ПОСТРОЕНИЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ

Построение циркулем и линейкой занимает важное место в школьном курсе геометрии. Среди задач на построение отметим следующие:

а) деление отрезка пополам и построение серединного перпендикуляра к отрезку;

б) построение биссектрисы угла;

в) проведение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярную данной прямой;

г) проведение прямой, проходящей через данную точку и параллельную данной прямой;

д) построение касательной к окружности, проходящей через данную точку;

е) построение треугольника по его элементам;

ж) построение правильных многоугольников, вписанных и описанных около данной окружности и др.

Здесь мы рассмотрим вопрос о том, какие задачи на построение выполнимы с помощью циркуля и линейки, а какие - нет.

Построение циркулем и линейкой предполагает возможность выполнения следующих операций:

1. Проведение прямой через две данные точки.

2. Проведение окружности с центром в данной точке и данным радиусом.

В результате этих операций к точкам данной совокупности можно присоединять:

а) точку пересечения двух прямых, полученных в результате операции 1;

б) точки пересечения прямой и окружности, полученных в результате операций 1 и 2:

в) точки пересечения двух окружностей, полученных в результате операции 2.

Выясним, какие точки можно построить циркулем и линейкой, исходя из данной совокупности точек A_0, A_1, … .

С помощью циркуля и линейки построим оси координат так, чтобы A_0 было началом координат, а отрезок A_0A_1 – единичным отрезком на оси абсцисс.

Каждой точке A на плоскости можно сопоставить ее координаты (x, y). Ясно, что точку A можно построить тогда и только тогда, когда можно построить ее координаты.

Переходя от точек плоскости к их координатам, выясним, какие числа можно построить, исходя из данной совокупности действительных чисел.

Для совокупности X действительных чисел обозначим через $Q[X]$ числа, полученные из чисел совокупности X применением (возможно многократным) к ним операций сложения, вычитания, умножения и деления.

Простым квадратичным расширением $Q^1[X]$ множества $Q[X]$ назовем совокупность чисел вида $a + b\sqrt{c}$, где a, b – произвольные числа множества

$Q[X]$, а c – некоторое фиксированное число множества $Q[X]$ такое, что $\sqrt{c}$ не принадлежит $Q[X]$. Легко видеть, что $Q[X]$ содержится в $Q^1[X]$, и сумма, разность, произведение и частное чисел множества $Q^1[X]$ снова принадлежит множеству $Q^1[X]$. Через $Q^2[X]$ обозначим простое квадратичное расширение множества $Q^1[X]$, …, через $Q^{n+1}[X]$ обозначим простое квадратичное расширение множества $Q^n[X]$. Наконец, квадратичным расширением $Q^*[X]$ множества $Q[X]$ назовем объединение всех $Q^n[X]$. Квадратичное расширение $Q^*[X]$ можно рассматривать, как множество чисел, получаемых из чисел совокупности X, применением (возможно многократным) к ним операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

Теорема 1. Число c можно построить исходя из данной совокупности X действительных чисел тогда и только тогда, когда оно выражается через них с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня, т.е. принадлежит квадратичному расширению $Q^*[X]$.

Доказательство. Покажем достаточность. Если числа a и b можно построить, то можно построить и числа $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, a/b (рис. 1).

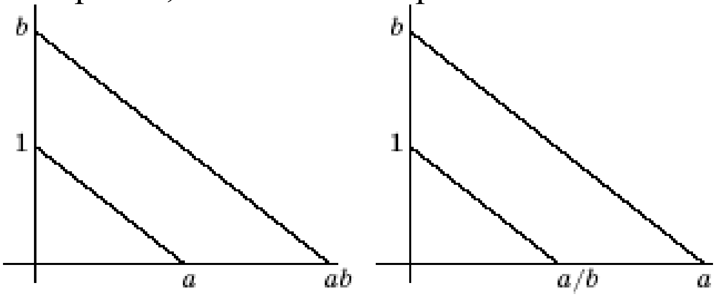

Рис. 1

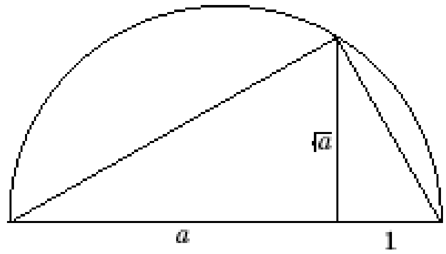

Рис. 2

Далее, если число $c > 0$ можно построить, то можно построить и число $\sqrt{c}$ (рис. 2). Следовательно, любое число, получающееся из чисел данной совокупности с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня, можно построить. Для краткости, будем в дальнейшем называть такие операции квадратичными.

Покажем необходимость, а именно, что получающиеся при построении с помощью циркуля и линейки действительные числа, выражаются через данные числа с помощью квадратичных операций.

