Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Рекурсия: рекуррентные формулы

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Рекурсия: рекуррентные формулы

ПЛАН

- Арифметическая прогрессия.
- Геометрическая прогрессия.
- Арифметико-геометрическая прогрессия.
- Задачи, приводящие к рекуррентным уравнениям.

Арифметическая прогрессия

Определение. *Арифметической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентной формулой*

$$u_n = u_{n-1} + d.$$

Иными словами,

арифметическая прогрессия есть последовательность, в которой всякий последующий член равен предыдущему, сложенному с данным числом *d*. Число *d* называется **разностью прогрессии**.

Арифметическая прогрессия

Теорема. *Общий член арифметической прогрессии выражается формулой*

$$u_n = u_1 + d(n-1).$$

Арифметическая прогрессия

Теорема. *Общий член арифметической прогрессии выражается формулой*

$$u_n = u_1 + d(n - 1).$$

Доказательство (школьное). Рассмотрим арифметическую прогрессию, у которой известны первый член u_1 и разность d.

Из определения арифметической прогрессии следует:

$u_2 = u_1 + d,$

$u_3 = u_2 + d,$ $\qquad u_3 = u_2 + d = u_1 + 2d = u_1 + (3 - 1)d,$

$u_4 = u_3 + d,$ $\qquad u_4 = u_3 + d = (u_1 + 2d) + d = u_1 + (4 - 1)d,$

и так далее. В результате приходим к формуле

$$u_n = u_1 + (n - 1)d.$$

Арифметическая прогрессия

Теорема. *Общий член арифметической прогрессии выражается формулой*

$$u_n = u_1 + d(n-1).$$

Доказательство.

Для $n = 1$ формула верна: $u_2 = u_1 + d$ – это согласуется с определением арифметической прогрессии.

Предположим, что формула верна для некоторого n; тогда

$$u_{n+1} = u_n + d = u_1 + d(n -- 1) + d = u_1 + dn.$$

Итак,

(1) Формула верна для 1 и (2) будучи верной для n, формула верна для $n + 1$.

Следовательно, формула верна для любого натурального числа, что и следовало доказать.

Арифметическая прогрессия

Если начинать нумерацию членов последовательности с 0, то формула примет вид

$$u_n = u_0 + nd.$$

Формула общего члена показывает, что арифметическая прогрессия – это последовательность значений линейной функции

$$f(x) = u_0 + dx,$$

при $x = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Арифметическая прогрессия

Теорема. *Для всякой арифметической прогрессии при любом натуральном k имеет место равенство*

$$u_n + u_m = u_{n+k} + u_{m-k}. \qquad (*)$$

Арифметическая прогрессия

Теорема. *Для всякой арифметической прогрессии при любом натуральном k имеет место равенство*

$$u_n + u_m = u_{n+k} + u_{m-k}.$$

Доказательство. По формуле общего члена составим равенства для вычисления u_{n+k} и u_{m-k} .

Получим:

$$u_{n+k} = u_0 + (n + k)d \text{ и } u_{m-k} = u_0 + (m - k)d,$$

их сумма равна:

$$u_{n+k} + u_{m-k} = u_0 + (n + k)d + u_0 + (m - k)d = u_0 + nd + u_0 + md = u_n + u_m,$$

что и следовало доказать.

Арифметическая прогрессия

Следствие. *В конечной арифметической прогрессии*

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

сумма двух членов, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов

$$u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n.$$

Пример.

1	2	3	…	*k*	…	98	99	100
100	99	98	…	100 -- *k* + 1	…	3	2	1

Это основное свойство арифметической (разностной) пропорции:

$$a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c,$$

то есть сумма её крайних членов равна сумме средних членов.

Арифметическая прогрессия

Теорема. *Характеристическим свойством арифметической прогрессии является выполнение соотношения:*

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}. \qquad (**)$$

То есть всякий член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов.

Арифметическая прогрессия

Теорема. *Характеристическим свойством арифметической прогрессии является выполнение соотношения:*

$$u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}. \qquad (**)$$

Доказательство.

1. ⇒. Возьмём арифметическую прогрессию $\{u_n\}$. Для неё справедливо тождество (*):

$$u_n + u_m = u_{n+k} + u_{m-k} \qquad (*)$$

Положим в этом тождестве $m = n$ и $k = 1$ и получим формулу (**).

2. ⇐. Возьмём любую последовательность $\{u_n\}$, удовлетворяющую тождеству (**). Перепишем это тождество в виде

$$u_n - u_{n-1} = u_{n+1} - u_n.$$

Это равенство показывает, что разность между предыдущим и последующим членом этой последовательности – одно и то же число. Обозначим его d.

