Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Комплексные числа: алгебраическая форма

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Комплексные числа: алгебраическая форма

ПЛАН

- Итоги темы «Индукция и рекусия»
- Определение комплексного числа.
- Поле комплексных чисел.
- Модуль комплексного числа и комплексно сопряжённые числа.
- Изображение комплексных чисел на диаграмме Аргана.

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

ФИО	ЛК_ 04/09	ЛК_11/09	ЛК_02/10	ПЗ_04/09	ПЗ_18/09	ПЗ_25/09	ПЗ_09/10	КР_16/10	Сумма
Акулова Надежда Вениаминовна	5	5	5	10Файл	9	10	2	40	86
Антонова Алла Владимировна	4	4	4	10	10	9		40	81
Архипов Никита Эдуардович	3			9		2			14
Ахмедова Лалезар Малик кызы		5			2	5		32	44
Кобзева Мария Дмитриевна	3	3			6			38	50
Козина Анна Сергеевна	5	5	5	10	10	9	10	40	94
Колемагин Михаил Юрьевич	4							40	44
Котов Валерий Сергеевич		5			8			30	43
Котова Анастасия Дмитриевна	4	5		10	10			32	61
Лаврещук Татьяна Андреевна								40	40
Лобакова Ангелина Олеговна		4	5		10	9	6	40	74
Ляпина Ксения Константиновна		5	4	10	10	9		38	76
Максимова Елена Владимировна			3						3
Малюх Анастасия Игоревна	5	5		10	10			38	68
Милостная Екатерина Александровна	3	5						40	48
Минько Екатерина Юрьевна	5	5	5	10	10	10		40	85
Морозова Анна Михайловна	4	5	4	10	10	9	10	40	92
Никулин Андрей Романович	3	5	5	10	10	9		40	82
Ноздрачева Екатерина Юрьевна	5	5	5	9	10	10		40	84
Потатуева Александра Евгеньевна		5						40	40
Пуговкина Ксения Александровна								40	40
Сенькина Мария Михайловна	5	5		10	10	9		40	79
Серов Александр Сергеевич									
Смыкова Анастасия Алексеевна	5			10				40	55
Фомичева Евгения Дмитриевна		5	3	10	9	5		38	70
Хисматуллин Булат Ильдарович	3								3
Хордыкова Алена Сергеевна	3	4	4	10	10	9		40	80
Шабаева Диляра Андреевна	4	5	5	10	9	10		40	83
Шулика Дмитрий Олегович	3	5	4	10	10	9		40	81

- В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получает штрафные очки: за первый промах одно штрафное очко, а за каждый следующий – на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных баллов?

- Сумма всех членов конечной арифметической прогрессии равна 112, произведение второго члена и разности прогрессии равно 30, а сумма третьего и пятого членов равна 32. Выпишите три первых члена этой прогрессии.

- При любом n сумма первых n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой

$$S_n = 4n^2 - 3n.$$

Выпишите три первых члена этой прогрессии.

- Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму 11 первых членов прогрессии.

- В некоторой арифметической прогрессии

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224.$$

Найдите сумму 19 первых членов этой прогрессии.

- Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна (–49), а сумма средних членов равна 14.

- Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвёртого на 18.

- Знаменатель геометрической прогрессии равен 3, а сумма первых шести членов равна 1820. Найдите первый член этой прогрессии.

- В конечной геометрической прогрессии первый, второй и последний члены равны, соответственно, 3, 12 и 3072. Найдите число членов этой прогрессии.

- Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 10 членов целые, а все следующие – не целые?

Если существует, запишите первый член и знаменатель этой прогрессии.

