

## ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Рассмотрим отношение делимости в кольце целых чисел. Говорят, что число  $a$  делится на  $b$ , существует такое целое число  $q$ , для которого  $a = qb$ .

Для отношения делимости справедливы следующие свойства.

**Свойство 1.** Если  $a$  делится на  $b$  и  $b$  делится на  $c$ , то  $a$  делится на  $c$ .

**Свойство 2.** Если  $a_1, \dots, a_n$  делятся на  $b$ , то и  $a_1 + \dots + a_n$  делится на  $b$ .

**Свойство 3.** Если  $a_1$  делится на  $b_1, \dots, a_n$  делится на  $b_n$ , то и  $a_1 \dots a_n$  делится на  $b_1 \dots b_n$ .

Имеет место следующая теорема о делении с остатком.

**Теорема.** Для произвольных целого числа  $a$  и натурального числа  $b$  существуют единственные числа  $q$  и  $r$  такие, что  $a = qb + r$  и  $0 \leq r < b$ . Число  $q$  называется неполным частным, а число  $r$  – остатком.

Приведем два доказательства этой теоремы. Первое из книги [1].

**Доказательство 1.** Пусть сначала  $a \geq 0$ . Будем выписывать одно за другим числа  $a, a - b, a - 2b, \dots$  до тех пор, пока не появится отрицательное число. Пусть последним из неотрицательных членов этой последовательности будет число  $a - qb$ . Обозначая его через  $r$ , мы имеем  $a = qb + r$ . Очевидно, что  $r < b$  (иначе число  $r - b = a - (q + 1)b$  было бы неотрицательным).

Пусть теперь  $a < 0$ . Рассуждая аналогично предыдущему, будем выписывать последовательность чисел  $a, a + b, a + 2b, \dots$  до тех пор, пока не появится первое неотрицательное число  $r$  (легко проверить, что  $r < b$ ). Пусть  $r = a + q'b$ . Тогда, обозначая  $-q'$  через  $q$ , получаем  $a = qb + r$ . Что и требовалось доказать.

Докажем единственность, т.е., что из  $a = qb + r$  и  $a = q'b + r'$  следует  $q = q'$  и  $r = r'$ . В этом случае имеем равенство  $qb + r = q'b + r'$ , откуда  $r - r' = (q' - q)b$ , т.е.  $r - r'$  делится на  $b$ . Но  $|r - r'| < b$ , и равенство  $r - r' = (q' - q)b$  возможно только в случае  $r - r' = 0$ . Но тогда  $(q' - q)b = 0$  и, следовательно,  $q' - q = 0$ .

Приведем другое доказательство с геометрической интерпретацией.

**Доказательство 2.** Заметим, что система промежутков  $[qb, (q + 1)b)$ , где  $q$  – целое, покрывает все множество целых чисел. Число  $a$  попадает в один и только один из этих промежутков, т.е. существует единственное  $q$ , для которого  $qb \leq a < qb + b$ . Обозначим  $r = a - qb$ . Тогда будем иметь:  $a = qb + r$  и  $0 \leq r < b$ .

Теорему о делении с остатком можно использовать для нахождения наибольшего общего делителя НОД( $a, b$ ) двух натуральных чисел  $a$  и  $b$ .

Напомним, что наибольшим общим делителем двух натуральных чисел  $a$  и  $b$  называется наибольшее из чисел, являющихся делителями  $a$  и  $b$  одновременно. Докажем, что такое число существует. Действительно, если  $c$  является делителем натурального числа  $a$ , то  $|c| \leq a$ . Следовательно, у каждого натурального числа имеется конечное число делителей. Таким образом, число общих делителей двух натуральных чисел конечно и, значит, среди них есть наибольший элемент – наибольший общий делитель.

Заметим, что из равенства  $a = qb + r$ , где  $0 \leq r < b$ , следует, что каждый делитель чисел  $a$  и  $b$  является делителем чисел  $b$  и  $r$  и наоборот.

Следовательно,  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$ . Если  $r$  отлично от нуля, то разделим  $b$  на  $r$  с остатком. Получим  $b = q_1r + r_1$ , где  $0 \leq r_1 < r$ , и  $\text{НОД}(b, r) = \text{НОД}(r, r_1)$ . Продолжая этот процесс деления, придем к ситуации, когда  $r_{k+1} = 0$ , т.е.  $r_{k-1}$  делится на  $r_k$  и, значит,  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r) = \text{НОД}(r, r_1) = \dots = \text{НОД}(r_{k-1}, r_k) = r_k$ .