Следовательно, существует такое число d, что для любого натурального n выполняется равенство $u_n = u_{n-1} + d$, то есть последовательность является арифметической прогрессией. Теорема доказана.

Задачи на прогрессии

Задача 1. Жабёнок сделал несколько прыжков, но поскольку с каждым прыжком у него оставалось меньше сил, то каждый следующий прыжок был на одну и ту же величину короче предыдущего. Общая длина первых трёх прыжков равна 21 жабному футу, последних трёх – 12 жабным футам, а общая длина всех прыжков – 44 жабных фута. Сколько прыжков сделал жабёнок?

Геометрическая прогрессия

Определение. *Геометрической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентной формулой*

$$u_n = u_{n-1}q, \text{ где } q \neq 0.$$

Геометрическая прогрессия

Теорема. *Общий член геометрической прогрессии выражается формулой*

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Геометрическая прогрессия

Теорема. *Общий член геометрической прогрессии выражается формулой*

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Доказательство (школьное). Рассмотрим геометрическую прогрессию, у которой известны первый член u_1 и знаменатель q.

Из определения геометрической прогрессии следует:

$u_2 = u_1 \cdot q,$

$u_3 = u_2 \cdot q,$ $\qquad u_3 = u_2 \cdot q = u_1 \cdot q^2 = u_1 \cdot q^{3 - 1},$

$u_4 = u_3 \cdot q,$ $\qquad u_4 = u_3 \cdot q = u_1 \cdot q^2 \cdot q = u_1 \cdot q^{4 - 1},$

и так далее. Отсюда получаем формулу

$$u_n = u_1 \cdot q^{n - 1}.$$

Геометрическая прогрессия

Теорема. *Общий член геометрической прогрессии выражается формулой*

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Доказательство.

Для n = 1 формула верна: $u_2 = u_1 q$ – это согласуется с определением геометрической прогрессии.

Предположим, что формула верна для некоторого n; тогда

$$u_{n+1} = u_n q = u_1 \cdot q^{n - 1} \cdot q = u_1 \cdot d^n.$$

Итак,

(1) Формула верна для 1 и (2) будучи верной для n, формула верна для $n + 1$.

Следовательно, в силу принципа математической индукции формула верна для любого натурального числа, что и следовало доказать.

Геометрическая прогрессия

Теорема. *Для всякой геометрической прогрессии при любом натуральном k имеет место равенство*

$$u_n u_m = u_{n+k} u_{m-k}.$$

Геометрическая прогрессия

Теорема. *Для всякой геометрической прогрессии при любом натуральном k имеет место равенство*

$$u_n u_m = u_{n+k} u_{m-k}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле общего члена составим равенства для вычисления u_{n+k} и u_{m-k} .

Получим:

$$u_{n+k} = u_0 \cdot q^{n+k} \text{ и } u_{m-k} = u_0 \cdot q^{m-k},$$

их произведение равно:

$$u_{n+k} \cdot u_{m-k} = u_0 q^{n+k} \cdot u_0 q^{m-k} = u_0 q^n \cdot u_0 q^m = u_n \cdot u_m ,$$

что и следовало доказать.

Геометрическая прогрессия

Следствие. *В конечной геометрической прогрессии*

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

произведение двух членов, равноотстоящих от концов, равно произведению крайних членов

$$u_k u_{n-k} = u_0 u_n.$$

Пример.

1	q^1	q^2	…	q^k	…	q^{98}	q^{99}	q^{100}
q^{100}	q^{99}	q^{98}	…	$q^{100 -- k + 1}$	…	q^2	q^1	1

Это основное свойство геометрической пропорции:

$$a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc,$$

то есть произведение её крайних членов равна произведению средних членов.

Геометрическая прогрессия

Теорема. *Характеристическим свойством знакоположительной геометрической прогрессии является выполнение соотношения:*

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}u_{n+1}}.$$

То есть всякий член знакоположительной геометрической прогрессии есть среднее геометрическое предыдущего и последующего членов.

Геометрическая прогрессия

Теорема. *Характеристическим свойством знакоположительной геометрической прогрессии является выполнение соотношения:*

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}u_{n+1}}.$$

Доказательство.

1. ⇒. Возьмём знакоположительную геометрическую прогрессию $\{u_n\}$. Для неё справедливо тождество:

$$u_n u_m = u_{n+k} u_{m-k}$$

Положим $m = n$ и $k = 1$ и после извлечения квадратного корня получим нужную формулу.