1. Пусть точка $A(x, y)$ получена как пересечение двух прямых, проходящих через точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ и $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$, координаты которых принадлежат данной совокупности.

Тогда координаты точки A удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases}(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2,\\ (y_3 - y_4)x + (x_4 - x_3)y = x_4y_3 - x_3y_4.\end{cases}$$

Переобозначив коэффициенты, перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

Откуда

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \; y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Следовательно, координаты x и y выражаются через координаты точек A_1, A_2, A_3 и A_4 с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления, входящих в квадратичные операции.

2. Пусть точка $A(x, y)$ получена как пересечение прямой, проходящей через данные точки $A_1(x_1, y_1)$, $A(x_2, y_2)$, и окружности с центром в данной точке $A(x_3, y_3)$ и радиусом r. При этом координаты данных точек и радиус принадлежат данной совокупности.

Тогда координаты точки A удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2 y_1 - x_1 y_2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r^2. \end{cases}$$

Переобозначив коэффициенты, перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r^2. \end{cases}$$

Выразим x или y из первого уравнения и подставим во второе. Получим квадратное уравнение, коэффициенты которого выражаются через координаты данных точек с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления. Тогда корни этого уравнения выражаются с помощью этих же операций и операции извлечения квадратного корня, т. е. квадратичных операций.

3. Пусть точка $A(x, y)$ получена как пересечение двух окружностей, проходящей через данные точки $A_1(x_1, y_1)$, $A(x_2, y_2)$, и данными радиусами r_1, r_2. При этом координаты данных точек и радиусы принадлежат данной совокупности.

Тогда координаты точки A удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе. Получим линейное уравнение

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2.$$

Добавим к нему второе уравнение. Получим систему, аналогичную системе из второго случая. Поэтому ее решения выражаются через числа данной совокупности с помощью квадратичных операций. Что и завершает доказательство.

Рассмотрим некоторые классические задачи на построение.

I. Задача удвоения куба. Она состоит в построении куба, имеющего объем вдвое больший данного. Точнее, для данного единичного отрезка требуется построить ребро куба, имеющего объем, равный двум.

Длина ребра искомого куба является действительным корнем кубического уравнения $x^3 - 2 = 0$. Поэтому для ответа на вопрос: можно или нельзя выполнить построение циркулем и линейкой, нужно ответить на вопрос: выражается или нет число $\sqrt[3]{2}$ с помощью квадратичных операций, применяемых к числу 1.

II. Задача о трисекции угла состоит в делении произвольного угла на три равные части.

Конечно, некоторые углы, например, угол, равный 90° можно разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки. Рассмотрим вопрос о возможности такого деления произвольного угла φ.

Используя тригонометрические формулы, нетрудно получить уравнение $\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$. Следовательно, число $\cos\frac{\varphi}{3}$ является корнем уравнения $4x^3 - 3x - \cos\varphi = 0$.

В частности, если $\varphi = 60^\circ$ получаем уравнение $8x^3 - 6x - 1 = 0$, которое заменой $2x$ на y можно привести к виду $y^3 - 3y - 1 = 0$.

Таким образом, ответ на вопрос о возможности деления угла в 60° на три равные части сводится к вопросу о возможности выражения действительного корня этого уравнения с помощью квадратичных операций, применяемых к числу 1.

Эти две задачи приводят к необходимости исследования корней кубического уравнения.

Теорема 2. Если уравнение $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ с коэффициентами из поля Q не имеет корней в поле P. то оно не имеет корней и в его простом квадратичном расширении.

Доказательство. Пусть число $a + b\sqrt{c}$ является корнем данного уравнения, где a, b, c принадлежат P, $\sqrt{c}$ не принадлежит P. Заметим, что $a + b\sqrt{c}$ является корнем квадратного уравнения $(x - (a + b\sqrt{c}))(x - (a - b\sqrt{c})) = 0$, которое можно переписать в виде $x^2 + Ax + B = 0$, где A и B принадлежат P.

Разделим исходное уравнение на полученное квадратное уравнение с остатком. Получим равенство $x^3 + px^2 + qx + r = (x^2 + Ax + B)(x + p - A) + Cx + D$, в котором все коэффициенты принадлежат P. Так как число $a + b$

$\sqrt{c}$ является корнем кубического и квадратного уравнения то должно выполняться равенство $C(a + b\sqrt{c}) + D = 0$, из которого следует, что $a + b\sqrt{c}$ принадлежит P. Значит, $b = 0$ и a является корнем данного уравнения. Противоречие.

Следствие. Если уравнение $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней, то его корни не выражаются с помощью квадратичных операций, применяемых к числу 1.

Заметим, что всякий рациональный корень уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ с целыми коэффициентами является целым числом и делителем свободного члена.