Этот метод нахождения наибольшего общего делителя содержится в "Началах" Евклида и называется алгоритмом Евклида.

**Пример.** Найти наибольший общий делитель чисел 168 и 70.

Имеем,  $168 = 2 \cdot 70 + 28$ ,  $70 = 2 \cdot 28 + 14$ ,  $28 = 2 \cdot 14$ . Таким образом,  $\text{НОД}(168, 70) = 14$ .

Числа  $a$  и  $b$  называются равноостаточными (при делении на  $c$ ), если равны их остатки.

Для отношения равноостаточности справедливы следующие свойства.

**Свойство 1.**  $a$  и  $b$  равноостаточны (при делении на  $c$ ) тогда и только тогда, когда  $a - b$  делится на  $c$ .

Доказательство очевидно.

**Свойство 2.** Если  $a_1, \dots, a_n$  соответственно равноостаточны с  $b_1, \dots, b_n$ , то  $a_1 + \dots + a_n$  и  $b_1 + \dots + b_n$  также равноостаточны.

Доказательство очевидно.

**Свойство 3.** Если  $a_1, \dots, a_n$  соответственно равноостаточны с  $b_1, \dots, b_n$ , то  $a_1 \dots a_n$  и  $b_1 \dots b_n$  также равноостаточны.

Доказательство проведем индукцией по  $n$ . Для  $n=1$  утверждение очевидно. Покажем его справедливость для двух сомножителей, т.е. для  $n=2$ . Имеем  $a_1a_2 - b_1b_2 = (a_1 - b_1)a_2 + b_1(a_2 - b_2)$ . Поэтому, если  $a_1 - b_1$  делится на  $c$  и  $a_2 - b_2$  делится на  $c$ , то и  $a_1a_2 - b_1b_2$  делится на  $c$ . Предположим, что утверждение верно для  $n - 1$  и докажем, что оно верно для  $n$ . Представим произведения  $a_1 \dots a_n$  и  $b_1 \dots b_n$  в виде  $a_1 \dots a_n = (a_1 \dots a_{n-1})a_n$  и  $b_1 \dots b_n = (b_1 \dots b_{n-1})b_n$ . По предположению индукции,  $a_1 \dots a_{n-1}$  и  $b_1 \dots b_{n-1}$  равноостаточны. Применяя доказанное утверждение для двух сомножителей, получаем, что числа  $(a_1 \dots a_{n-1})a_n$  и  $(b_1 \dots b_{n-1})b_n$  равноостаточны.

**Следствие.** Если  $a$  и  $b$  равноостаточны, то  $a^n$  и  $b^n$  равноостаточны.

Заметим, что равноостаточность чисел  $a^n$  и  $b^n$  можно доказать и непосредственно, воспользовавшись формулой  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ .

Рассмотрим примеры решения задач на использование этих свойств.

**Пример 1.** Выяснить, делится ли на три число  $13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15}$ .

**Решение.** Число 13 при делении на 3 равноостаточно с 1, следовательно,  $13^{16}$  равноостаточно с  $1^{16} = 1$ . Число 2 равноостаточно с  $-1$ , следовательно  $2^{25}$  с  $(-1)^{25} = -1$ . Число 5 равноостаточно с  $-1$ , следовательно,  $5^{15}$  равноостаточно с  $(-1)^{15} = -1$ . Таким образом, число  $13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15}$  равноостаточно с  $1 - (-1)(-1) = 0$ , т.е. данное число делится на 3.

**Пример 2.** Доказать, что число  $11^{10} - 1$  делится на 100.

**Решение.** Имеем  $11^{10} - 1 = 10(11^9 + 11^8 + \dots + 1)$ . Число 11 при делении на 10 равноостаточно с 1. Поэтому сумма чисел, стоящих в скобке правой части равноостаточна с  $1 + 1 + \dots + 1 = 10$  и, следовательно, делится на 10. Таким

образом, исходное число делится на 100.

