

Четность

Для решения следующих задач используются соображения, связанные с четностью.

1. Можно ли 25 рублей разменять десятью купюрами по 1, 3 и 5 рублей?
2. Кузнечик прыгал по прямой и после нескольких прыжков одинаковой длины вернулся в исходную точку. Докажите, что он сделал четное число прыжков.
3. На столе стоят семь перевернутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?
4. На плоскости по окружности расположено 11 шестеренок. Каждая сцеплена с соседними. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно?
5. Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могла ли у него получиться сумма 1990?
6. Произведение 22 целых чисел равно 1. Может ли их суммы равняться нулю?
7. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы значение полученного выражения было равно 0?
8. Какое наименьшее неотрицательное число можно получить путем расстановки перед числами 1, ..., 1989 знаков «+» и «-» и последующего выполнения указанных операций?
9. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на прямоугольники 1×2 .
10. Может ли шахматный конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав на каждом из остальных полей ровно один раз.
11. Есть 101 монета, из которых 50 фальшивых, отличающихся по весу на 1 грамм от настоящих. Петя взял одну монету и за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, хочет определить фальшивая ли она. Сможет ли он это сделать?
12. В классе 15 компьютеров. Можно ли их соединить друг с другом так, чтобы каждый компьютер был соединен ровно с пятью другими?
13. Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограммы?
14. Может ли прямая, не проходящая через вершины многоугольника, пересекать его стороны в нечетном числе точек?
15. Прямая l пересекает замкнутую ломаную в 2005 точках. Докажите, что существует прямая l' , пересекающая эту ломаную более чем в 2005 точках.

Литература

1. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров, 1994 (<http://www.mccme.ru/free-books>).
2. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. -М.: МЦНМО, 2004.