Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Рекурсия: линейные рекуррентные соотношения

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Рекурсия: рекуррентные формулы

ПЛАН

- Линейные рекуррентные соотношения.
- Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка.
- Характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения.
- Решение линейных однородных рекуррентных соотношений второго порядка.
- Линейные рекуррентные соотношения произвольного порядка.

Немного истории

В «Книге абака» итальянского математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи), которую он издал в 1202 г., есть задача о кроликах.

Задача. У одного человека была пара кроликов, которую он поместил в огороженном месте, и этот человек хочет знать, сколько кроликов будет у него через год, если каждый месяц пара кроликов производит на свет другую пару (самца и самку), новорожденная пара начинает приносить приплод через два месяца после рождения, и кролики никогда не умирают.

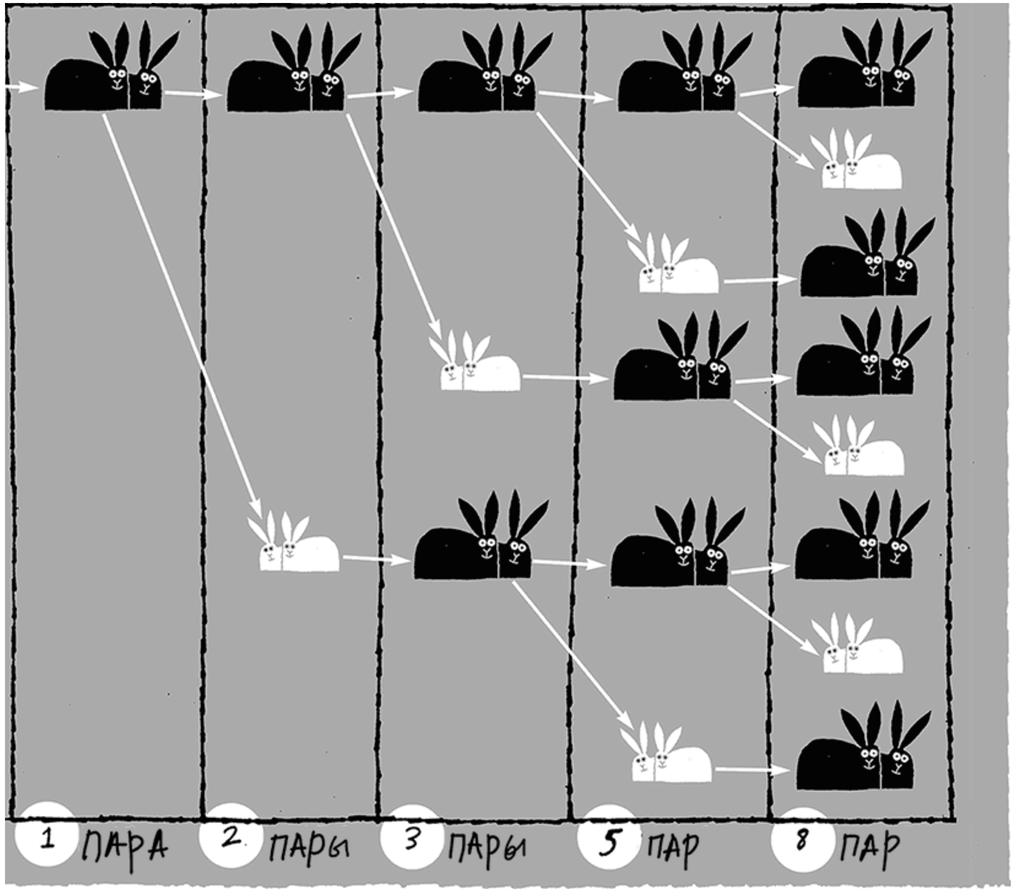
Немного истории

На рисунке взрослые пары кроликов изображены чёрными, а новорождённые – белыми.

Через месяц первая пара принесёт приплод: станет 2 пары кроликов (на рисунке во втором столбце – 1 крупная чёрная и 1 маленькая беленькая пара кроликов);

через 2 месяца принесёт приплод одна пара (первая), а вторая повзрослеет: станет 3 пары и из них 2 (на рисунке они изображены черными) принесут потомство в следующем месяце; …

Эта цепочка рассуждений даёт 12 чисел: 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377.