Действительно, пусть $\frac{m}{n}$ (m и n взаимно просты) является корнем кубического уравнения. Тогда имеет место равенство

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 + p\left(\frac{m}{n}\right)^2 + q\frac{m}{n} + r = 0,$$

или $m^3 + pm^2n + qmn^2 + rn^3 = 0$.

Из последнего равенства следует, что r делится на m и m делится на n. Но m и n взаимно просты, значит $n = 1$.

Полученные выше уравнения $x^3 – 2 = 0$ и $y^3 – 3y – 1 = 0$, как легко видеть, не имеют рациональных корней и, следовательно, их корни не выражаются с помощью квадратичных операций. Поэтому, задачи об удвоении куба и трисекции угла неразрешимы.

Рассмотрим еще примеры неразрешимых задач на построение циркулем и линейкой.

III. Задача о квадратуре круга состоит в построении квадрата, равновеликого данному кругу.

Она неразрешима с помощью циркуля и линейки, так как сводится к построению числа π, которое не только не выражается с помощью квадратичных операций, но является трансцендентным (не алгебраическим) числом.

IV. Задача о построении правильных многоугольников, вписанных в единичную окружность.

Пусть дана окружность единичного радиуса. С помощью циркуля и линейки можно вписать в эту окружность правильные треугольник, шестиугольник и т. д. $3\cdot 2^n$-угольник (рис. 3).

Аналогично, в единичную окружность можно вписать правильные $2\cdot 2^n$-угольники (рис. 4), правильные $5\cdot 2^n$-угольники (рис. 5).

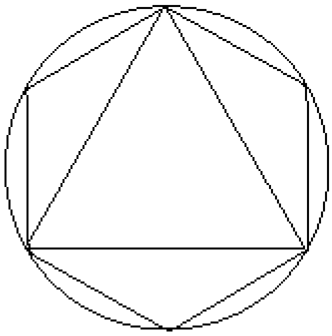

Рис. 3

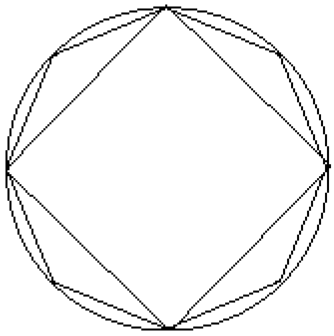

Рис. 4

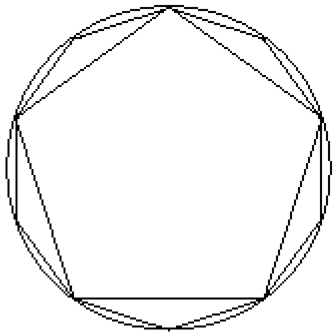

Рис. 5

Полностью вопрос о возможности построений правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки был исследован Гауссом. А именно, он доказал, что правильный *n*-угольник может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда *n* представимо в виде произведения степени двойки и различных простых чисел Ферма, т.е. простых чисел вида $2^{2^n}+1$. В частности, из этого следует, что правильный семиугольник нельзя построить циркулем и линейкой. Докажем это отдельно с использованием комплексных чисел.

Вершины правильного семиугольника в комплексной плоскости, вписанного в единичную окружность, являются корнями уравнения $z^7 - 1 = 0$. Один из корней есть $z = 1$, а остальные удовлетворяют уравнению

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Деля на z^3, получим уравнение

$$z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0.$$

Простые алгебраические преобразования приводят его к виду

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 + \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(z+\frac{1}{z}\right) - 1 = 0.$$

Положив теперь $z + 1/z = t$, окончательно приходим к уравнению

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0 \ (*).$$

Так как комплексное число z представляется в виде $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то $1/z = \cos\varphi - i\sin\varphi$ и, следовательно, $t = 2\cos\varphi$ является действительным числом.

Как легко видеть, уравнение (*) не имеет рациональных корней и, следовательно, его корни не выражаются с помощью квадратичных операций.

Таким образом, задача построения правильного семиугольника циркулем и линейкой неразрешима.

Литература

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть I. – М.: Просвещение, 1957.
2. Адлер А. Теория геометрических построений. – Л.: Учпедгиз, 1940.
3. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение. – М.: Учпедгиз, 1950.
4. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. – М.: Учпедгиз, 1957.
5. Воронец А.М. Геометрия циркуля. Ленинград, 1934.
6. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. – М.: Наука, 1987.
7. Костовский А.Н. Геометрические построения одним циркулем. – М.: Наука, 1984.
8. Перепелкин Д.И. Геометрические построения в средней школе. – М.: Учпедгиз, 1953.
9. Смогоржевский А.С. Линейка в геометрических построениях. – М., 1957.
10. Энциклопедия элементарной математики. Т. IV. – М.: Физматлит, 1963.