Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Метод математической индукции

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Метод математической индукции

ПЛАН

- Рекурсия и индукция.
- Рекурсивные определения.
- Доказательство по индукции:
  - полная индукция,
  - метод математической индукции,
  - возвратная индукция.
- Метод математической индукции в школьном курсе математики. Доказательство формул:
  - общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии,
  - общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии,
  - распределительного закона умножения относительно сложения для любого числа слагаемых,
  - производной суммы (произведения) любого числа слагаемых (множителей).
- Суммирование конечных рядов. Метод разностей.
- Суммирование степеней чисел натурального ряда.

В конце лекции дано решение задачи о кокосовых орехах из предыдущего конспекта.

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Рекурсия и индукция

- РЕКУРСИЯ (от лат. recursiō — возвращение) — способ определения функций. Рекурсия давно применяется в арифметике для определения числовых последовательностей (прогрессии, чисел Фибоначчи и пр.), также существенную роль играет в вычислительной математике (рекуррентные методы). Интуитивный смысл рекурсии можно описать следующим образом:
  - значение искомой функции f в произвольной точке определяется через значения этой же функции в других точках, которые в каком-то смысле «предшествуют» этой точке,
  - в «исходных» точках значения f задаются непосредственно.
- МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ (от лат. inductio — наведение) — метод доказательства математических утверждений, основанный на принципе математической индукции:
  - утверждение A(x), зависящее от натурального параметра x, считается доказанным, если доказано $A(1)$ и для любого натурального n из предположения, что верно $A(n)$, выведено, что верно также $A(n + 1)$.

Рекурсия и индукция

- Термины «*индукция*» и «*рекурсия*» часто употребляются как синонимы.

Например, *определение* какого-либо понятия $A(n)$, зависящего от параметра $n = 0, 1, 2, \ldots$, по схеме:

а) задаётся значение $A(0)$;

б) задаётся правило получения значения $A(n + 1)$ по значению $A(n)$,

называют и индуктивным, и рекурсивным.

- П р и м е р. Определение $n!$:

$$\text{а) } 0! = 1; \qquad \text{б) } (n + 1)! = n!(n + 1).$$

- Мы будем придерживаться данных выше определений: $A(n)$ – предложение с переменной $n = 0, 1, 2, \ldots$:
  - если свойства $A(n)$ выводятся из предыдущих, то это *индукция* (proof by induction),
  - если свойства $A(n)$ определяются через предыдущие, то это *рекурсия* (inductive definitions).

Рекурсивные определения

- Фигурные числа

Суммирование арифметических прогрессий приводит к фигурным числам.

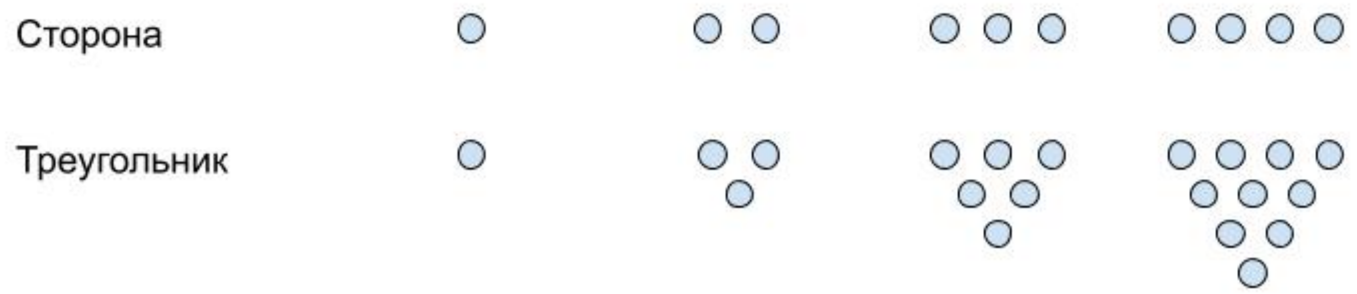
Например, члены последовательности:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 \text{ и т.д.},$$

где

$$1 = 1, \quad 3 = 1 + 2, \quad 6 = 1 + 2 + 3, \quad 10 = 1 + 2 + 3 + 4, \quad \ldots$$

называются треугольными числами, так как эти величины можно представить в треугольниках:



Рекурсивные определения

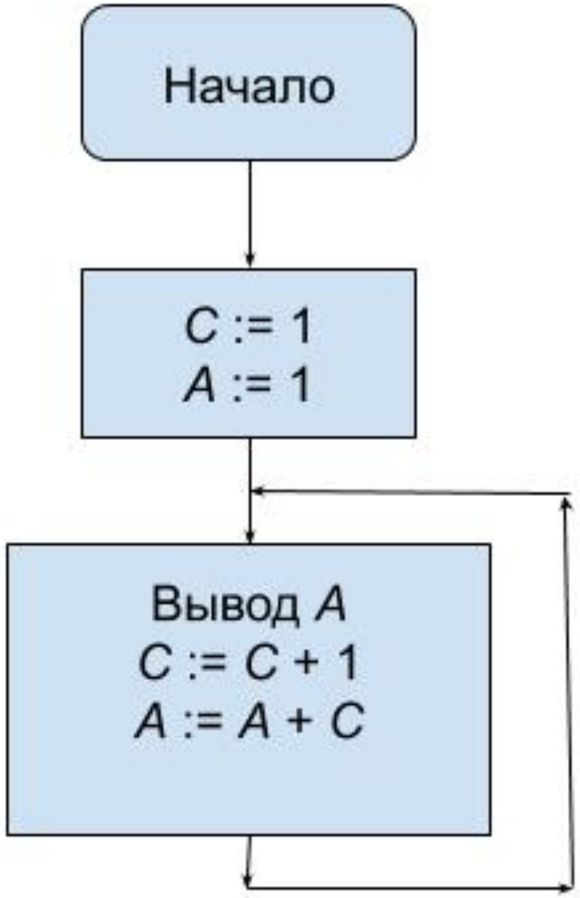
- Фигурные числа

П р и м е р 1. Последовательность треугольных чисел задаётся соотношениями:

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = u_n + (n + 1).$$

1. Определите, чётным или нечётным числом будет u_{12} и u_{100}.

2. Проверьте, верно ли блок-схема изображает получение последовательности треугольных чисел.



Рекурсивные определения

- Задача 1. Пусть s_n – сумма первых n нечётных натуральных чисел.

(1) Выпишите первые 4 члена последовательности $\{s_n\}$.

(2) Дайте рекурсивное определение последовательности $\{s_n\}$.

(3) Изобразите получение членов последовательности $\{s_n\}$ в виде блок-схемы.

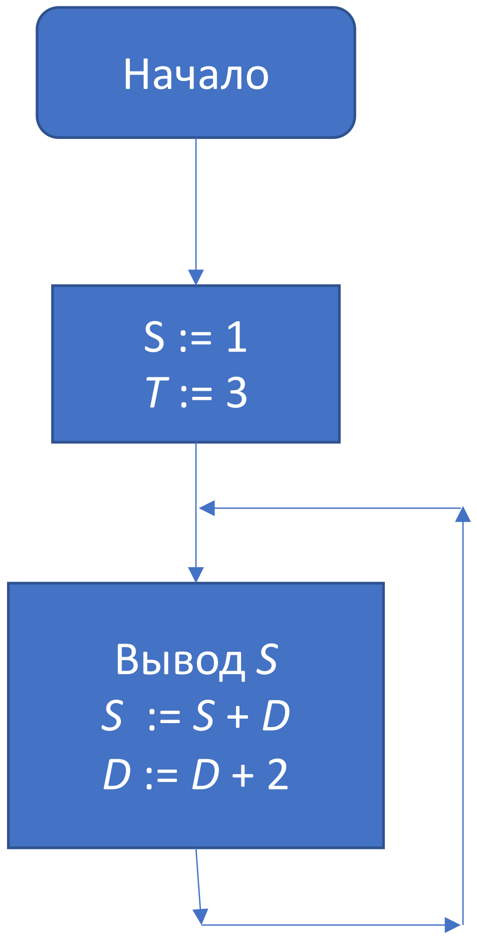
Рекурсивные определения

Ответы:

(1) 1, 4, 9, 16.

(2) $s_1 = 1$, $s_{n+1} = s_n + (2n + 1)$.

(3) Блок-схема изображена на рисунке справа.



Доказательство по индукции

- Числа Ферма.

«$F_n = 2^{(2^n)} + 1$ – простое число при *всех* натуральных *n*»?