Немного истории

$$y_1 = 2, y_2 = 3,$$
$$y_3 = y_1 + y_2 = 5,$$
$$y_4 = y_2 + y_3 = 8,$$
$$y_5 = y_3 + y_4 = 13,$$
$$y_6 = y_4 + y_5 = 21,$$
$$y_7 = y_5 + y_6 = 34,$$
$$y_8 = y_6 + y_7 = 55,$$
$$y_9 = y_7 + y_8 = 89,$$
$$y_{10} = y_8 + y_9 = 144,$$
$$y_{11} = y_9 + y_{10} = 233,$$
$$y_{12} = y_{10} + y_{11} = 377.$$

Линейные рекуррентные соотношения

- Правило построения рекуррентной последовательности называют **рекуррентным (возвратным) уравнением**, а формулу общего члена – **(общим) решением уравнения**;
- как и в случае алгебраических уравнений, если все переменные входят в уравнение в первой степени, то его называют **линейным уравнением**;
- если при этом свободных членов в формуле нет, получится линейное **однородное** уравнение;
- наконец, в зависимости от числа переменных, различают **рекуррентные уравнения первого порядка**, **второго порядка**, …, ***k*-го порядка**.

Линейные рекуррентные соотношения

Примеры.

- $y_{n+1} = qy_n$ – рекуррентное уравнение всех геометрических прогрессий со знаменателем $q \neq 0$;
- $y_n = y_1 \cdot q^{n-1}$ – формула общего члена геометрической прогрессии (решение рекуррентного уравнения);
- $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$ – линейное однородное уравнение второго порядка;
- $y_{n+1} = y_n + \Delta$ – линейное неоднородное уравнение первого порядка;
- $y_{n+1} = qy_n$ – линейное однородное уравнение первого порядка $(q \neq 0)$;
- $y_{n+3} = ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n$ – линейное однородное уравнение третьего порядка $(c \neq 0)$.

Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка

Задача. Доказать, что для каждого рекуррентного уравнения второго порядка $y_{n+2} = ay_{n+1} + by_n$ существует бесконечно много числовых последовательностей, которые ему удовлетворяют.

Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка

Задача. Доказать, что для каждого рекуррентного уравнения второго порядка $y_{n+2} = ay_{n+1} + by_n$ существует бесконечно много числовых последовательностей, которые ему удовлетворяют.

Решение. Числовые последовательности считаются различными, если они отличаются хотя бы одним членом. Так как для выбора первого числа существует бесконечно много вариантов – это может быть любое натуральное число, – то для каждого рекуррентного уравнения второго порядка существует бесконечно много числовых последовательностей, которые ему удовлетворяют.

Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка

З а д а ч а . Доказать, что рекуррентное уравнение второго порядка $y_{n+2} = ay_{n+1} + by_n$ и два первых числа однозначно определяют числовую последовательность.

Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка

З а д а ч а . Доказать, что рекуррентное уравнение второго порядка

$$y_{n+2} = ay_{n+1} + by_n$$

и два первых числа однозначно определяют числовую последовательность.

Решение. Пусть $n = 1$; тогда уравнение принимает вид $y_3 = ay_2 + by_1$. Следовательно, зная числа y_1 и y_2, можно вычислить y_3.

Если мы возьмём $n = 2$, то найдём $y_4 = ay_3 + by_2$.

Следовательно, если известны числа

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n,$$

то можно вычислить y_{n+1}:

$$y_{n+1} = ay_n + by_{n-1}.$$

Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка

З а д а ч а . Рекуррентным уравнением $y_{n+2} = y_{n+1} + 6y_n$ заданы две числовые последовательности:

$$\{a_n\}: 1, 2, 8, 20, 68, \dots \text{ и } \{b_n\}: 1, 3, 9, 27, 81, \dots .$$

Доказать, что последовательность

$$\{c_n\}: c_n = Aa_n + Bb_n$$

при любых числах A и B удовлетворяет тому же уравнению.

Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка

З а д а ч а . Рекуррентным уравнением $y_{n+2} = y_{n+1} + 6y_n$ заданы две числовые последовательности:

$$\{a_n\}\text{: } 1, 2, 8, 20, 68, \dots \text{ и } \{b_n\}\text{: } 1, 3, 9, 27, 81, \dots .$$

Доказать, что последовательность $\{c_n\}$: $c_n = Aa_n + Bb_n$ при любых числах *A* и *B* удовлетворяет тому же уравнению.