- Вычислите

$$(1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 + \ldots + 199^2) -$$
$$- (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 + \ldots + 200^2).$$

- Вычислите сумму

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (-2 + 3 * n) + \ldots + 94$$

- Упростите выражение

$$\lg x + \lg x^2 + \lg x^3 + \ldots + \lg x^{100}$$

- Найдите сумму первых 100 членов последовательности $\{u_n\}$:

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 2$$

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

- Найдите сумму первых 15 членов последовательности $\{u_n\}$:

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 2$$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

- Выпишите первые 5 членов последовательности $\{u_n\}$:

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 2$$

$$u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$$

- Выберите последовательность, для которой формула общего члена может быть задана выражением вида $A*(-3)^n + B*2^n$
- (1) $u_{n+2} = 6u_n + u_{n+1}$.
- (2) $u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$.
- (3) $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
- (4) $u_{n+2} = -3u_{n+1} + 2u_n$.

- Выберите последовательность, для которой формула общего члена имеет вид $(An + B)*3^n$
- (1) $u_{n+2} = 6u_n + u_{n+1}$.
- (2) $u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$.
- (3) $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
- (4) $u_{n+2} = -3u_{n+1} + 2u_n$.

- Найдите формулу общего члена последовательности $\{u_n\}$:

$u_1 = 1$

$u_2 = 13$

$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$

Ответ запишите в строку по образцу:

(–10*n* + 3)*(–10)^*n* + *B**15^*n*

- Найдите формулу общего члена последовательности $\{u_n\}$:

  $u_1 = 6$

  $u_2 = 20$

  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

Ответ запишите в строку по образцу:

$$(-10n + 3)*15\hat{}n + B*15\hat{}n$$

Определение комплексного числа

З а д а ч а (из трактата Кардано «Великое искусство» («*Ars magna*»)). *Определить участок земли прямоугольной формы с площадью 40 (кв. ед.) и периметром 20 (лин. ед.)* (цит. по [Мишин, с. 75])

Решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 40, \end{cases}$$

к которой приводит эта задача, Кардано нашёл мудрёным на тот момент способом в виде мнимых корней

$$5 - \sqrt{-15} \text{ и } 5 + \sqrt{-15}.$$

Если произвести с ними вычисления как с другими двучленными величинами, считая, что $-\sqrt{-15} \cdot \sqrt{-15} = 15$, то можно убедиться, что они уравнениям:

$$\begin{cases} \left(5 - \sqrt{-15}\right) + \left(5 + \sqrt{-15}\right) = 10, \\ \left(5 - \sqrt{-15}\right) \cdot \left(5 + \sqrt{-15}\right) = 40. \end{cases}$$

Определение комплексного числа

Выражение $a + bi$ называют **комплексным числом** с действительной частью a и мнимой частью b, где a и b —действительные числа, i — специальный символ для обозначения «условного числа», от которого *по определению* требуется только то, чтобы его квадрат был равен –1.

Также по определению принимаются условие равенства двух комплексных чисел и правила вычислений с комплексными числами.

Примечание: в записи $a \pm b\sqrt{-1}$ символ $\sqrt{}$ не имеет прежнего смысла «арифметический корень из положительного числа», а знак + не имеет смысла «операция сложения действительных чисел». Это формальные символы, смысл которых определяется следующими соглашениями.

Определение комплексного числа

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = b, c = d.$$

Вычисления с комплексными числами производятся по следующим формулам

Сумма	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Разность	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Произведение	$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
Частное **(**$c + di \neq 0 + 0i)$	$(a + bi) : (c + di) = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$

Определение комплексного числа

Рассмотрим комплексные числа вида $a + 0 \cdot i$.

При их сложении и умножении получаются числа того же вида:

Сумма $(a + 0 \cdot i) + (b + 0 \cdot i) = (\mathrm{a} + b) + 0 \cdot i$

Произведение $(a + 0 \cdot i) \cdot (b + 0 \cdot i) = (ab) + 0 \cdot i$

Это позволяет отождествлять комплексное число $a + 0 \cdot i$ с действительным числом a и считать, что каждое действительное число содержится в множестве комплексных чисел.

В частности, $0 = 0 + 0 \cdot i$ и $1 = 1 + 0 \cdot i$.