**Пример 3.** Доказать, что при любом натуральном  $n$  число  $n^3 + 11n$  делится на 6.

**Решение.**  $11n$  при делении на 6 равносоставочно с  $-n$ . Поэтому данное число равносоставочно с  $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$ . В правой части стоит произведение трех последовательных натуральных чисел (или 0). Одно из них обязательно четное, а другое делится на 3. Таким образом все произведение делится на 6.

**Пример 4.** Доказать, что число  $2222^{5555} + 5555^{2222}$  делится на 7.

**Решение.**  $2222$  и  $-4$  при делении на 7 равносоставочны,  $5555$  и  $4$  также равносоставочны. Поэтому  $2222^{5555} + 5555^{2222}$  равносоставочно с  $-4^{5555} + 4^{2222} = -4^{2222}(4^{3333} - 1) = -4^{2222}(64^{1111} - 1) = -4^{2222}63(64^{110} + \dots + 1)$ . Так как 63 делится на 7, то и данное число делится на 7.

**Пример 5.** Найти остаток от деления числа  $10^{10} + 10^{10^2} + \dots + 10^{10^{10}}$  на 7.

**Решение.** Заметим, что  $1000$  при делении на 7 равносоставочно с  $-1$ . Поэтому  $10^{10} = 10 \cdot 10^9$  равносоставочно с  $-10$ . Последующие слагаемые также равносоставочны с  $-10$  и, значит, вся сумма равносоставочно с числом  $-100$ , которое, в свою очередь, равносоставочно с 5. Таким образом, искомый остаток равен 5.

**Пример 6.** Можно ли 2006 представить как разность квадратов двух натуральных чисел?

**Ответ.** Нет. Если бы  $2006 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , то или  $a - b$  или  $a + b$  было бы четным числом. Но тогда и другое число было бы четным, а значит,  $a^2 - b^2$  делилось бы на 4. Но 2006 не делится на 4.

Рассмотрим теперь некоторые признаки делимости.

### 1. Признак делимости на 2.

Число делится на 2, если число, образованное его последней цифрой в десятичной записи делится на 2.

### 2. Признак делимости на 4.

Число делится на 4, если число, образованное двумя последними цифрами в его десятичной записи, делится на 4.

Доказательство вытекает из того, что число 100 и его кратные делятся на 4.

### 3. Признак делимости на 5.

Число делится на 5, если его последняя цифра в десятичной записи 0 или 5.

### 4. Признак делимости на 3.

Число делится на 3, если сумма чисел, образованных его цифрами в десятичной записи делится на 3.

**Доказательство.** Число 10 равносоставочно с 1. Поэтому 100 равносоставочно с 1, 1000 равносоставочно с 1 и т.д. Таким образом, число  $a_n \dots a_1 a_0 = a_0 + a_1 10 + \dots + a_n 10^n$  равносоставочно с  $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ .

Заметим, что мы доказали несколько больше, чем требовалось, а именно, мы доказали, что число дает при делении на три такой же остаток, что и сумма чисел, образованных цифрами этого числа в десятичной записи.

### 5. Признак делимости на 9.

Число делится на 9, если сумма чисел, образованных его цифрами в десятичной записи делится на 9.

Доказательство аналогично предыдущему.

### 6. Признак делимости на 8.

Число делится на 8, если число, образованное последними тремя цифрами в десятичной записи делится на 8.

Доказательство вытекает из того, что число 1000 и его кратные делятся на 8.

### 7. Признак делимости на 11.

Число делится на 11, если алгебраическая сумма чисел, образованных его цифрами в десятичной записи с чередующимися знаками делится на 11.

**Доказательство.** Число 10 равноостаточно с  $-1$ . Поэтому 100 равноостаточно с  $(-1)(-1) = 1$ , 1000 равноостаточно с  $-1$  и т.д. Таким образом, число  $a_n \dots a_1 a_0 = a_0 + a_1 10 + \dots + a_n 10^n$  равноостаточно с  $a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n$ .

В качестве примера рассмотрим число 3516282. Алгебраическая сумма его цифр равна  $2 - 8 + 2 - 6 + 1 - 5 + 3 = -11$ . Таким образом, данное число делится на 11.

### 8. Объединенный признак делимости на 7, 11 и 13.

Число делится на 7, 11 или 13, если алгебраическая сумма чисел, образованных тройками цифр данного числа в десятичной записи с чередующимися знаками делится соответственно на 7, 11 или 13.