Решение. Рассмотрим любые три идущие один за другим члена последовательности $\{c_n\}$:

$$c_n = Aa_n + Bb_n,\ c_{n+1} = Aa_{n+1} + Bb_{n+1} \text{ и } c_{n+2} = Aa_{n+2} + Bb_{n+2}.$$

В последнем из них сделаем подстановки:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \text{ и } b_{n+2} = b_{n+1} + 6b_n,$$

и получим

$$c_{n+2} = Aa_{n+2} + Bb_{n+2} = A(a_{n+1} + 6a_n) + B(b_{n+1} + 6b_n) =$$
$$= (Aa_{n+1} + Bb_{n+1}) + 6(Aa_n + Bb_n) = c_{n+1} + 6c_n,$$

что последовательность $\{c_n\}$ удовлетворяет уравнению $c_{n+2} = c_{n+1} + 6c_n$, что и требовалось доказать.

Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка

З а д а ч а . Рекуррентным уравнением $y_{n+2} = y_{n+1} + 6y_n$ заданы три различные числовые последовательности:

$$\{a_n\}: 1, 2, 8, 20, 68, \ldots;$$

$$\{b_n\}: 1, 3, 9, 27, 81, \ldots;$$

$$\{c_n\}: 7, 13, 55, 133, 463, \ldots.$$

Найти такие числа A и B, что при любом натуральном n выполняется равенство $c_n = Aa_n + Bb_n$.

Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка

З а д а ч а . Рекуррентным уравнением $y_{n+2} = y_{n+1} + 6y_n$ заданы три различные числовые последовательности:

$\{a_n\}$: 1, 2, 8, 20, 68, … ; $\{b_n\}$: 1, 3, 9, 27, 81, … ; $\{c_n\}$: 7, 13, 55, 133, 463, … .

Найти такие числа *A* и *B*, что при любом натуральном *n* выполняется равенство $c_n = Aa_n + Bb_n$.

Решение. Числовая последовательность $\{Aa_n + Bb_n\}$ удовлетворяет данному рекуррентному уравнению (задача 3). Следовательно, если получится найти такие числа *A* и *B*, что первые два числа последовательности $\{Aa_n + Bb_n\}$ совпадут с числами c_1 и c_2, то остальные числа тоже совпадут (задача 2).

Составим систему двух уравнений с неизвестными A и B:

$$\begin{cases} A \cdot a_1 + B \cdot b_1 = c_1, \\ A \cdot a_2 + B \cdot b_2 = c_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} A + B = 7, \\ 2A + 3B = 13, \end{cases}$$

и получим $A = 8$, $B = -1$.

Таким образом, каждый член числовой последовательности $\{c_n\}$ может быть получен умножением соответствующего члена последовательности $\{a_n\}$ на 8 и вычитания соответствующего члена последовательности $\{b_n\}$:

$c_1 = 8a_1 - b_1$, $c_2 = 8a_2 - b_2$, … , $c_n = 8a_n - b_n$, … .

Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка

З а д а ч а . Найти геометрическую прогрессию, удовлетворяющую рекуррентному уравнению $y_{n+2} = y_{n+1} + 6y_n$.

Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка

З а д а ч а . Найти геометрическую прогрессию, удовлетворяющую рекуррентному уравнению $y_{n+2} = y_{n+1} + 6y_n$.

Решение. Возьмём произвольную геометрическую прогрессию

$$1, q, q^2, \ldots, q^n, q^{n+1}, q^{n+2}, \ldots \; (q \neq 0)$$

и подставим три её последовательные числа в заданное уравнение:

$$q^{n+2} = q^{n+1} + 6q^n.$$

Так как $q \neq 0$, это уравнение равносильно уравнению $q^2 = q + 6$, откуда $q = 3$ или $q = -2$, то есть нашлись две геометрические прогрессии, и их знаменатели – это корни квадратного уравнения с теми же коэффициентами, что и в данном рекуррентном уравнении.

Ответ: 1, 3, 9, 27, … и 1, –2, 4, –8, … .

Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка

Мы нашли две геометрические прогрессии, удовлетворяющие рекуррентному уравнению.

Остаётся выяснить, составляют ли они *базис*, то есть, можно ли из них скомбинировать любую последовательность, удовлетворяющую этому же рекуррентному уравнению.