2. ⇐. Возьмём любую знакоположительную последовательность $\{u_n\}$, удовлетворяющую данному в условии тождеству. Перепишем это тождество в виде

$$u_n : u_{n-1} = u_{n+1} : u_n.$$

Полученное равенство показывает, что отношение всякого последующего члена к предыдущему постоянно. Обозначим его q.

Следовательно, существует такое число q, что для любого натурального n выполняется равенство $u_n = u_{n-1}q$, то есть последовательность является геометрической прогрессией. Теорема доказана.

Геометрическая прогрессия

П р и м е р. Колония бактерий в чашке Петри удваивается каждые 40 минут. Если рассматривать последовательность промежутков времени по 40 минут каждый, то рост популяции бактерий будет описывать рекуррентная формула

$$u_{n+1} = 2\,u_n.$$

Арифметико-геометрическая прогрессия

Определение. *Арифметико-геометрической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентной формулой*

$$u_n = u_{n-1}q + d, \text{ где } q \neq 0, 1, d \neq 0.$$

Иными словами,

арифметико-геометрическая прогрессия есть последовательность, в которой всякий последующий член равен предыдущему, умноженному на данное число q, отличное от нуля, и сложенное с числом d.

Арифметико-геометрическая прогрессия

П р и м е р . Пусть цена некоторого товара растёт на 1% в месяц. Как изменяется это приращение в *n*-м месяце в процентах от начальной цены товара?

Р е ш е н и е . Обозначим начальную цену товара P_0. Тогда цена по сравнению с предыдущим месяцем выражается формулой:

$$P_{n+1} = 1{,}01P_n\ ,$$

приращение цены в процентах в *n*-м месяце:

$$u_n = 100\frac{P_n - P_0}{P_0}\ .$$

В следующем месяце приращение составит

$$u_{n+1} = 100\,\frac{P_{n+1} - P_0}{P_0} = 100\,\frac{1{,}01P_n - P_0}{P_0} = 100\,\frac{1{,}01P_n}{P_0} - 100 = \left(100\,\frac{P_n}{P_0}\right)\cdot 1{,}01 - 100 =$$

$$= \left(100\,\frac{P_n - P_0}{P_0} + 100\right)\cdot 1{,}01 - 100 = \left(100\,\frac{P_n - P_0}{P_0}\right)\cdot 1{,}01 + 101 - 100,$$

то есть $\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}01u_n + 1 \\ u_0 = 0. \end{cases}$

Арифметико-геометрическая прогрессия

Заменим формально номер *n* номером *n* + 1:

$$u_{n+1} = 1{,}01u_n + 1$$
$$u_{n+2} = 1{,}01u_{n+1} + 1$$

И вычтем одно уравнение из другого:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 1{,}01u_{n+1} - 1{,}01u_n,$$
$$u_{n+2} = 2{,}01u_{n+1} - 1{,}01u_n,$$

то есть это уравнение можно представить в виде линейного однородного уравнения второго порядка.

Арифметико-геометрическая прогрессия

Определение.

$\{y_n\}$ – арифметико-геометрическая прогрессия $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\underset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists a \in \mathbb{R}, a \neq 0, a \neq 1, \exists b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N})\ \ y_n = ay_n + b.$

Свойство арифметико-геометрической прогрессии.

$$\forall \{y_n\}: \quad y_{n+1} = ay_n + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0,$$

$\exists \lambda \in \mathbb{R} : y_n^* = y_n - \lambda$ -- геометрическая прогрессия.

Это число λ -- решение уравнения $\lambda = a\lambda + b$.

Арифметико-геометрическая прогрессия

Рассмотрим соотношение $y_{n+1} = 2y_n - 5$.

Найдём корень характеристического уравнения: $\lambda = 2\lambda - 5 \Leftrightarrow \lambda = 5$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ одновременно выполняются равенства: $y_{n+1} = 2y_n - 5$ и $5 = 2 \cdot 5 - 5$.

Вычитая второе равенство из первого, получаем: $y_{n+1} - 5 = 2(y_n - 5\,)$,

то есть последовательность $\{y_n^*\}$ с общим членом $y_n^* = y_n - 5$ есть геометрическая прогрессия.

Её знаменатель $q = 2$, а первый член можно найти, подставив в это соотношение первое число последовательности $\{y_n\}$:

$$y_1^* = y_1 - 5 = -4.$$

Поэтому общий член геометрической прогрессии $\{y_n^*\}$ вычисляется по формуле

$$y_n^* = (-4) \cdot 2^{n-1},$$

а тогда

$$y_n = y_n^* + 5 = (-4) \cdot 2^{n-1} + 5 = -2^{n+1} + 5.$$

Задачи

Задача 2. Рассмотрим множество последовательностей длины n, состоящих из нулей и единиц, в которых никакие две единицы не идут подряд. Доказать, что количество таких последовательностей равно f_{n+2}, где f_n – последовательность Фибоначчи.