**Доказательство.** Заметим, что произведение чисел 7, 11 и 13 равно 1001. Поэтому число 1000 при делении на 7, 11 или 13 равноостаточно с  $-1$ . Далее поступаем как и в признаке делимости на 11.

В качестве примера рассмотрим число 42 623 295. Число  $295 - 623 + 42 = -286$  делится на 11 и 13, но не делится на 7. Следовательно, и данное число делится на 11 и 13, но не делится на 7.

### 9. Признак делимости на 37.

Число делится на 37, если сумма чисел, образованных тройками цифр данного числа в десятичной записи делится соответственно на 37.

Доказательство вытекает из того, что число 1000 при делении на 37 равноостаточно с 1.

Заметим также, что трехзначные числа 111, 222, ..., 999 делятся на 37.

Легко видеть, что числа 356 643, 123 432, 215 673 делятся на 37.

Воспользуемся свойствами делимости для решения следующей задачи, предлагавшейся на творческом конкурсе учителей математики г. Москвы в 2004 г.

**Задача.** На доске написано число 19941995...20032004. Разобьем его десятичную запись произвольным образом на два числа и сложим их. С полученными числами сделаем аналогичную операцию и так до тех пор пока не получим однозначное число. Какие однозначные числа можно получить таким образом?

**Решение.** Пусть десятичная запись данного числа разбита на числа  $x$  и  $y$ .

Тогда исходное число имеет вид  $x10\dots 0 + y$ , а число, полученное в результате указанной операции равно  $x + y$ . Рассмотрим разность этих чисел:  $(x10\dots 0 + y) - (x + y) = 9\dots 9x$ . Так как эта разность делится на 9, то исходное и полученное число имеют одинаковые остатки при делении на 9.

Следовательно, каждый раз, при выполнении указанной операции этот остаток не изменяется. Непосредственная проверка показывает, что остаток от деления на 9 исходного числа равен 2. Значит, в результате указанных операций можно получить только число 2.

### Упражнения

1. На какую цифру оканчивается число: а)  $9^{9999}$ ; б)  $3^{999}$ ; в)  $7^{1000}$ ; г)  $33^{77} + 77^{33}$ ?
2. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.
3. Докажите, что произведение любых пяти последовательных натуральных чисел делится на 120.
4. Найдите все натуральные числа  $n > 1$ , для которых  $n^3 - 3$  делится на  $n - 1$ .
5. Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $n^3 + 2n$  делится на 3.
6. Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $n^5 + 4n$  делится на 5.
7. Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $n^2 + 1$  не делится на 3.
8. Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $n^3 + 2$  не делится на 9.
9. Докажите, что для любого четного натурального  $n$  число  $n^3 - 4n$  делится на 48.
10. Докажите, что для любого нечетного натурального  $n$  число  $n^6 - n^4 - n^2 + 1$  делится на 128.
11. Докажите, что при любых целых  $a$  и  $b$  число  $a^2 + 9ab + b^2$  делится на 11.
12. Докажите, что если  $a^2 + 9ab + b^2$  делится на 11, то число  $a^2 - b^2$  делится на 11.
13. Докажите, что если  $56a = 65b$ , то число  $a + b$  составное.
14. Докажите, что если число  $3n + 2m$  делится на 23, то и число  $17n + 19m$  делится на 23.
15. Докажите, что число  $3^{1974} + 5^{1974}$  делится на 13.
16. Докажите, что число  $21^{10} - 1$  делится на 2200.
17. Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $n^2 - 3n + 5$  не делится на 121.
18. Пусть  $S(n)$  – сумма цифр в десятичной записи числа  $n$ . Найдите все натуральные  $n$ , для которых выполняется равенство  $n + S(n) + S(S(n)) = 1993$ .

### Литература

1. Воробьев Н.Н. Признаки делимости. – М.: Наука, 1980.
2. Гарднер М. Математические досуги. – М.: Мир, 1972.

3. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров, 1994.
4. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004.
5. Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М.: Наука, 1991.
6. Московские математические олимпиады 1993 – 2005 г. Под редакцией В.М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006.
7. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – М.: Наука, 1980.
8. Шклярский Д.О. и др. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1, арифметика и алгебра. – М – Л.: Гос. изд. техн.-теор. литературы, 1950.