Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»
(МПГУ)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Комплексные числа: алгебраическая форма

Е.А. Седова, к.п.н.,
проф. кафедры элементарной математики

Комплексные числа: алгебраическая форма

ПЛАН

- Поле комплексных чисел.
- Арифметика комплексных чисел.
- Модуль комплексного числа.
- Суммирование комплексных чисел.

Все учебные материалы доступны на сайте: http://emmom.ru

Определение комплексного числа

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = b, c = d.$$

Вычисления с комплексными числами производятся по следующим формулам

Сумма

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Разность

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Произведение

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Частное

($c + di \neq 0 + 0i$)

$$(a + bi) : (c + di) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Поле комплексных чисел

Теорема (основная теорема алгебры). *Любой многочлен степени n*

$$f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_{n-1} x + \alpha_n,$$

может быть представлен в виде произведения ровно n множителей

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *– комплексные числа, корни уравнения* $f(x) = 0$ [Курант, с. 127–128].

Сравнение комплексных чисел

Знак «<» в числовых множествах «упорядочивает» элементы: выстраивать по возрастанию / убыванию, изображать точками на числовой прямой (правее / левее).

Отношение «меньше»:

(1) Никакое число не может быть меньше самого себя (антирефлексивность);

(2) Из двух любых различных чисел одно и только одно меньше другого (антисимметричность);

(3) Если одно число меньше второго, а второе число меньше третьего, то и первое меньше третьего (транзитивность).

Сравнение комплексных чисел

На множестве комплексных чисел отношение, удовлетворяющее этим условиям, ввести можно: например, так:

$$a + bi \text{ «меньше» } c + di,$$

если $a < c$, а при $a = c$ выполняется неравенство $b < d$.

Попытаемся согласовать это отношение с операциями сложения и умножения.

Сравнение комплексных чисел

Пусть

$$0 < i.$$

Умножив обе части равенства на «положительное» число i, получим:

$$0 < i^2 = -1.$$

Снова умножим обе части равенства на «положительное» число i:

$$0 < -i.$$

Прибавим к обеим частям неравенства число i:

$$i < 0.$$

Поскольку $i \neq 0$, то каждое из двух различных чисел меньше другого.

Аналогично можно привести к противоречию допущение, что число i «отрицательно».

Множество комплексных чисел нельзя упорядочить.

Арифметика комплексных чисел

Задача 1. Представьте в алгебраической форме комплексные числа:

(1) $(1+2i)(2-i)+(1-2i)(2+i)$.

(2) $\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}$.

(3) $\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}$.

(4) $\frac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$.

Арифметика комплексных чисел

Задача 2. Найдите действительную и мнимую части комплексных чисел:

(1) $(3 + 2i)^2$.

(2) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

(3) $(2 + 3i)^2 - (2 - 3i)^2$.

(4) $(2 - i)^3$.

(5) $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

(6) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

Ответы к Задачам 1 и 2.

1. 8. **2.** $3-i$. **3.** 0. **4.** $\frac{14}{5}i$.

1. 5, 12. **2.** 0, 1. **3.** 0, 24. **4.** 2, -11. **5.** -2, $\frac{3}{2}$. **6.** 2, 0.

Арифметика комплексных чисел

З а д а ч а 3 . Докажите, что для любого комплексного числа выполняются соотношения:

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z, \qquad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z.$$

Арифметика комплексных чисел

Задача 4. Докажите, что если $P(z)$ -- многочлен с действительными коэффициентами, то $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

Модуль комплексного числа

Задача 5. Докажите, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 выполняется соотношение

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

Модуль комплексного числа

Решение.

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 =$$

$$= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} =$$

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) =$$

$$= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

Модуль комплексного числа

Задача 6. Докажите, что для любых комплексных чисел выполняются соотношения:

(1) $|z_1\bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)$.

(2) $|z_1\bar{z}_2 - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)$.

(3) $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 - 2[|z_1\bar{z}_2| - \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)]$.

(4) $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2 + 2[|z_1\bar{z}_2| + \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)]$.

Суммирование комплексных чисел

Задача 7. Найдите сумму ряда

$$i - i^2 + i^3 - i^4 + \cdots - i^{2020} + i^{2021}.$$

Суммирование комплексных чисел

Задача 8. Найдите сумму ряда

$$i + 2 + i^3 + 4 + i^5 + 6 + \cdots + i^{99} + 100.$$

Суммирование комплексных чисел

Задача 9. Найдите сумму ряда

$$1 + i^2 + 3 + i^4 + 5 + i^6 + \cdots + 99 + i^{100}.$$

Суммирование комплексных чисел

Задача 10. Найдите сумму первых 2020 членов последовательности $\{z_n\}$:

$$z_1 = i,\ z_n = (z_{n-1})^{i^{2(n-1)}}\ (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Суммирование комплексных чисел