Числа $bi = 0 + b \cdot i$ называются мнимыми числами.

Определение комплексного числа

По этому определению:

- $0 = 0 + 0 \cdot i$ -- также является мнимым числом (то есть и действительным, и мнимым);
- $a + b \cdot i = (a + 0 \cdot i) + (0 + b \cdot i)$ -- знак «+» в записи комплексного числа можно считать символом действия сложения, а знак «·» – символом действия умножения;
- $i^2 = (a + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = -1 + 0 \cdot i = -1$.

Поле комплексных чисел

Теорема 1. *Сложение в множестве комплексных чисел обладает следующими свойствами*:

(1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *для любых комплексных чисел* z_1 *и* z_2 (коммутативный закон сложения).

(2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *для любых комплексных чисел* z_1, z_2 *и* z_3 (ассоциативный закон сложения).

(3) $z + 0 = z$ *для любого комплексного числа* z.

(4) *Для любых комплексных чисел* z_1 *и* z_2 существует, и притом только одно, число z, удовлетворяющее уравнению $z + z_2 = z_1$.

Поле комплексных чисел

Доказательство.

(1) Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$;

по определению сложения комплексных чисел

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$
$$z_2 + z_1 = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i;$$

из свойств действительных чисел

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1, b_1 + b_2 = b_2 + b_1,$$

то есть действительные и мнимые части чисел $z_1 + z_2$ и $z_2 + z_1$ равны; тогда из определения равенства комплексных чисел следует, что

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

что и следовало доказать.

Поле комплексных чисел

Доказательство.

(4) Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$;

возьмём некоторое число $z = x + yi$, где x и y – действительные числа;

по определению сложения комплексных чисел

$$z + z_2 = (x + a_2) + (y + b_2)i,$$

по определению равенства комплексных чисел равенство $z + z_2 = z_1$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$x + a_2 = a_1, y + b_2 = b_1,$$

по правилам действий над действительными числами

$$x = a_1 - a_2, y = b_1 - b_2,$$

то есть равенство $z + z_2 = z_1$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$z = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

откуда вытекает доказываемое утверждение.

Поле комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется число z, удовлетворяющее уравнению

$$z + z_2 = z_1.$$

Из свойства (4) теоремы 1 следует, что разность комплексных чисел

$$z_1 = a_1 + b_1 i \text{ и } z_2 = a_2 + b_2 i$$

однозначно определяется формулой

$$z = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i\ ) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Поле комплексных чисел

Теорема 2. *Умножение в множестве комплексных чисел обладает следующими свойствами*:

(1) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ *для любых комплексных чисел* z_1 *и* z_2 (коммутативный закон умножения).

(2) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ *для любых комплексных чисел* z_1, z_2 *и* z_3 (ассоциативный закон умножения).

(3) $1 \cdot z = z$ *для любого комплексного числа* z.

(4) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ *для любых комплексных чисел* z_1, z_2 *и* z_3 (дистрибутивный закон умножения).

(5) *Для любых комплексных чисел* z_1 *и* z_2, где $z_2 \neq 0$, существует, и притом только одно, число z, удовлетворяющее уравнению $z z_2 = z_1$.

Поле комплексных чисел

Таким образом, комплексные числа образуют поле:

(1) над комплексными числами выполнимы все арифметические действия (кроме деления на нуль);

(2) сложение и умножение коммутативны и ассоциативны и для них имеет силу дистрибутивный закон;

(3) имеется нулевой элемент (0, 0) и единичный элемент (1, 0).

Поле комплексных чисел

П р и м е р 1. Найти два комплексных числа z_1 и z_2, квадрат которых равен числу $z = 8 - 6i$.

Поле комплексных чисел

Пример 1. Найти два комплексных числа z_1 и z_2, квадрат которых равен числу $z = 8 - 6i$.

Решение. Пусть $z_1 = a + bi$, где a и b — действительные числа. Если ${z_1}^2 = a^2 + 2abi - b^2$, то

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{cases}; \quad \text{откуда} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Ответ: $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -3 + i$.

