в точках z_1 и z_4 параллелен отрезку с вершинами в точках z_1 и z_5 и равен $\frac{2}{3}$ его длины:

$$z_4 - z_1 = \frac{2}{3}(z_5 - z_1),$$

$$z_4 = z_1 + \frac{2}{3}\left(\frac{z_2+z_3}{2} - z_1\right) = z_1 + \frac{z_2+z_3-2z_1}{3} = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

Центроиду треугольника соответствует число $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

Геометрический смысл умножения на действительное число

Ответ. $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

Геометрический смысл модуля

Задача. Даны комплексные числа:

$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, z_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i, z_3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$

Покажите, что точка $z_4 = 1 + i$ является центром описанной окружности треугольника с вершинами в точках z_1, z_2 и z_3.

Геометрический смысл модуля

Р е ш е н и е . Точка z_4 является центром описанной окружности треугольника с вершинами в точках z_1, z_2 и z_3, если она равноудалена от них.

Вычислим разности $z_4 - z_1$, $z_4 - z_2$ и $z_4 - z_3$:

$$z_4 - z_1 = (1 + i) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i;$$

$$z_4 - z_2 = (1 + i) - \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$z_4 - z_3 = (1 + i) - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Вычислим квадраты модулей полученных чисел:

$$|z_4 - z_1|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2};$$

$$|z_4 - z_2|^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2};$$

$$|z_4 - z_3|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Так как квадраты расстояний от точки z_4 до точек z_1, z_2 и z_3 равны, то и сами расстояния равны, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл умножения на мнимую единицу

Задача. На комплексной плоскости изображён равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Вершины острых углов расположены в точках $A(2+3i)$ и $B(-3+2i)$. Найдите координату вершины C.

Геометрический смысл умножения на мнимую единицу

Р е ш е н и е. Обозначим координату вершины C через $a+bi$. Так как отрезок CB равен и перпендикулярен отрезку CA, то выполняется равенство:

$$(2+3i)-(a+bi)=\big((-3+2i)-(a+bi)\big)i$$

или

$$\big((2+3i)-(a+bi)\big)i=(-3+2i)-(a+bi),$$

после преобразований имеем:

$(2-a)+(3-b)i=(b-2)+(-3-a)i;$ $\quad \begin{cases} 2-a=b-2 \\ 3-b=-3-a \end{cases};$ $\quad \begin{cases} a+b=4 \\ a-b=-6 \end{cases};$

или

$(b-3)+(2-a)i=(-3-a)+(2-b)i;$ $\quad \begin{cases} b-3=-3-a \\ 2-a=2-b \end{cases};$ $\quad \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases};$

откуда $(a;b)=(-1;5)$ или $(a;b)=(0;0)$.

О т в е т: $-1+5i$ или 0.

Геометрический смысл умножения на мнимую единицу

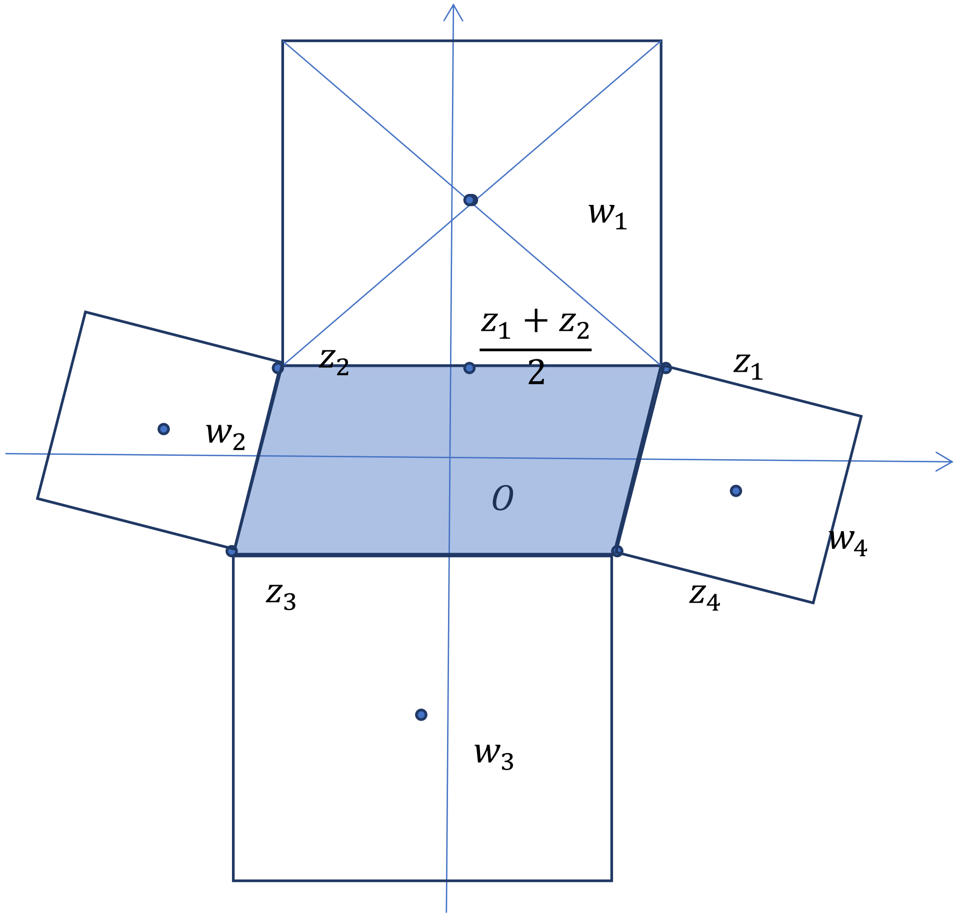
Задача. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Центры квадратов являются вершинами четырёхугольника. Определить вид этого четырёхугольника.

