Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Рекурсия: рекуррентные формулы

Е.А. Седова, к.п.н.,

проф. кафедры элементарной математики

Рекурсия: рекуррентные формулы

ПЛАН

- Финансовые задачи ЕГЭ.
- Задачи на прогрессии.
- Задачи, приводящие к рекуррентным уравнениям.

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Финансовые задачи ЕГЭ

Задача 1.

В июле 2022 года планируется взять кредит на сумму 419 375 рублей. Условия возврата таковы:

— в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с предыдущим годом;

— с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Финансовые задачи ЕГЭ

Решение

Пусть $S = 419\ 375$ — сумма кредита (руб.),

x — ежегодный платеж (руб.),

$k = 1 + \frac{20}{100} = 1{,}2.$

Тогда схема выплаты кредита выглядит так:

$$\Big(\big((S \cdot k - x) \cdot k - x\big) \cdot k - x\Big) \cdot k - x = 0;$$

$$Sk^4 - k^3x - k^2x - kx - x = 0,$$

откуда

$$x = \frac{Sk^4}{k^3+k^2+k+1} = \frac{419\ 375 \cdot k\left(\frac{6}{5}\right)^4}{\frac{216}{125}+\frac{36}{25}+\frac{6}{5}+1} = 162\ 000,$$

и общая сумма выплат банку будет равна

$$162\ 000 \cdot 4 = 648\ 000 \text{ (руб.).}$$

Ответ: 648 000.

Финансовые задачи ЕГЭ

Задача 2.

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — **целое** число;

со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1,0	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Финансовые задачи ЕГЭ

Решение

Последовательность долгов на 15-е число месяца *i*:

1; 0,6; 0,4; 03; 0,2; 0,1; 0.

Обозначим $k = 1 + \frac{r}{100}$ и выпишем последовательность долгов на 1-е число месяца *i* +1:

k; 0,6*k*; 0,4*k*; 03*k*; 0,2*k*; 0,1*k*.

Выпишем последовательность выплат со 2-го по 14-е число месяца *i* +1:

k – 0,6; 0,6*k* – 0,4; 0,4*k* – 0,3; 03*k* – 0,2; 0,2*k* – 0,1; 0,1*k*.

Общая сумма выплат:

k – 0,6 + 0,6*k* – 0,4 + 0,4*k* – 0,3 + 03*k* – 0,2 + 0,2*k* – 0,1 + 0,1*k* = 2,6*k* – 1,6.

По условию 2,6*k* – 1,6 $= 2{,}6\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 1{,}6 < 1{,}2$, $1 + \frac{r}{100} < \frac{14}{13}$, $\frac{r}{100} < \frac{1}{13}$, откуда $r < 7\frac{9}{13}$.

Ответ: 7.

Финансовые задачи ЕГЭ

Задача 3.

Андрей планирует 15-го декабря взять в банке кредит на 3 года в размере 1655000 рублей. Сотрудник банка предложил Андрею два различных плана погашения кредита:

(1) каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года; с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; кредит должен быть полностью погашен за три года тремя равными платежами;

(2) 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг с 1-го по 35-й месяц должен быть меньше долга на 15-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму; к 15-му числу 36-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат Андрея банку по более выгодному плану погашения кредита?

Финансовые задачи ЕГЭ

Решение.

План 1:

Пусть ежегодный платёж равен *x* руб.

Тогда $[(1\ 655\ 000 \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x] \cdot 1{,}1 - x = 0$,

$x = \frac{1\ 655\ 000 \cdot 1{,}1^3}{1{,}1^2 + 1} = 665\ 500.$

Следовательно, всего $665000 \cdot 3 = 1\ 996\ 500$ (руб.).

Финансовые задачи ЕГЭ

Решение (продолжение)

План 2:

$$y_1 = \frac{1\,655\,000}{36} + 0{,}01 \cdot 1\,655\,000,$$
$$y_2 = \frac{1\,655\,000}{36} + 0{,}01 \cdot \frac{35}{36} \cdot 1\,655\,000,$$
$$\ldots$$
$$y_{36} = \frac{1\,655\,000}{36} + 0{,}01 \cdot \frac{1}{36} \cdot 1\,655\,000.$$

Общая сумма:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{36} = 1\,655\,000 + 16550\left(1 + \frac{35}{36} + \cdots + \frac{1}{36}\right) = 1\,961\,175.$$

$1\,996\,500 - 1\,961\,175$ =35 325.

Ответ: 35 325.

Задачи на прогрессии

Задача 4. Найти общие члены арифметических прогрессий

1, 5, 9, … и 6, 13, 20, …

Задачи на прогрессии

Задача 5. Сколько чисел входят в обе арифметических прогрессии

1, 5, 9, …, 885 и 5, 12, 19, …, 502

Задачи на прогрессии

Задача 6. Том Сойер красил забор длиной 105 метров, причем день за днем длина выкрашенной за один день части забора уменьшалась на одну и ту же величину. За сколько дней был покрашен забор, если за первые три дня Том выкрасил 36 метров, а за последние три – только 27 метров?