$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 =$257, $F_4 = 65537, \ldots$

Пьер Ферма (1601--1665) считал их простыми.

Опровергнуть общее утверждение может вычислительный пример.

Опровергающий пример нашёл Леонард Эйлер (1732): F_5 имеет делитель 641.

- Многочлен Эйлера.

«n^2 -- n + 41 – простое число при *всех* натуральных *n*»?

Этот многочлен принимает простые значения при n = 1, 2, …, 40. При n = 41 его значение составное:

41^2 -- 41 + 41 = 41 · 41.

Полная индукция

Задача 3. Доказать, что число $n^2 + 2n + 3$ ни при каком n не делится на 7.

Полная индукция

Задача 3. Доказать, что число $n^2 + 2n + 3$ ни при каком n не делится на 7.

Решение. Всякое натуральное число *x* можно представить в виде

$$n = 7q + r,$$

где r – одно из чисел 0, 1, …, 6.

Тогда

$$n^2 + 2n + 3 = (7q + r)^2 + 2(7q + r) + 3 = 7(7q^2 + 2qr + 2q\ ) + r^2 + 2r + 3,$$

то есть остаток от деления числа $n^2 + 2n + 3$ на 7 равен остатку от деления на 7 числа $r^2 + 2r + 3$.

Полная индукция

Составим таблицу:

r	0	1	2	3	4	5	6
$r^2 + 2r + 3$	3	6	11	18	27	38	51

Ни одно из этих чисел не делится на 7. Следовательно, ни при каком натуральном n число $n^2 + 2n + 3$ не делится на 7.

Доказательство по индукции

- П р и м е р 1. Продолжение.

Какие треугольные числа являются чётными?

Последовательность треугольных чисел начинается так:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78,$$

и задаётся соотношениями:

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = u_n + (n + 1).$$

Доказательство по индукции

- П р и м е р 1. Продолжение.

Какие треугольные числа являются чётными?

Кажется, что числа в этой последовательности могут быть сгруппированы по 4 (нечётное, нечётное, чётное, чётное). Имея рекурсивное определение, мы можем утверждать, что при переходе от числа u_n к u_{n+4} чётность числа не меняется. То есть, мы можем утверждать, что

(1) Первая группа из 4 чисел есть (нечётное, нечётное, чётное, чётное).

(2) Если n-я группа имеет вид (нечётное, нечётное, чётное, чётное), то $(n + 1)$-я группа – тоже.

Эти два утверждения вместе убеждают нас в том, что эта закономерность соблюдается для всей последовательности.

Доказательство по индукции

Описанный способ рассуждений можно проиллюстрировать с помощью «очереди» из костей домино.

Чтобы быть уверенными, что все кости упадут, необходимы два условия:

(1) Первая кость опрокинется,

(2) Если одна кость упадёт, то обязательно опрокинется и следующая.

Доказательство по индукции

- П р и м е р 2. Доказать, что n-й член последовательности треугольных чисел задаётся формулой:

$$\frac{1}{2}\, n(n+1).$$

Доказательство по индукции

- Пример 2. Доказать, что n-й член последовательности треугольных чисел задаётся формулой: ½ $n(n + 1)$.

Решение. Первый способ.

Представив n-е треугольное число в виде суммы n первых натуральных чисел, можно воспользоваться формулой суммы первых n членов арифметической прогрессии и быстро прийти к нужной формуле.

Доказательство по индукции

- Пример 2. Доказать, что n-й член последовательности треугольных чисел задаётся формулой: $\frac{1}{2} n(n + 1)$.

Решение. Второй способ. Докажем формулу по индукции.

Последовательность треугольных чисел задана рекуррентным способом:

(1) $u_1 = 1$,

(2) $u_{n+1} = u_n + (n + 1)$ для всех натуральных n.

Доказательство по индукции

Легко проверить, что формула верна при $n = 1$.

Теперь надо проверить, что если

$$u_n = \tfrac{1}{2}\, n(n + 1),$$

то

$$u_{n+1} = u_n + (n + 1) = \tfrac{1}{2}\, n(n + 1) + (n + 1).$$

Справедливость равенства

$$\tfrac{1}{2}\, n(n + 1) + (n + 1) = \tfrac{1}{2}\, (n + 1)[(n + 1) + 1]$$

означает, что если формула верна для n-го треугольного числа, то она верна и для $(n + 1)$-го.

