Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Рекурсия: рекуррентные формулы

Е.А. Седова, к.п.н.,

проф. кафедры элементарной математики

Рекурсия: рекуррентные формулы

ПЛАН

- Понятие последовательности. Числовые последовательности.
- Рекурсия. Рекуррентное задание числовой последовательности.
- Арифметическая прогрессия.
- Геометрическая прогрессия.
- Арифметико-геометрическая прогрессия.
- Последовательность Фибоначчи.

Понятие последовательности

Пусть $\mathfrak{M}$ – данное (конечное или бесконечное) множество элементов

$$a, d, c, \ldots .$$

Если каждому числу натурального ряда

$$1, 2, 3, \ldots$$

поставлен в соответствие некоторый элемент множества $\mathfrak{M}$, то говорят, что задана **последовательность** элементов данного множества.

Понятие последовательности

Определение. *Функция, для которой областью определения является множество всех натуральных чисел, называется последовательностью (бесконечной).*

Обозначения:

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, f(3) = u_3, \ldots, f(n) = u_n, \ldots .$$

Последовательность $\{u_n\}$:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots .$$

Понятие последовательности

Определение. *Функция, для которой областью определения является множество всех целых чисел, называется двусторонней последовательностью.*

Обозначение:

$$\dots, u_{-n}, \dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots, u_n, \dots .$$

Определение. *Функция, для которой областью определения является множество n первых натуральных чисел, называется конечной последовательностью.*

Обозначение:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n.$$

Понятие последовательности

Пример 1. Последовательность рациональных приближённых значений с недостатком числа $\sqrt{2}$:

$$1, \quad 1{,}4, \quad 1{,}41, \quad 1{,}414, \quad 1{,}4142, \ldots .$$

Пример 2. Десятичные знаки числа π:

$$3, \qquad 1, \qquad 4, \qquad 1, \qquad 5, \qquad 9, \qquad 2, \ldots .$$

Понятие последовательности

Пример 3. Если взять правильный вписанный треугольник и удваивать его стороны, получается последовательность правильных многоугольников, вписанных в данную окружность. Периметры этих многоугольников образуют числовую последовательность.

Предел этой последовательности равен (по определению) длине окружности.

Понятие последовательности

П р и м е р 4. Если для иррационального числа $\sqrt{2}$ брать на числовой прямой пары точек, изображающие его приближённые значения с недостатком и с избытком, то отрезки с концами в этих точках образуют последовательность отрезков.

Общая точка всех этих отрезков – это точка, изображающая число $\sqrt{2}$.

Понятие последовательности

П р и м е р 5. Формула

$$u_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

определяет двустороннюю последовательность:

$$\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}, \ldots .$$

Числовые последовательности

Определение. *Последовательность* $\{u_n\}$ *называется числовой, если её членами являются числа.*

Если член u_n последовательности задаётся посредством некоторого аналитического выражения:

$$u_n = f(n),$$

где n – натуральный аргумент, то эта формула называется формулой общего члена последовательности.

Числовые последовательности

Заданием конечного множества первых членов последовательность не определяется однозначно.

В упражнениях, где по нескольким данным первым членам предлагается составить формулы общего члена последовательности, требуется подобрать по возможности простую, но не единственно возможную формулу общего члена.

Числовые последовательности

Пример 6. Найти следующее число в ряде

1, 2, 3, 4, ?, … .

Решение. Например,

если $u_n = n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$,

то

$$u_1 = 1,\ \ u_2 = 2,\ \ u_3 = 3, u_4 = 4,\ u_5 = 29.$$

Пример 7. Найти следующее число в ряде

1, 3, 5, 7, ?, … .

Правильный ответ: 33, потому что если

$$u_n = n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 23,$$

то

$$u_1 = 1,\ \ u_2 = 3,\ \ u_3 = 5, u_4 = 7,\ u_5 = 33.$$

Другое решение – на рисунке справа ☺.