Геометрический смысл умножения на мнимую единицу

Решение. Поместим параллелограмм на плоскость комплексных чисел таким образом, чтобы его центр совпал с началом координат, а две стороны были параллельны оси Ox.

Обозначим его вершины точками z_1, z_2, z_3 и z_4.

Построим на сторонах параллелограмма квадраты и обозначим их центры точками w_1, w_2, w_3 и w_4 (на рис. квадраты построены только во внешнюю сторону).



Геометрический смысл умножения на мнимую единицу

Рассмотрим центр w_1 одного из квадратов. Точка w_1 расположена таким образом, что отрезки с концами в точках w_1 и z_1 и в точках w_1и z_2 равны и перпендикулярны.

При заданных условиях координата w_1 может принимать два значения в зависимости от того, построен квадрат во внешнюю или во внутреннюю сторону относительно параллелограмма.

Выразим координату w_1 через z_1 и z_2 первым способом:

$$z_1 - w_1 = (z_2 - w_1)i; \qquad w_1 - w_1 i = z_1 - z_2 i;$$

$$w_1 = \frac{z_1 - z_2 i}{1-i} = \frac{z_1 - z_2 i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2} i.$$

(Чтобы избежать деления на комплексное число, можно рассуждать иначе:

$\frac{z_1+z_2}{2}$ — координата середины отрезка с концами в точках z_1 и z_2;

$\left(z_1 - \frac{z_1+z_2}{2}\right) i = w_1 - \frac{z_1+z_2}{2}$ — одно из условий равенства и перпендикулярности отрезков с концами в точках z_1 и $\frac{z_1+z_2}{2}$ и с концами в точках w_1 и $\frac{z_1+z_2}{2}$;

следовательно, $w_1 = \frac{z_1+z_2}{2} + \left(z_1 - \frac{z_1+z_2}{2}\right) i = \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2} i$).

Геометрический смысл умножения на мнимую единицу

Аналогично, $w_2 = \frac{z_2+z_3}{2} + \frac{z_2-z_3}{2} i$.

Учитывая, что $z_3 = -z_2$, получаем:

$$w_2 = \frac{z_2-z_1}{2} + \frac{z_2+z_1}{2} i = \left(\frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2} i\right) i = w_1 i.$$

Тем же способом можно показать, что, $w_3 = w_2 i, w_4 = w_3 i, w_1 = w_4 i$,

Значит, про диагонали четырёхугольника с вершинами в точках w_1, w_2, w_3 и w_4 можно сказать, что они равны, в точке пересечения делятся пополам и перпендикулярны, то есть этот четырёхугольник — квадрат.

Рассмотрение второго случая (квадраты расположены во внутреннюю сторону относительно параллелограмма) принципиально не отличается от первого, и поэтому мы здесь его не приводим.

Другое решение этой задачи можно найти в [Пратусевич М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений: профил. уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. М.: Просвещение, 2010. 463 с., с. 255–256].

Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1anE4m3hUIRaxHr_SVQcjQ_q9NCLItl-56nhYZplj4vY/edit?usp=sharing

Задание 1. Концы отрезка изображаются числами $u = 3 + 4i$ и $w = 5 + 2i$. Какое число изображает середину этого отрезка?

(1) $8 + 6i$.

(2) $-2 + 2i$.

(3) $1 - i$.

(4) $4 + 3i$.

Для самостоятельного решения

Задание 2. Какое из соотношений описывает множество точек кольца с центром в точке (1, 0) с внешним радиусом 2 и внутренним радиусом 1?

(1) $1 \le |z-1| \le 2$.

(2) $1 \le |z-i| \le 2$.

(3) $|z-1| = 2$.

(4) $1 \le \operatorname{Re} z \le 2$.

Для самостоятельного решения

Задание 3. Найдите комплексную координату точки P — середины стороны MN треугольника KMN, если

$$K(-2+4i), M(2-i), N(6+i).$$

Для самостоятельного решения

Задание 4. Найдите комплексную координату центра тяжести треугольника с вершинами в точках

$$z = -2 + 3i, v = 2 - i, w = 6 + i.$$

.

Для самостоятельного решения

Задание 5. Даны комплексные числа: $z = 3 + 4i$, $v = 2 + i$ и $w = 7 + 4i$. Найдите комплексные координаты точки, дополняющей треугольник с вершинами в точках z, v и w до параллелограмма, в котором точки z и w являются концами диагонали.

.

Литература

1. Избранные вопросы математики, 10 класс: факультативный курс / [А.М. Абрамов и др.; сост. С.И. Шварцбурд]; под ред. В.В. Фирсова. М.: Просвещение, 1980. 192 с.
2. Седова Е.А., Пчелинцев С.В. Комплексные числа в школьном математическом образовании: геометрия комплексных чисел (базовый уровень) / Е.А. Седова, С.В. Пчелинцев, Л.Н. Удовенко // Математика в школе. 2019. №1. С. 26–40.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