Доказательство по индукции

Само по себе второе утверждение не гарантирует, что формула верна для всех натуральных *n*. Оно гарантирует только то, что *если* при некотором натуральном *n* утверждение

«*n*-й член последовательности треугольных чисел
задаётся формулой: ½ *n*(*n* + 1)»

верно, то оно верно и при (*n* + 1)-м.

Для полного доказательства мы проверили справедливость утверждения для первого натурального числа. Теперь:

из того, что формула верна при *n* = 1, следует, что то она верна для *n* = 2,

из того, что формула верна при *n* = 2, следует, что то она верна для *n* = 3,

…,

то есть формула верна для каждого натурального числа.

Доказательство по индукции

Схема доказательства методом математической индукции:

если имеется T – множество истинности утверждения о произвольном натуральном числе n и:

(1) $1 \in T$,

(2) $n \in T \Rightarrow n + 1 \in T$,

то это утверждение верно для каждого натурального числа.

Возвратная индукция

Иногда бывает удобно использовать индукцию в усиленной форме.

Возвратная индукция:

если имеется T – множество истинности утверждения о произвольном натуральном числе n и:

(1) $1 \in T$,

(2) $1, 2, \ldots, n \in T \Rightarrow n + 1 \in T$,

то это утверждение верно для каждого натурального числа.

Метод математической индукции в школьном курсе математики

- «$(x^n)' = nx^{n-1}$ -- формула верна при *всех* натуральных n»?

Учебник С.М. Никольского и др.:

1) $f(x) = x$.

Так как для любого $x \in \mathbf{R}$ приращение f равно

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x,$$

то $\Delta f / \Delta x = 1$, то есть

$$f'(x) = (x)' = 1.$$

2) $f(x) = x^2$.

Так как для любого $x \in \mathbf{R}$ приращение f равно

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (2x + \Delta x)\Delta x,$$

то $\Delta f / \Delta x = 2x + \Delta x$; при $\Delta x \to 0$ выражение $2x + \Delta x$ стремится к $2x$, то есть

$$f'(x) = (x^2)' = 2x.$$

Метод математической индукции в школьном курсе математики

- Теорема. Для любого $x \in \mathbf{R}$ и любого натурального $n \geq 2$ справедлива формула

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Доказательство.

(1) Для $n = 1$ формула доказана: $(x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$.

(2) Предположим, что формула верна для некоторого n: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Применим формулу произведения *двух* функций:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x^1)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n.$$

(3) На основании принципа математической индукции заключаем, что формула справедлива для любого натурального n.

Метод математической индукции в школьном курсе математики

- «$(x^n)' = nx^{n-1}$ -- формула верна при *всех* натуральных n»?

Учебник М.Я. Пратусевича и др.:

- Т е о р е м а . Для любого $x \in \mathbf{R}$ и любого $n \in \mathbf{N}$ справедлива формула

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Возьмём произвольную точку $x \in \mathbf{R}$ и рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + C_n^1 x^{n-1}\Delta x + \cdots + C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^k + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(C_n^1 x^{n-1} + \cdots + C_n^k x^{n-k}(\Delta x)^{k-1} + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right) = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

В первом равенстве мы воспользовались формулой бинома Ньютона, а третье равенство верно в силу теоремы о пределе суммы.

Поскольку этот предел существует и конечен, то то существует и производная $f'(x) = nx^{n-1}$.

Суммирование конечных рядов

- Всякой числовой последовательности $\{u_n\}$

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

можно поставить в соответствие последовательность $\{s_n\}$

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \qquad s_2 = u_1 + u_2 + u_3, \qquad \ldots, \qquad s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, \qquad \ldots$$

n-й член s_n которой равен сумме n первых членов данной последовательности $\{s_n\}$.

Нахождение общего члена последовательности $\{s_n\}$

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

называется суммированием «конечного ряда»

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

П р и м е ч а н и е . Суммирование конечных рядов элементарными средствами удаётся выполнить в сравнительно редких случаях, и это суммирование обычно сопряжено со значительными трудностями.