Рекурсия. Рекуррентное задание числовой последовательности

Формула

$$u_n = f(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$$

Выражающая u_n через члены последовательности с меньшим номером, называется **рекуррентной формулой**.

Рекуррентное соотношение может быть задано **рекуррентным уравнением**:

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0.$$

Рекурсия. Рекуррентное задание числовой последовательности

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ -- некоторое аналитическое выражение от аргументов $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Рассмотрим произвольную (допустимую) систему значений аргументов

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_k = a_k.$$

Рекурсия. Рекуррентное задание числовой последовательности

Последовательность $\{u_n\}$, определяемая системой уравнений

$$u_1 = a_1, u_2 = a_2, \dots, u_k = a_k,$$

$$u_{k+1} = f(u_1, u_2, \dots, u_k),$$

$$u_{k+2} = f(u_2, u_3, \dots, u_{k+1}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_{k+n} = f(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

называется последовательностью, заданной **рекуррентной формулой**:

$$u_{k+n} = f(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}).$$

Арифметическая прогрессия

Определение. *Арифметической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентной формулой*

$$u_n = u_{n-1} + d.$$

Иными словами,

арифметическая прогрессия есть последовательность, в которой всякий последующий член равен предыдущему, сложенному с данным числом *d*. Число *d* называется **разностью прогрессии**.

Арифметическая прогрессия

Теорема. *Общий член арифметической прогрессии выражается формулой*

$$u_n = u_1 + d(n-1).$$

Теорема. *Для всякой арифметической прогрессии при любом натуральном k имеет место равенство*

$$u_n + u_m = u_{n+k} + u_{m-k}.$$

Следствие. *В конечной арифметической прогрессии*

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

сумма двух членов, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов

$$u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n.$$

Арифметическая прогрессия

Теорема. *Характеристическим свойством арифметической прогрессии является выполнение соотношения:*

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}.$$

То есть всякий член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов.

Геометрическая прогрессия

Определение. *Геометрической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентной формулой*

$$u_n = u_{n-1}q, \text{ где } q \neq 0.$$

Иными словами,

геометрическая прогрессия есть последовательность, в которой всякий последующий член равен предыдущему, умноженному на данное число q, отличное от нуля. Число q называется **знаменателем прогрессии**.

Геометрическая прогрессия

Теорема. *Общий член геометрической прогрессии выражается формулой*

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Теорема. *Для всякой геометрической прогрессии при любом натуральном k имеет место равенство*

$$u_n u_m = u_{n+k} u_{m-k}.$$

Следствие. *В конечной геометрической прогрессии*

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

произведение двух членов, равноотстоящих от концов, равно произведению крайних членов

$$u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n.$$

Геометрическая прогрессия

Теорема. *Характеристическим свойством знакоположительной геометрической прогрессии является выполнение соотношения:*

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}u_{n+1}}.$$

То есть всякий член знакоположительной геометрической прогрессии есть среднее геометрическое предыдущего и последующего членов.

Арифметико-геометрическая прогрессия

Определение. *Арифметико-геометрической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентной формулой*

$$u_n = u_{n-1}q + d, \text{ где } q \neq 0, 1, d \neq 0.$$

Иными словами,

арифметико-геометрическая прогрессия есть последовательность, в которой всякий последующий член равен предыдущему, умноженному на данное число q, отличное от нуля, и сложенное с числом d.

Арифметико-геометрическая прогрессия

Теорема. *Общий член арифметико-геометрической прогрессии выражается формулой*

$$u_{n+1} = q^{n-1}\left(u_1 + \frac{d}{q-1}\right) - \frac{d}{q-1}.$$

Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи определяются рекуррентной формулой

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

и начальными условиями $u_0 = 1, u_1 = 1.$

По этой формуле получаем:

$$u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 8, u_6 = 13, u_7 = 21 \text{ и т.д.}$$

Числа Фибоначчи

Теорема. *Общий член последовательности чисел Фибоначчи выражается формулой*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