Задачи

З а д а ч а 2 . Рассмотрим множество последовательностей длины n, состоящих из нулей и единиц, в которых никакие две единицы не идут подряд. Доказать, что количество таких последовательностей равно f_{n+2}, где f_n – последовательность Фибоначчи.

Р е ш е н и е . Обозначим количество слов длины n, состоящих только из 0 и 1 и не содержащих в записи двух единиц подряд, через y_n.

Непосредственно находим $y_1 = 2$, $y_2 = 3$.

Рассмотрим слово длины n. Его последним символом может быть как 0, так и 1.

Если последний символ 0, то ему может предшествовать любое слово длины $n – 1$, не содержащее двух единиц подряд. Количество таких слов равно y_{n-1}.

Если последний символ 1, то ему может предшествовать только 0, а перед ним может стоять любое слово длины $n – 2$, не содержащее двух единиц подряд. Количество таких слов равно y_{n-2}. Таким образом, $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$.

Мы получили последовательность Фибоначчи, «сдвинутую» на два номера вправо, что и следовало доказать.

Задачи

Задача 3. Найти количество слов длины 10, состоящих только из букв «а» и «б» и не содержащих в записи двух букв «б» подряд.

Задачи

З а д а ч а . Найти количество слов длины 10, состоящих только из букв «а» и «б» и не содержащих в записи двух букв «б» подряд.

Р е ш е н и е . Обозначим количество слов длины n, состоящих только из букв «а» и «б» и не содержащих в записи двух букв «б» подряд, через y_n.

Непосредственно находим $y_1 = 2$, $y_2 = 3$.

Рассмотрим слово длины n. Его последней буквой может быть как буква «а», так и буква «б».

Если последняя буква «а», то ему может предшествовать любое слово длины $n – 1$, не содержащее двух «б» подряд. Количество таких слов равно y_{n-1}.

Если последняя буква «б», то ему может предшествовать только буква «а», а перед ней может стоять любое слово длины $n – 2$, не содержащее двух «б» подряд. Количество таких слов равно y_{n-2}.

Таким образом, $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$.

Теперь последовательно вычисляем (или применяем формулу):

$y_3 = y_2 + y_1 = 3 + 2 = 5$, $y_4 = y_3 + y_2 = 5 + 3 = 8$, …, $y_{10} = 144$.

Заметим, что мы получили последовательность Фибоначчи, «сдвинутую» на два номера вправо.

Ответ: 144.

Задачи

Задача 4. Жабёнок прыгает по вершинам шестиугольника, перепрыгивая за один прыжок на соседнюю вершину. Прогулка начинается и заканчивается в одной и той же вершине. Сколькими способами можно совершить эту прогулку?

Задачи

Решение.

Обозначим вершины шестиугольника буквами *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F*.

Прогулка, состоящая из одного прыжка, из *A* в *A* не существует, то есть число способов равно 0, а такие случаи мы не рассматриваем. Прогулку из двух прыжков из *A* в *A* можно совершить двумя способами, а из *A* в *C* – одним. Осталось выяснить, выполняется ли это неравенство для прогулок большей длины.

Рассмотрим числа A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n – это число различных прогулок длиной *n* прыжков, которые ведут из *A* соответственно в *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F*, и сразу же сделаем замечание по поводу «симметрии» прогулок.

Замечание. Вершины B_n и F_n, D_n и E_n расположены «симметрично» относительно вершины A, поэтому $B_n = F_n$, $D_n = E_n$.

Выпишем рекуррентные уравнения и упростим их с учётом симметрии:

$A_n = B_{n-1} + F_{n-1} = 2B_{n-1}$,

$B_n = A_{n-1} + C_{n-1} = F_n$,

$C_n = D_{n-1} + B_{n-1}$,

$D_n = C_{n-1} + E_{n-1} = 2C_{n-1} = E_n$.

Мы получили систему уравнений, которую назовём (*):

$$\begin{cases} A_n = 2B_{n-1}, \\ B_n = A_{n-1} + C_{n-1}, \\ C_n = D_{n-1} + B_{n-1}, \\ D_n = 2C_{n-1}. \end{cases}$$

Задачи

Чтобы узнать число способов совершить первую прогулку, надо выразить A_n – число прогулок длиной *n* прыжков – через числа прогулок меньшей длины.