Суммирование арифметической прогрессии

Суммирование арифметической прогрессии можно выполнить на основании её свойства (сумма членов, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов):

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots + u_{n-1} + u_n ,$$

$$s_n = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_{n-k} + \ldots + u_2 + u_1,$$

откуда

$2s_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \ldots + (u_k + u_{n-k}) + \ldots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1)$ откуда

$$2s_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \ldots + (u_k + u_{n-k}) + \ldots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1) = n(u_1 + u_n),$$

следовательно,

$$s_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.$$

П р и м е р . Сумма первых n членов натурального ряда равна

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Суммирование геометрической прогрессии

Суммирование геометрической прогрессии проще всего выполняется на основании формулы сокращённого умножения:

$$(x - 1)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = x^n - 1.$$

Имеем:

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n =$$

$$= u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^{n-1} = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Суммирование конечных рядов: метод разностей

- Если известна функция $f(x)$ такая, что

$$f(n + 1) - f(n) = u_n,$$

то вычисление суммы можно выполнить непосредственно:

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n =$$

$$= [f(2) - f(1)] + [f(3) - f(2)] + \ldots + [f(n + 1) - f(n)] = f(n + 1) - f(1).$$

Рассмотрим результаты применения равенства

$$[f(2) - f(1)] + [f(3) - f(2)] + \ldots + [f(n + 1) - f(n)] = f(n + 1) - f(1) \qquad (*)$$

к некоторым функциям.

Суммирование степеней чисел натурального ряда

- П р и м е р. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ и покажем, что сумма:

$$s_n = 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1)$$

равна $n^2 + 2n$.

Для функции $f(x) = x^2$ равенство (*) принимает вид

$$[2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + \ldots + [n^2 - (n - 1)^2] + [(n + 1)^2 - n^2] =$$

$$= (n + 1)^2 - 1^2.$$

Суммирование степеней чисел натурального ряда

Так как $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, то в левой части равенства получаем

$$[2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + \ldots + [n^2 - (n - 1)^2] + [(n + 1)^2 - n^2] =$$

$$= (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) \ldots + (2(n - 1) + 1) + (2n + 1).$$

Суммирование степеней чисел натурального ряда

Упростим правую часть равенства:

$$(n + 1)^2 - 1^2 = n^2 + 2n.$$

Следовательно,

$$(2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) \ldots + (2(n - 1) + 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n.$$

Суммирование степеней чисел натурального ряда

Возвращаясь к примеру 2, модифицируем формулу для вычисления первых *n* нечётных чисел. Для этого разрешим аргументу *n* принимать нулевое значение.

Равенство (*) примет вид

$$[1^2 - 0^2] + [2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + \ldots + [n^2 - (n - 1)^2] = n^2 - 0^2,$$

откуда:

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Суммирование степеней чисел натурального ряда

Этот результат может быть использован для вычисления суммы первых n натуральных чисел:

Из равенства (*) для функции $f(x) = x^2$ получаем:

$$[2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + \ldots + [n^2 - (n-1)^2] + [(n+1)^2 - n^2\ ] =$$

$$= (n+1)^2 - 1^2.$$

В правой части равенства получаем

$$(n+1)^2 - 1^2 = n^2 + 2n.$$

Суммирование степеней чисел натурального ряда

Преобразуем левую часть:

$$[2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + \ldots + [n^2 - (n-1)^2] + [(n+1)^2 - n^2] =$$

$$= (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) \ldots + (2(n-1) + 1) + (2n + 1) =$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1 + 1 + 1 + \ldots + 1) =$$

$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n.$$

Тогда

$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n = n^2 + 2n\ ,$$

откуда

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}\,(n^2 + n).$$

Суммирование степеней чисел натурального ряда

В терминах Σ вывод выглядит нагляднее:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+1) = n^2 + 2n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+1) = 2\sum_{i=1}^{n} i + n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(2i+1) - n\right) = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

Суммирование степеней чисел натурального ряда

Свойства сумм (доказываются по определению):

$$\sum_{i=1}^{n} af(i) = a\sum_{i=1}^{n} f(i)\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(f(i) + b) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right) + nb,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(i) + g(i)\big) = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)\,.$$

Суммирование степеней чисел натурального ряда

П р и м е р. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$, метод разностей даёт:

$$\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^3 - i^3\right) = (n+1)^3 - 1^3,$$

в левой части равенства:

$$\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^3 - i^3\right) = \sum_{i=1}^{n}\left((i^3 + 3i^2 + 3i + 1) - i^3\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n.$$

Суммирование степеней чисел натурального ряда

Подставим преобразованную левую часть в равенство:

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n = (n+1)^3 - 1^3,$$

используем формулу суммы первых степеней натуральных чисел:

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right] + n = (n+1)^3 - 1^3;$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1),$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Суммирование степеней чисел натурального ряда

Функцию $f(x) = x^4$ можно использовать для вывода формулы суммы кубов натуральных чисел:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Суммирование конечных рядов: метод разностей

Заметим, что члены геометрической прогрессии растут по экспоненциальному закону, и применим метод разностей к показательной функции $f(x) = q^x$.

Равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(i+1) - f(i)\big) = (n+1) - f(1)$$

даёт:

$$\sum_{i=1}^{n}\big(q^{i+1} - q^{i}\big) = q^{n+1} - q.$$

Суммирование конечных рядов: метод разностей

$$\sum_{i=1}^{n}\left(q^{i+1}-q^{i}\right)=q^{n+1}-q.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}(q-1)q^{i}=(q^{n}-1)q,$$

$$(q-1)\sum_{i=1}^{n}q^{i}=(q^{n}-1)q,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n}q^{i}=\frac{q(q^{n}-1)}{q-1}.$$

Суммирование конечных рядов: метод разностей

Полученную формулу можно использовать для вычисления суммы первых *n* членов геометрической прогрессии:

$$b + bq + bq^2 + \cdots + bq^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} bq^{i-1} = b\sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = b\,\frac{(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Суммирование конечных рядов элементарными средствами

Пример. Простой способ суммирования геометрической прогрессии:

$$s_n = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1},$$

$$s_n q = bq + bq^2 + bq^3 + \ldots + u_1 q^n,$$

Вычитая из второго равенства первое, получим:

$$(q-1)s_n = bq^n - b,\ s_n = b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1SYStrlUsdQhUn_ILNt0QVvD6taXl6ssJSS4dsMjevZ4/edit?usp=sharing

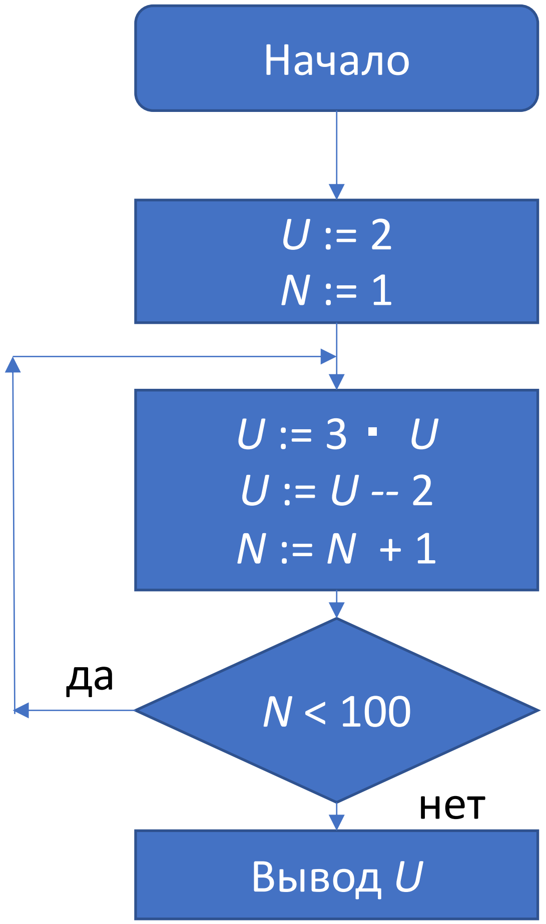
Задание 1. Для каких натуральных n верно утверждение

$$«3^{n-1} = 2n^2 - 4n + 3»?$$

Ответ запишите в виде множества, например, {10, 20, 30}.

Задания для самостоятельного решения

Задание 2. Запишите первые шесть членов последовательности чисел, которую генерирует блок-схема:



Для самостоятельного решения

Задание 3. Какие из тождеств верны?

(1)

$$\sum_{i=1}^{3} i^3 = \sum_{i=0}^{5} (2i + 1)$$

(2)

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = \left(\sum_{i=1}^{5} i\right)^2$$

(3)

$$\sum_{i=1}^{n} (2i + 8) = 2\sum_{i=1}^{n} (i + 4)$$

(4)

$$\sum_{i=1}^{6} (2i + 8) = \left(\sum_{i=1}^{6} 2i\right) + 8$$

Для самостоятельного решения

З а д а н и е 4. Верно ли доказательство?