Рассмотрим идею доказательства на конкретном примере.

Характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения

Задача. Рекуррентным уравнением $y_{n+2} = y_{n+1} + 6y_n$ задана последовательность

$$\{c_n\}\text{: } 7, 13, 55, 133, 463, \dots$$

и даны две различные геометрические прогрессии:

$$\{\alpha_n\}\text{: } 1, 3, 9, 27, \dots \text{ и } \{\beta_n\}\text{: } 1, -2, 4, -8, \dots ,$$

знаменатели которых $\alpha = 3$ и $\beta = -2$ – это корни алгебраического уравнения, коэффициенты которого равны соответствующим коэффициентам данного рекуррентного уравнения: $q^2 = q + 6$.

Найти такие числа A и B, что при любом натуральном n выполняется равенство $c_n = Aa_n + Bb_n$.

Характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения

Задача. Рекуррентным уравнением $y_{n+2} = y_{n+1} + 6y_n$ задана последовательность $\{c_n\}$: 7, 13, 55, 133, 463, … и даны две различные геометрические прогрессии:

$$\{\alpha_n\}: 1, 3, 9, 27, \ldots \text{ и } \{\beta_n\}: 1, -2, 4, -8, \ldots ,$$

знаменатели которых $\alpha = 3$ и $\beta = -2$ – это корни алгебраического уравнения, коэффициенты которого равны соответствующим коэффициентам данного рекуррентного уравнения: $q^2 = q + 6$.

Найти такие числа *A* и *B*, что при любом натуральном *n* выполняется равенство $c_n = Aa_n + Bb_n$.

Решение. Чтобы найти числа *A* и *B*, составим уравнения, которые получаются при *n* = 1 и при *n* = 2:

$$\begin{cases} A + B = 7, \\ 3A - 2B = 13, \end{cases}$$

откуда $A = -1$, $B = 8$.

Ответ: $A = -1$, $B = 8$.

Характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения

Заметим, что в составленной системе уравнений с неизвестными A и B:

$$\begin{cases} A \cdot a_1 + B \cdot b_1 = c_1, \\ A \cdot a_2 + B \cdot b_2 = c_2 \end{cases}$$

коэффициенты a_1, a_2, b_1, и b_2 – это не произвольные числа, а первые члены взятых нами геометрических прогрессий, то есть система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} A + B = c_1, \\ \alpha A + \beta B = c_2, \end{cases}$$

где α и β – это различные корни некоторого квадратного уравнения, то есть различные действительные или комплексные числа.

Характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения

Покажем, что эта система не имеет «плохих решений»:

- первое «плохое решение» – это отсутствие решения; оно получается, если коэффициенты при неизвестных пропорциональны (или *определитель* системы уравнений равен нулю), а свободные члены различны (*расширенный определитель* системы отличен от нуля). Этот случай невозможен в силу выбора чисел α и β, – они различны.
- второе «плохое решение» – это бесконечно много решений; оно получается, если пропорциональны и коэффициенты при неизвестных, и свободные члены (*определитель* и *расширенный определитель* оба равны нулю). Этот случай невозможен по той же причине, что и первый.

Характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения

Этот результат имеет очень полезное следствие. Так как общие члены геометрических последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ могут быть записаны формулами:

$$\alpha_n = 3^{n-1} \text{ и } \beta_n = (-2)^{n-1},$$

то и общий член любой последовательности, удовлетворяющей этому же рекуррентному уравнению, можно записать в общем виде. В нашем случае

$$c_n = (-1) \cdot 3^{n-1} + 8 \cdot (-2)^{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

Однако мы рассмотрели только случай, когда алгебраическое уравнение с теми же коэффициентами, что и рекуррентное, – то есть его **характеристическое** уравнение, – имеет два различных корня. Но что делать, если оно имеет совпавшие корни?

В таких случаях придётся поискать ещё одну «удобную» возвратную последовательность, которая вместе с геометрической прогрессией составит базис рекуррентного уравнения.

Характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения

Задача. Последовательность задана рекуррентным уравнением

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n;$$

его характеристическое уравнение $q^2 = 2q - 1$ равносильно уравнению $(q-1)^2 = 0$ и, следовательно, имеет два совпавших корня $\alpha = \beta = 1$. Доказать, что числовая последовательность

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

удовлетворяет данному рекуррентному уравнению.