Задачи на прогрессии

Задача 7. Пять моряков высадились на остров и к вечеру набрали кучу кокосовых орехов. Дележ отложили на утро. Один из них, проснувшись ночью, угостил одним орехом мартышку, а из остальных орехов взял себе точно 1/5 часть, после чего лег спать и быстро уснул. За ночь так же поступили один за другим и остальные моряки; при этом каждый не знал о действиях предшественников. На утро они поделили оставшиеся орехи поровну, но для мартышки в этот раз лишнего ореха не осталось. Каким могло быть наименьшее число орехов в собранной куче?

Задачи, приводящие к рекуррентным уравнениям

Задача 8. Жабёнок прыгает по вершинам четырёхугольника, перепрыгивая за один прыжок на соседнюю вершину. Каждая прогулка начинается и заканчивается в одной и той же вершине. Сколькими способами он может совершить прогулку длиной n прыжков?

Задачи, приводящие к рекуррентным уравнениям

Обозначим вершины четырёхугольника буквами *A*, *B*, *C* и *D*.

Будем считать, что A_n – число различных прогулок длиной *n* прыжков из *A* в *A* (*n* – любое натуральное число), B_n – из *A* в *B*, C_n – из *A* в *C*, D_n – из *A* в *D*.

Сделаем одно важное наблюдение: для любой прогулки длиной в *n* прыжков из *A* в *B* существует «симметричная» ей прогулка из *A* в *D* и наоборот, так что для любого номера *n* справедливо равенство $B_n = D_n$.

Чтобы определить, как изменяется число прогулок при переходе от любого числа к следующему, нам надо представить, где жабёнок мог находиться за шаг до того, как он попал в ту или иную вершину.

Задачи, приводящие к рекуррентным уравнениям

Так, если за n прыжков жабёнок попал в вершину A, то за один прыжок до этого события он должен оказаться либо в вершине B, либо в вершине D. С помощью введённых обозначений мы можем записать это в виде равенства

$$A_n = B_{n-1} + D_{n-1},$$

или, с учётом сделанного замечания,

$$A_n = 2B_{n-1}.$$

За шаг до того, как жабёнок оказался в вершине B, он мог быть в вершине A или в вершине C:

$$B_{n-1} = A_{n-2} + C_{n-2}.$$

Задачи, приводящие к рекуррентным уравнениям

Аналогично, в вершину *C* можно одним прыжком добраться либо из вершины *B* либо из вершины *D*:

$$C_{n-2} = B_{n-3} + D_{n-3},$$

или, опять вспоминая «симметрию» маршрутов,

$$C_{n-2} = 2B_{n-3}.$$

Мы получили 3 уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A_n = 2B_{n-1}, \\ B_{n-1} = A_{n-2} + C_{n-2}, \\ C_{n-2} = 2B_{n-3}. \end{cases}$$

Задачи, приводящие к рекуррентным уравнениям

Из первого и третьего уравнений следует, число прогулок длины *n* из *A* в *A* и из *A* в *C* вычисляются по одному и тому же правилу, так что при любом *n* выполняется равенство $C_n = A_n$.

Тогда $C_{n-2} = A_{n-2}$, и второе уравнение принимает вид $B_{n-1} = 2A_{n-2}$.

Подставляя выражение для B_{n-1} в первое уравнение, получаем

$$A_n = 2B_{n-1} = 2 \cdot (2A_{n-2}) = 4A_{n-2}.$$

Итак, число прогулок из *n* прыжков нам удалось выразить через число прогулок из *n* – 2 прыжков. Следовательно, чтобы запустить рекуррентный механизм, мы должны найти A_1 и A_2.

Задачи, приводящие к рекуррентным уравнениям

Прогулка из одного прыжка с соблюдением условий задачи не существует, то есть $A_1 = 0$.

Прогулку из двух прыжков можно совершить двумя способами: $A \to B \to A$ и $A \to D \to A$, откуда $A_2 = 2$.

Значит, число прогулок длиной *n* прыжков можно найти таким способом:

$$A_1 = 0, A_2 = 2, A_n = 4A_{n-2}\ (n \in \mathbb{N}).$$

Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1pIkoXExfgqt2RO9h7j7lfgVBs36OjNPInUpPaY_QkO0/edit?usp=sharing

Задание 1. (1 б) Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сума третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

Для самостоятельного решения

Задание 2. (1 б) Три положительных числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если среднее из них уменьшить на 40%, то получится геометрическая прогрессия, сумма которой равна 39. Найдите эти числа.

Задания для самостоятельного решения

Задание 3. (2 б) Сколько чисел входят в обе арифметические прогрессии

$$3,\ 7,\ 11,\ \ldots,\ 887 \text{ и } 2,\ 9,\ 16,\ \ldots\ ,\ 492?$$

Для самостоятельного решения

Задание 4. (2 б) Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвёртый равно 3. Найти второй член прогрессии.

Задание 5. (4 б) Жабёнок прыгает по кувшинкам, расположенным в вершинах шестиугольника $ABCDEF$, перепрыгивая за один прыжок на соседнюю вершину. Сколькими способами он может совершить прогулку длиной n прыжков, начав её на кувшинке в вершине A и закончив в вершине C, если на кувшинку в вершине D прыгать запрещено?

КОНЕЦ СЕМИНАРА