«Рассмотрим последовательность $\{u_n\}$, где $u_n = 5^n - 4n + 3, n = 1, 2, 3, \dots$.

Докажем, что все члены последовательности $\{u_n\}$ делятся на 16.

Предположим, что *n*-й член $u_n = 5^n - 4n + 3$ делится на 16.

Так как

$$u_{n+1} = 5^{n+1} - 4(n+1) + 3 =$$

$$= 5 \cdot [5^n - 4n + 3] + 16n - 16 = 5u_n + 16n - 16,$$

где число u_n делится на 16 по сделанному предположению, то число

$$5^{n+1} - 4(n+1) + 3$$

делится на 16, следовательно, все члены последовательности делятся на 16».

Для самостоятельного решения

Задание 5. Поделитесь, пожалуйста, вашим мнением

Литература

- Новоселов С.И. Специальный курс элементарной алгебры. 6 изд. М.: Высшая школа, 1962. 564 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.
- School Mathematics Project (SMP) Book 1&2. Cambridge University Press.

Задачи на прогрессии

9 октября 1926 года в газете «Сатердей ивнинг пост» был напечатан рассказ Б. Э. Уильямса «Кокосовые орехи». Сюжет этого рассказа сводился к тому, что некий строительный подрядчик хотел во что бы то ни стало помешать своему конкуренту получить важный заказ. Находчивый клерк подрядчика, зная страсть конкурента к занимательной математике, подсунул тому задачу настолько захватывающего содержания, что бедный конкурент, всецело поглощенный ее решением, забыл подать заявку в установленный срок и упустил контракт.

З а д а ч а . Пять матросов и мартышка потерпели кораблекрушение и высадились на необитаемом острове. Весь первый день они занимались сбором кокосовых орехов. Вечером они сложили все орехи в кучу и легли спать.

Ночью, когда все заснули, один из матросов, подумав, что утром при разделе орехов может вспыхнуть ссора, встал, чтобы взять свою долю орехов немедля. Он разделил все кокосовые орехи на пять равных кучек, а один оставшийся орех отдал мартышке. Затем матрос спрятал свою долю, а все остальные орехи снова сложил в одну кучу.

Через некоторое время проснулся другой «робинзон» и сделал то же самое. У него тоже остался один лишний орех, и он отдал его мартышке. И так один за другим поступили все пятеро потерпевших кораблекрушение. Каждый из них взял себе одну пятую орехов из той кучи, которую он нашел при пробуждении, и каждый отдал один орех мартышке.

Утром они поделили оставшиеся орехи, и каждому досталось поровну — по одной пятой. Разумеется, каждый из матросов не мог не знать, что части орехов не хватает, но так как у каждого из них совесть была одинаково нечиста, то никто ничего не сказал. Сколько кокосовых орехов было первоначально?

Задачи на прогрессии

Р е ш е н и е. Пусть u_0 – число собранных орехов. Тогда

$u_0 = 5u_1 + 1$, u_1 -- украл I матрос,

$4 u_1 = 5u_2 + 1$, u_2 -- украл II матрос,

$4 u_2 = 5u_3 + 1$, u_3 -- украл III матрос,

$4 u_3 = 5u_4 + 1$, u_4 -- украл IV матрос,

$4 u_4 = 5u_5 + 1$, u_5 -- украл V матрос,

$4 u_5 = 5u_6$, u_6 – доля при дележе.

Задачи на прогрессии

Р е ш е н и е. Тогда

$u_0 = 5u_1 + 1$, $\quad 4u_0 = 5 \cdot 4u_1 + 4$,

$4u_1 = 5u_2 + 1$, $\quad 4u_0 = 5^2 u_2 + 5 + 4$, $\quad 4^2 u_0 = 5^2 \cdot 4u_2 + 5 \cdot 4 + 4^2$,

$4u_2 = 5u_3 + 1$, $\quad 4^2 u_0 = 5^3 u_3 + 5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2$,

$4u_3 = 5u_4 + 1$, $\quad 4^3 u_0 = 5^4 u_4 + 5^3 + 5^2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 4^3$,

$4u_4 = 5u_5 + 1$, $\quad 4^4 u_0 = 5^5 u_5 + 5^4 + 5^3 \cdot 4 + 5^2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4^3 + 4^4$,

$4u_5 = 5u_6 + 0$, $\quad 4^5 u_0 = 5^6 u_6 + 0 \cdot [5^5] + 5^4 \cdot 4 + 5^3 \cdot 4^2 + 5^2 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^4 + 4^5$.