Характеристическое уравнение линейного однородного рекуррентного соотношения

Задача. Последовательность задана рекуррентным уравнением $y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n$; его характеристическое уравнение $q^2 = 2q - 1$ имеет два совпавших корня $\alpha = \beta = 1$.

Доказать, что последовательность $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ удовлетворяет данному рекуррентному уравнению.

Решение. Выпишем три последовательных члена первой числовой последовательности:

$$n, (n+1), (n+2)$$

подставим их в рекуррентное уравнение:

$$(n+2) = 2(n+1) - n.$$

Так как это равенство выполняется при всех натуральных *n*:

$$(n+2) - 2(n+1) + n = 0,$$

то взятая числовая последовательность действительно удовлетворяет рекуррентному уравнению.

В общем случае можно доказать, что последовательности

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \ldots \text{ и } 1, 2\alpha, 3\alpha^2, \ldots, n\alpha^{n-1}, \ldots$$

составляют базис рекуррентного уравнения $y_{n+2} = 2\alpha y_{n+1} - \alpha^2 y_n$.

Решение линейных однородных рекуррентных соотношений второго порядка

Пусть дано рекуррентное уравнение второго порядка

$$y_{n+2} = ay_{n+1} + by_n$$

его характеристическое уравнение $q^2 = aq + b$ имеет два корня α и β.

Тогда если $\alpha \neq \beta$, то базис рекуррентного уравнения составляют последовательности

$$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \dots \text{ и } 1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-1}, \dots,$$

а его решение имеет вид $y_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$;

если $\alpha = \beta$, то базис рекуррентного уравнения составляют последовательности

$$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \dots \text{ и } 1, 2\alpha, 3\alpha^2, \dots, n\alpha^{n-1}, \dots$$

а его решение имеет вид $y_n = A\alpha^{n-1} + Bn\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(A + Bn)$.

Значения A и B можно выбрать так, чтобы y_1 и y_2 совпадали с первыми членами любой числовой последовательности, удовлетворяющей данному рекуррентному уравнению.

Теоремы о рекуррентных соотношениях

Рассмотрим линейное однородное рекуррентное соотношение второго порядка

$$y_{n+2} = a_1 y_{n+1} + a_2 y_n, \qquad a_2 \neq 0 \qquad (*)$$

$\lambda^2 = a_1\lambda + a_2$ – характеристическое уравнение,

λ_1, λ_2 – корни уравнения.

Теорема 1.

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда

1) $\forall c_1, c_2$ последовательность $y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (*).

2) Пусть $\{y_n\}$ – последовательность чисел, удовлетворяющая (*).

Тогда $\exists c_1, c_2$: $y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$.

Теоремы о рекуррентных соотношениях

Доказательство:

1) Возьмём c_1 и c_2 и рассмотрим числовую последовательность с общим членом $y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$.

Подставим y_{n+2}, y_{n+1} и y_n в соотношение (*):

$$c_1\lambda_1^{n+2} + c_2\lambda_2^{n+2} - a_1(c_1\lambda_1^{n+1} + c_2\lambda_2^{n+1}) - a_2(c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n) =$$

$$= \lambda_1^n(c_1\ \lambda_1^2 - a_1c_1\lambda_1 - a_2c_1) + \lambda_2^n(c_2\lambda_2^2 - a_1c_2\lambda_2 - a_2c_2) =$$

$$= \lambda_1^n c_1\ (\lambda_1^2 - a_1\lambda_1 - a_2) + \lambda_2^n c_2\,(\lambda_2^2 - a_1\lambda_2 - a_2) = 0.$$

Теоремы о рекуррентных соотношениях

Доказательство:

2) Пусть $\{y_n\}$ – некоторая последовательность чисел, удовлетворяющая (*).

Выразим первые два числа y_1 и y_2 через λ_1 и λ_2. Составим систему уравнений:

$$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = y_1;$$
$$c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 = y_2.$$

Эта система разрешима, так как её определитель не равен нулю ($\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$), c_1, c_2 – решение этой системы.

Построим последовательность чисел $y_n^* = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$. Что мы знаем?

$$y_1^* = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = y_1,$$
$$y_2^* = c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 = y_2.$$

Последовательность $\{y_n^*\}$, как и исходная $\{y_n\}$, удовлетворяет (*) – по п. 1 теоремы, так что $y_{n+2}^* = a_1 y_{n+1}^* + a_2 y_n^*$.