Поле комплексных чисел

- П р и м е р 2. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 2;\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i;\ z_3 = 1 + i;\ z_4 = \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}i.$$

Определите, является ли частное $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}$ действительным или чисто мнимым числом.

Р е ш е н и е.

$$z_2 - z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) - 2 = -1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i;$$

$$z_4 - z_3 = \left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}i\right) - (1 + i) = -\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}i;$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = \frac{-1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}i} = \frac{3 + i}{1 - 3i} = \frac{(3 + i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{10i}{10} = i.$$

О т в е т : чисто мнимое число.

Поле комплексных чисел

- П р и м е р 3. Докажите, что для всех натуральных чисел *n* верно равенство:

$$1+2i+3i^2+\cdots+ni^{n-1}=\frac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i}{2}.$$

Решение. Рассмотрим рекурсию $S_1=1, S_n=S_{n-1}+ni^{n-1}$.

Для $n=1$ формула верна: 1 = $\frac{-(1+1)i^2-i+i}{2}$.

Рассмотрим $n>1$ и покажем, что из того, что формула верна при $n-1$ следует её справедливость для n:

$$S_n=S_{n-1}+ni^{n-1}=\frac{-ni^n-(n-1)i^{n-1}+i}{2}+ni^{n-1}=\frac{-ni^n-(n-1)i^{n-1}+i+2ni^{n-1}}{2}=$$

$$=\frac{-ni^n+(n+1)i^{n-1}+i}{2}=\frac{(n+1)i^{n-1}-ni^n+i}{2}.$$

Так как $i^2=-1$, то верно равенство

$$(n+1)i^{n-1}=-(n+1)i^{n+1}.$$

откуда и следует справедливость равенства

$$S_n=\frac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i}{2}.$$

Следовательно, это равенство верно для всех натуральных чисел *n.*

Поле комплексных чисел

Формальное добавление к множеству действительных чисел только одного корня уравнения $x^2 = -1$ приводит к тому, что в множестве комплексных чисел каждый многочлен второй степени имеет два корня, то есть каждое уравнение второй степени теперь разрешимо.

- П р и м е р 4. Уравнение $x^2 + x + 1 = 0$, которое в области действительных чисел приводит к абсурдному равенству

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

имеет комплексные корни $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, и поэтому многочлен

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

можно разложить на линейные множители:

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Поле комплексных чисел

Теорема 3. *Пусть* a, b, c *– три комплексных числа. Тогда, если* $a \neq 0$*, то уравнение*

$$az^2 + bz + c = 0$$

имеет решения:

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ и } z_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Если $b^2 - 4ac \neq 0$*, то уравнение имеет два различных корня*;

если $b^2 - 4ac = 0$*, то уравнение имеет один корень кратности два, и он равен* $-\frac{b}{2a}$.

Поле комплексных чисел

Следствие. *Если z_1 и z_2 — корни уравнения второй степени*

$$az^2 + bz + c = 0,$$

где a — комплексное число, отличное от нуля, то их сумма S и произведение P равны:

$$S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, P = z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Из этой теоремы следует, что для коэффициентов квадратных уравнений с комплексными переменными выполняется свойство, аналогичное теореме Виета.

Теорема 4. *Многочлен $az^2 + bz + c$ с комплексными коэффициентами и $a \neq 0$ может быть разложен на множители*:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2),$$

где z_1 и z_2 – корни уравнения $az^2 + bz + c = 0$.

Поле комплексных чисел

- П р и м е р 5. Рассмотрим уравнение $x^3 = 1$. Его можно переписать так:

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$.

Произведение комплексных чисел, так же как и действительных, равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю один из множителей.

Первый множитель $x-1$ равен нулю при $x = 1+0i$.