Задачи на прогрессии

Р е ш е н и е. Тогда

$4u_0 = 5 \cdot 4u_1 + 4,$

$4\, u_0 = 5^2\, u_2 + 5 + 4 = 5^2\, u_2 + (5^2 - 4^2)$

$4^2\, u_0 = 5^3\, u_3 + 5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2 = 5^3\, u_3 + (5^3 - 4^3)$

$4^3\, u_0 = 5^4\, u_4 + 5^3 + 5^2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 4^3 = 5^4\, u_4 + (5^4 - 4^4)$

$4^4\, u_0 = 5^5\, u_5 + 5^4 + 5^3 \cdot 4 + 5^2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4^3 + 4^4 = 5^5\, u_5 + (5^5 - 4^5)$

$4^5\, u_0 = 5^6\, u_6 + 0 \cdot [5^5] + 5^4 \cdot 4 + 5^3 \cdot 4^2 + 5^2 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^4 + 4^5 = 5^6\, u_6 + (5^6 - 4^6)$ -- 5^5.

Задачи на прогрессии

Решение.

$$4^5 u_0 = 5^6 u_6 + (5^6 - 4^6) - 5^5,$$

$$4^5(u_0 + 4) = 5^6 u_6 + 5^5 \cdot 4,$$

то есть $u_0 + 4$ делится на 5^5, и наименьшее такое число равно

$$u_0 + 4 = 5^5,\ u_0 = 3121.$$

Задача Уильямса имеет не единственное решение. К имеющейся куче можно прибавлять число орехов, которое 6 раз делится на 5, то есть кратное 5^6.

Тогда

$$u_0 = 5^5 - 4 + 5^6 \cdot k = (1 + 5k)\, 5^5 - 4 \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Задачи на прогрессии

Решение. Решение в числах:

$u_0 = 5u_1 + 1,$	u_1 -- украл I матрос,	$3121 = 5 \cdot 624 + 1,$
$u_1 = 5u_2 + 1,$	u_2 -- украл II матрос,	$2496 = 5 \cdot 499 + 1,$
$u_2 = 5u_3 + 1,$	u_3 -- украл III матрос,	$1996 = 5 \cdot 399 + 1,$
$u_3 = 5u_4 + 1,$	u_4 -- украл IV матрос,	$1596 = 5 \cdot 319 + 1,$
$u_4 = 5u_5 + 1,$	u_5 -- украл V матрос,	$1276 = 5 \cdot 255 + 1,$
$u_5 = 5u_6,$	u_6 – доля при дележе,	$1020 = 5 \cdot 204.$

Задачи на прогрессии

Р е ш е н и е. (С окрашиванием орехов).

Так как при первом делении один орех остался лишним, то u_0 делится на 5 с остатком 1; следовательно, $u_0 + 4$ делится на 5.

Возьмём ещё четыре ореха, покрасим их в синий цвет и отложим в сторону.

После того, как первый моряк украдёт пятую часть кучи, останется один орех для мартышки и 4 синих ореха. Добавив синие орехи, получим 4 кучки по 1/5, то есть 4/5 числа $u_0 + 4$.

Прежде, чем второй моряк проснётся, снова отложим синие орехи в сторону. Тогда второй моряк украдёт пятую часть кучи и один орех отдаст мартышке. А в это время мы добавим в кучу 4 синих ореха и получим 16/25 числа $u_0 + 4$, и так далее.

Перед тем, как проснётся пятый моряк, в куче вместе с синими орехами будет 256/625 числа $u_0 + 4$. Снова отложим синие орехи – тогда моряк украдёт пятую часть кучи и один орех отдаст мартышке. А в куче вместе с синими орехами будет 1024/3125 числа $u_0 + 4$.

Наименьшее u_0, при котором это число целое, – 3121. После пятой кражи в куче осталось 1024 – 4 = 1020 орехов, так что моряки смогли поделить оставшиеся орехи поровну.

О т в е т. 3121 орех.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