Следовательно, $\forall n\ y_n^* = y_n$, то есть общий член последовательности $\{y_n\}$ выражается формулой

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n.$$

Теоремы о рекуррентных соотношениях

П р и м е р. Найти формулу общего члена последовательности

$$y_{n+2} = 4y_{n+1} - 3y_n, y_1 = 2, y_2 = 4, n \in \mathbb{N}.$$

Теоремы о рекуррентных соотношениях

Пример. Найти формулу общего члена последовательности

$$y_{n+2} = 4y_{n+1} - 3y_n,\, y_1 = 2, y_2 = 4, n \in \mathbb{N}.$$

Решение:

Запишем характеристическое уравнение: $\lambda^2 = 4\lambda - 3$,

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ – его корни.

Формула общего члена имеет вид: $y_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 1^n$.

Чтобы найти неизвестные коэффициенты c_1 и c_2, составим систему уравнений:

$$y_1 = c_1 \cdot 3^1 + c_2 \cdot 1^1,$$
$$y_2 = c_1 \cdot 3^2 + c_2 \cdot 1^2.$$

Решение системы: 1/3, 1.

Ответ: $y_n = 3^{n-1} + 1$.

Теоремы о рекуррентных соотношениях

Теорема 2.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тогда

1) $\forall c_1, c_2$ последовательность $y_n = (c_1 n + c_2)\lambda^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (*).

2) Пусть $\{y_n\}$ – последовательность чисел, удовлетворяющая (*).

Тогда $\exists c_1, c_2$: $y_n = (c_1 n + c_2)\lambda^n$.

Числа Фибоначчи

З а д а ч а. Найти формулу общего члена последовательности Фибоначчи.

Числа Фибоначчи

З а д а ч а . Найти формулу общего члена последовательности Фибоначчи.

Решение. Обычно последовательность Фибоначчи начинают с двух единиц: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

Запишем рекуррентное уравнение: $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$.

Его характеристическое уравнение $q^2 = q + 1$ имеет два различных корня: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, общий член записывается в виде

$$y_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Чтобы подобрать коэффициенты A и B, составим систему уравнений

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1, \end{cases}$$

откуда $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Окончательно, $y_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

Числа Фибоначчи

Что часто ряд Фибоначчи начинают с нуля:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots,$$

в этом случае формула записывается «красивее»:

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right].$$

Линейные рекуррентные соотношения произвольного порядка

$$y_{n+k} = a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \cdots + a_k y_n,\ a_k \neq 0. \qquad (*)$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \cdots + a_{k-1}\lambda + a_k.$$

Корни уравнения:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k.$$

Различные корни уравнения:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m.$$

Кратность корней уравнения:

$$R_1, R_2, \ldots, R_m.$$

Линейные рекуррентные соотношения произвольного порядка

Теорема 3.

1) Пусть

$P_1(n)$ – произвольный многочлен от *n,* $\deg P_1(n) \le R_1 - 1$,

$P_2(n)$ – произвольный многочлен от *n,* $\deg P_2(n) \le R_2 - 1$,

…

$P_m(n)$ – произвольный многочлен от *n,* $\deg P_m(n) \le R_m - 1$.

Тогда числовая последовательность

$$y_n = P_1(n)\mu_1^n + P_2(n)\mu_2^n + \cdots + P_m(n)\mu_m^n$$

удовлетворяет соотношению (*).

2) Пусть числовая последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет (*).

Тогда $\exists P_1(n), P_2(n), P_m(n)$:

$$\forall i \ \deg P_i(n) \le R_i - 1 \text{ и } \ y_n = P_1(n)\mu_1^n + P_2(n)\mu_2^n + \cdots + P_m(n)\mu_m^n.$$

Частные случаи

1. Пусть $k = 1$.

Получаем рекуррентное соотношение первого порядка:

$$y_{n+1} = a_1 y_n, a_1 \neq 0.$$

$\lambda = a_1$ – характеристическое уравнение,

λ – корень уравнения,

$\mu_1 = \lambda$ – различные корни уравнения, $m = 1$.

Тогда $y_n = P_1(n)\mu_1^n$, где $\deg P_1(n) = 0$, так что

$y_n = c_1 \mu_1^n = c_1 \lambda^n$ (геометрическая прогрессия).