Из первого уравнения можно выразить B_{n-1} через A_n и, соответственно меняя индексы, B_n через A_{n+1}:

$B_{n-1} = \frac{1}{2} A_n, B_n = \frac{1}{2} A_{n+1},$

после чего, внимательно следя за индексами, переходим к системе (*) трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} A_{n+1} = A_{n-1} + C_{n-1}, \\ C_n = D_{n-1} + \frac{1}{2} A_n, \\ D_n = 2C_{n-1}. \end{cases}$$

Задачи

Затем из четвёртого уравнения выразим D_n через C_{n-1} и, соответственно, D_{n-1} через C_{n-2}:

$$D_n = 2C_{n-1}, D_{n-1} = 2C_{n-2},$$

чтобы перейти к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}A_{n+1} = A_{n-1} + C_{n-1}, \\ C_n = 2C_{n-2} + \frac{1}{2}A_n. \end{cases}$$

Задачи

Теперь из первого уравнения выражаем C_{n-1} через A_{n+1} и A_{n-1}, находим соответствующие выражения для C_n и C_{n-2}:

$$C_{n-1} = \frac{1}{2} A_{n+1} - A_{n-1},$$

$$C_n = \frac{1}{2} A_{n+2} - A_n, C_{n-2} = \frac{1}{2} A_n - A_{n-2},$$

подставляем их в третье уравнение системы:

$$\frac{1}{2} A_{n+2} - A_n = 2\left(\frac{1}{2} A_n - A_{n-2}\right) + \frac{1}{2} A_n = \frac{3}{2} A_n - 2A_{n-2},$$

откуда $\frac{1}{2} A_{n+2} = \frac{5}{2} A_n - 2A_{n-2}$, и окончательно получаем уравнение

$$A_{n+2} = 5A_n - 4A_{n-2}$$

или, чтобы начинать отсчет с единицы, $A_{n+4} = 5A_{n+2} - 4A_n$.

Задачи

По этому правилу можно найти число способов совершить прогулку из *n* + 2 прыжков, если известно число способов совершить прогулки из *n* и *n* – 2 прыжков. А это значит, что формула «работает», начиная с 5-го номера, а значения A_1, A_2, A_3 и A_4 придётся найти «вручную», чем мы сейчас и займёмся.

Прогулки длиной в 1 и 3 прыжка, которые начинаются и заканчиваются в одной и той же вершине, не существуют, поэтому $A_1 = A_3 = 0$.

Для прогулки из двух прыжков есть два способа: $A \to B \to A$ и $A \to C \to A$, откуда $A_2 = 2$.

Для прогулки из четырёх прыжков есть 6 способов:

$A \to B \to C \to B \to A$, $A \to B \to A \to B \to A$, $A \to B \to A \to F \to A$

и «симметричные» им маршруты, то есть $A_4 = 6$.

Значит, число способов совершить первую прогулку описывается так:

$A_1 = 0$, $A_2 = 2$, $A_3 = 0$, $A_4 = 6$, $A_{n+4} = 5A_{n+2} - 4A_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Задания для самостоятельного решения

Ссылка:
https://docs.google.com/forms/d/1PXV44MyqwsR2HMh6J2koR3HbIfHAbUXeI5MYpvJwQrg/edit?usp=sharing

З а д а н и е 1. (1 б) Дана последовательность $\{u_n\}$ квадратов натуральных чисел:

1, 4, 9, 16, …

Выберите все способы, которыми можно определить эту последовательность :

(1) $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$

(2) $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ и $u_1 = 1$

(3) $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$ и $u_1 = 1$

(4) $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$ и $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 9$

(5) $u_n = n^2$

Задания для самостоятельного решения

Задание 2. (1 б) Выберите формулу общего члена для последовательности, заданной условиями

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_{n+2} = 3u_n \ (n \in \mathbb{N}).$$

(1) $u_n = \frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^n - \frac{1}{6} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^n$

(2) $u_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{3} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^n$

(3) $u_n = \frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{6} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^n$

(4) $u_n = \frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{6} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^{n-1}$

Задания для самостоятельного решения

З а д а н и е 3. (2 б) Числовая последовательность составлена таким образом, что каждое натуральное число *n* повторяется в ней *n* раз:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots$$

Вычислите сотый член этой последовательности.

З а д а н и е 4. (2 б) Феофил поднимается по лестнице из 10 ступенек. За один раз он прыгает вверх либо на одну ступеньку, либо на две ступеньки. Сколькими способами Феофил может подняться по лестнице?

З а д а н и е 5. (4 б) Жабёнок прыгает по вершинам треугольника, перепрыгивая за один прыжок на соседнюю вершину. Сколькими способами он может совершить прогулку из 14 прыжков, начав и закончив её в одной и той же вершине?

КОНЕЦ СЕМИНАРА