Задача 11. Найдите сумму первых 2020 членов последовательности $\{z_n\}$:

$$z_1 = 0,\;\; z_2 = i,\; z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2})\; (n = 3, 4, 5, \ldots).$$

Тождество Диофанта

- Произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, также можно двумя способами разложить на сумму двух квадратов целых чисел [Цейтен, с. 174]:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \mp bd)^2 + (ad \pm bc)^2.$$

Тождество Диофанта

В левой части доказываемого тождества нетрудно увидеть произведение квадратов модулей чисел $u = a + bi$ и $v = c + di$ (или сопряжённых с ними чисел), а в правой – квадрат модуля их произведения:

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = |u|^2 |v|^2,$$

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = |(ac - bd) + (ad + bc)i|^2 = |uv|^2,$$

или иначе

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = |\bar{u}|^2 |v|^2,$$

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = |(ac + bd) + (ad - bc)i|^2 = |\bar{u}v|^2.$$

Но так как модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, то $|uv|^2 = |u|^2 |v|^2$ и $|\bar{u}v|^2 = |\bar{u}|^2 |v|^2$, откуда следует, что рассматриваемое в задаче тождество верно.

Для самостоятельного решения

Ссылка:

https://docs.google.com/forms/d/1AwOBOjrfyyTGQC3r4AexmHJL_Zzu1HHMaXmq1hrjmWo/edit?usp=sharing

Задание 1. Выберите все верные равенства:

(1) $(2+3i)(2-3i)=13.$

(2) $(2+3i)(2-3i)=-5.$

(3) $(5+i)(5-i)=24.$

(4) $(5+i)(5-i)=26.$

Для самостоятельного решения

Задание 2. Укажите все уравнения, корнем которых является комплексное число $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 - z + 1 = 0$.
3. $2z + 1 = i\sqrt{3}$.
4. $2z - 1 = i\sqrt{3}$.

Для самостоятельного решения

Задание 3. Решите уравнение

$$z^2 + 5z = 5i - 1.$$

Запишите корни через запятую с пробелом.

Для самостоятельного решения

Задание 4. Найдите сумму первых 2020 членов последовательности $\{z_n\}$, где $z_n = i^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Для самостоятельного решения

З а д а н и е 5. Даны два комплексных числа:

$$z_1 = -1 + i \text{ и } z_2 = 2 + 3i.$$

Вычислите:

(1) $\frac{18}{5} z_1 + \frac{4}{5} z_2$. (2) $2z_2$. (3) $-\frac{4}{5} z_1 + \frac{8}{5} z_2$. (4) $\frac{8}{5} z_1 + \frac{4}{5} z_2$.

(5) $\frac{4}{5} z_1 + \frac{2}{5} z_2$. (6) $-z_1 + z_2$. (7) $-2z_1 + z_2$. (8) $-\frac{4}{5} \overline{z_1} + \frac{8}{5} \overline{z_2}$.

(9) $\frac{2(z_1 + z_2)}{z_1}$. (10) $\frac{-2\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$. (11) $-\frac{2}{5} z_1 - \frac{6}{5} z_2$. (12) $\frac{2}{5} z_1 - \frac{4}{5} z_2$.

(13) ${z_1}^2$. (14) $\frac{3}{2} {z_1}^2$. (15) $-\frac{12}{5} z_1 - \frac{1}{5} z_2$. (16) $\frac{1}{2} z_2 + \frac{1}{2} \overline{z_2}$.

(17) $z_1 + \overline{z_1}$. (18) $-6 z_1 z_2 - 32$.

Отметьте полученные числа на комплексной плоскости и соедините их. На что похож получившийся многоугольник?

Литература

1. Болтянский, В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике: учебное пособие для подготовительных отделений вузов / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М: Наука, 1974. 575 с. http://bookre.org/reader?file=567068
2. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. 416 с.
3. Клайн М. Математика. Утрата определённости: Пер. с англ. / Под ред., с предисл. и примеч. И.М. Яглома. М.: Мир, 1984. 484 с.
4. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? 3-е изд., испр. и доп. М.: МЦНМО, 2001. 568 с.
5. Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII веках: Пер. с нем. П. Новикова / Обработка, прим. и предисл. М. Выгодского. М.-Л.: Госуд. технико-теоретическое изд-во, 1933. 429 с.

Лекция опубликована в журнальной версии (см. Седова Е.А., Пчелинцев С.В., Удовенко Л.Н. Комплексные числа в школьном математическом образовании: алгебра комплексных чисел // Математика в школе. 2018. № 8. С. 43—56.)

Литература

- Новоселов С.И. Специальный курс элементарной алгебры. 6 изд. М.: Высшая школа, 1962. 564 с.
- Практикум по решению математических задач: пособие для пед. ин-тов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 240 с.
- School Mathematics Project (SMP) Book 1&2. Cambridge University Press.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