Частные случаи

2. Пусть $k = 2$.

Получаем рекуррентное соотношение второго порядка:

$$y_{n+2} = a_1 y_{n+1} + a_2 y_n, \qquad a_2 \neq 0 \qquad (*)$$

$\lambda^2 = a_1\lambda + a_2$ – характеристическое уравнение,

λ_1, λ_2 – корни уравнения.

2.1. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $m = 2$.

Различные корни уравнения: $\mu_1 = \lambda_1, \mu_2 = \lambda_2$.

Кратность корней уравнения: $R_1 = 1, R_2 = 1$.

Тогда $y_n = P_1(n)\mu_1^n + P_2(n)\mu_2^n$, где $\deg P_1(n) = 0$, $\deg P_2(n) = 0$, так что

$$y_n = c_1\mu_1^n + c_2\mu_2^n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \text{ (теорема 1).}$$

Частные случаи

2.2. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то $m = 1$.
Различные корни уравнения: $\mu_1 = \lambda$.
Кратность корней уравнения: $R_1 = 2$.
Тогда $y_n = P_1(n)\mu_1^n$, где $\deg P_1(n) \leq 1$, так что

$$y_n = (c_1 n + c_2)\mu_1^n = (c_1 n + c_2)\lambda^n \text{ (теорема 3).}$$

Если при этом $\lambda = 1$, то рекуррентное соотношение принимает вид

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n,$$
$$y_n = c_1 n + c_2 = (c_1 + c_2) + c_1(n-1)$$

(арифметическая прогрессия).

Частные случаи

3. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \lambda$, то $m = 1$.

Различные корни уравнения: $\mu_1 = \lambda$.

Кратность корней уравнения: $R_1 = k$.

Тогда $y_n = P_1(n)\mu_1^n$, где $\deg P_1(n) \leq k - 1$, так что

$$y_n = \left(c_0 n^{k-1} + c_1 n^{k-2} + \cdots + c_{k-1}\right)\mu_1^n =$$

$$= c_0\, n^{k-1} + c_1 n^{k-2} + \cdots + c_{k-1} \text{(по мотивам теоремы 1).}$$

Линейные рекуррентные соотношения произвольного порядка

Пример. Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$y_{n+3} = 3y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n.$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^3 = 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$.

Корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Формула общего члена имеет вид

$$y_n = c_0 n^2 + c_1 n + c_2.$$

а) Пусть $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$.

Тогда

$$c_0 \cdot 1^2 + c_1 \cdot 1 + c_2 = 1,$$
$$c_0 \cdot 2^2 + c_1 \cdot 2 + c_2 = 2,$$
$$c_0 \cdot 3^2 + c_1 \cdot 3 + c_2 = 3,$$

откуда $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$.

$$y_n = n \text{ – натуральный ряд.}$$

Линейные рекуррентные соотношения произвольного порядка

б) Пусть $y_1 = 3$, $y_2 = 7$, $y_3 = 13$.

Тогда

$$c_0 \cdot 1^2 + c_1 \cdot 1 + c_2 = 3,$$
$$c_0 \cdot 2^2 + c_1 \cdot 2 + c_2 = 7,$$
$$c_0 \cdot 3^2 + c_1 \cdot 3 + c_2 = 13,$$

откуда $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$.

$$y_n = n^2 + n + 1.$$

Задания для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1uRywr98wkCcLQd5gnbQSn6zyQCnCBe_oEKM9V8miL4A/edit?usp=sharing

Задание 1. Некто подошёл к лестнице из 12 ступенек. Сколькими способами он может подняться на последнюю ступеньку, если за один шаг будет подниматься на одну или две ступеньки вверх?

Задания для самостоятельного решения

Задание 2. Найти сотый член последовательности:

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = 6.$$

Задания для самостоятельного решения

Задание 3. Найти десятый член последовательности:

$$y_{n+2} = 7y_{n+1} - 12y_n,\ y_1 = -6, y_2 = -30.$$

Задания для самостоятельного решения

Задание 4. Найти тысячный член последовательности

$$y_{n+3} = 3y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n,\ y_1 = 1,\ y_2 = 3, y_3 = 5.$$

Задания для самостоятельного решения

Задание 5. Поделитесь, пожалуйста, вашим мнением

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