Рассмотрим второй множитель: уравнение $x^2+x+1=0$ имеет корни $x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, откуда $x = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ или $x = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Следовательно, существуют три комплексных корня из 1:

$$1+0i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ и } -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

и многочлен третьей степени $f(x) = x^3 - 1$ можно представить в виде произведения трёх линейных множителей:

$$f(x) = (x-1)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Поле комплексных чисел

Теорема (основная теорема алгебры). *Любой многочлен степени n*

$$f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_{n-1} x + \alpha_n,$$

может быть представлен в виде произведения ровно n множителей

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *– комплексные числа, корни уравнения* $f(x) = 0$ [Курант, с. 127–128].

Поле комплексных чисел

- Пример 6. Решить уравнение $x^3 = 8$.

Решение. Воспользуемся формулой разности кубов:

$$x^3 - 2^3 = 0;$$

$$(x-2)(x^2+2x+4) = 0;$$

$$x_1 = 2, x_2 = -1 + i\sqrt{3}, x_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Поле комплексных чисел

- Пример 7. Решить уравнение $x^2 - 1 = i(x+1)$.

Решение. Перепишем уравнение в каноническом виде и воспользуемся формулой корней квадратного уравнения:

$$x^2 - ix - (1+i) = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{i \pm \sqrt{-1+4i+4}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{(i+2)^2}}{2};$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1 + i.$$

Модуль комплексного числа

В ходе алгебраических преобразований иногда возникает необходимость записывать действительные числа, в явном виде выделяя их модуль. Например, так поступают, когда дело касается извлечения квадратных корней:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

С развитием новой алгебры оказалось, что в некоторых случаях бывает удобной аналогичная форма записи комплексных чисел:

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right),$$

где в скобках стоит комплексное число, про которое мы можем сказать пока только то, что его модуль равен 1:

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2} = 1,$$

а выражение $\sqrt{a^2 + b^2}$, записанное перед скобкой, является положительным действительным числом, которое называют модулем комплексного числа.

Модуль комплексного числа

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называют выражение $\sqrt{a^2 + b^2}$ и обозначают его $|z|$:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Другой способ вычисления модуля комплексного числа вытекает из равенства

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются **сопряжёнными**. Число, сопряжённое числу z обозначают $\bar{z}$.

Модуль комплексного числа

Теорема 5. *Для любого комплексного числа* z *справедливы свойства:*

1. *Квадрат модуля комплексного числа равен произведению этого числа на сопряжённое*:

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

2. *Модуль комплексного числа равен нулю тогда и только тогда, когда это число равно нулю*:

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

3. *Модули сопряжённых чисел равны*:

$$|\bar{z}| = |z|.$$

4. *Сумма сопряжённых чисел является действительным числом, не превосходящим суммы их модулей*:

$$z + \bar{z} \leq |z| + |\bar{z}| = 2|z| = 2|\bar{z}|.$$

Модуль комплексного числа

Теорема 6. *Для любых комплексных чисел* z, z_1 *и* z_2 *справедливы свойства:*

1. *Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей данных чисел*:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

2. *Модуль натуральной степени комплексного числа равен натуральной степени модуля данного числа*:

$$|z^n| = |z|^n \text{ для всех натуральных } n.$$

3. *Модуль комплексного числа, обратного данному, в натуральной степени равен числу, обратному модулю данного числа в натуральной степени*:

$$\left|\frac{1}{z}\right|^n = \frac{1}{|z|^n} \text{ для всех натуральных } n \text{ и } z \neq 0.$$

4. *Неравенство треугольника*:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Комплексно сопряжённые числа

Теорема 7. *Для любых комплексных чисел* z, z_1 *и* z_2 *справедливы свойства:*

1. $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.

2. $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, если $z_2 \neq 0$.

4. $\overline{(\bar{z})} = \mathrm{z}$.

5. $\mathrm{z}\bar{z} = |z|^2$.

6. $|z| = |\bar{z}|$.

7. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$, если $z_2 \neq 0$.

Модуль комплексного числа

- П р и м е р 8. [Болтянский, с. 110]

Доказать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 выполняется соотношение

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

Решение.

$$\begin{gathered}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = \\
= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} = \\
= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = \\
= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2
\end{gathered}$$

Диаграмма Аргана

Вместо записи $a + b \cdot i$ иногда используют сокращённую запись (a, b) и изображают это число точкой с координатами (a, b) в прямоугольной системе координат: на оси абсцисс (на действительной оси) откладывают действительные части, а на оси ординат (на мнимой оси) – мнимые.

Тождество Диофанта

- Пример 9. Произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, также можно двумя способами разложить на сумму двух квадратов целых чисел [Цейтен, с. 174]:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \mp bd)^2 + (ad \pm bc)^2.$$

Тождество Диофанта

В левой части доказываемого тождества нетрудно увидеть произведение квадратов модулей чисел $u = a + bi$ и $v = c + di$ (или сопряжённых с ними чисел), а в правой – квадрат модуля их произведения:

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = |u|^2 |v|^2,$$

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = |(ac - bd) + (ad + bc)i|^2 = |uv|^2,$$

или иначе

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = |\bar{u}|^2 |v|^2,$$

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = |(ac + bd) + (ad - bc)i|^2 = |\bar{u}v|^2.$$

Но так как модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, то $|uv|^2 = |u|^2 |v|^2$ и $|\bar{u}v|^2 = |\bar{u}|^2 |v|^2$, откуда следует, что рассматриваемое в задаче тождество верно.

Тождество Диофанта

Этот факт стал основой значительных результатов в теории чисел, полученных Эйлером и Ферма.

Рассмотрим одно из них: если в доказанном тождестве мы положим $a = b$ и $c = d$, то в нетривиальном случае будем иметь:

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2,$$

откуда для любых натуральных чисел a и b, где $a > b$, числа

$$n = a^2 + b^2,\ k = a^2 - b^2 \text{ и } m = 2ab$$

являются натуральными числами, сторонами прямоугольного треугольника и решениями уравнения $k^2 + m = n^2$.

Заметим, что можно написать более общие решения последнего уравнения:

$$n = \lambda(a^2 + b^2),\ k = \lambda(a^2 - b^2) \text{ и } m = 2\lambda ab,$$

где a, b, λ – натуральные числа.

Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1OjeoAjzKQjTndnc7Eyar1U8ulYqc2RPHwcQv-4LOQ1E/edit?usp=sharing

Вопрос 1. Найдите действительную и мнимую части числа $(2+i)^5$.

Вопрос 2. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 2;\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i;\ z_3 = 1 + i;\ z_4 = \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}i.$$

Сравните модули разностей $z_2 - z_1$ и $z_4 - z_3$.

Для самостоятельного решения

Вопрос 3. Вычислите: $\left|\frac{17+43i}{17-43i}\right|$.

Вопрос 4. Дано комплексное число $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Вычислите z^3.

Вопрос 5. Поделитесь, пожалуйста, вашим мнением

Литература

1. Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с. http://bookre.org/reader?file=567068
2. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. 416 с.
3. Клайн М. Математика. Утрата определённости: Пер. с англ. / Под ред., с предисл. и примеч. И.М. Яглома. М.: Мир, 1984. 484 с.
4. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? 3-е изд., испр. и доп. М.: МЦНМО, 2001. 568 с.
5. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII веках: Пер. с нем. П. Новикова / Обработка, прим. и предисл. М. Выгодского. М.-Л.: Госуд. технико-теоретическое изд-во, 1933. 429 с.

Лекция опубликована в журнальной версии (см. Седова Е.А., Пчелинцев С.В., Удовенко Л.Н. Комплексные числа в школьном математическом образовании: алгебра комплексных чисел // Математика в школе. 2018. № 8. С. 43—56.)

Литература

- Новоселов С.И. Специальный курс элементарной алгебры. 6 изд. М.: Высшая школа, 1962. 564 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.
- School Mathematics Project (SMP) Book 1&2. Cambridge University Press.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