ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ЛИНИИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

К числу замечательных линий и точек в треугольнике, изучаемых в основном курсе геометрии, относятся:

а) медианы и точка пересечения медиан (центроид);

б) биссектрисы и точка пересечения биссектрис (центр вписанной окружности);

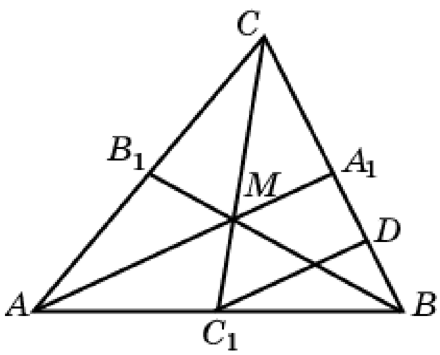
в) точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности);

г) высоты и точка пересечения высот (ортоцентр).

Начнем с медиан треугольника.

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.

Доказательство. В треугольнике $A\ BC$ проведем медианы AA_1 и CC_1 и их точку пересечения обозначим M.



Через точку C_1 проведем прямую, параллельную AA_1 и ее точку пересечения с BC обозначим D. Тогда D – середина BA_1, следовательно, $CA_1{:}A_1D = 2{:}1$. По теореме Фалеса, $CM : MC_1 = 2{:}1$. Таким образом, медиана AA_1 пересекает медиану CC_1 в точке M, делящей медиану CC_1 в отношении 2:1. Аналогично, медиана BB_1 пересекает медиану CC_1 в точке, делящей медиану CC_1 в отношении 2:1, т.е. точке M.

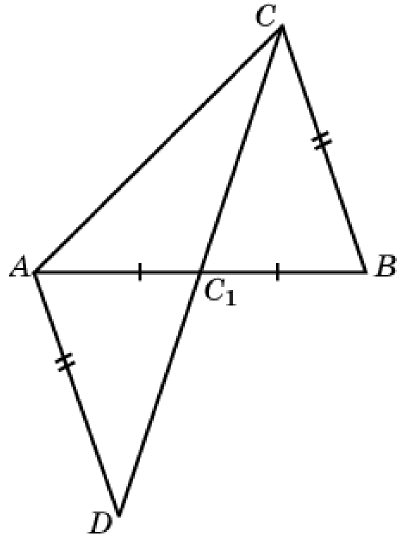
Одним из основных методов решения задач, в которых участвуют медианы треугольника, является метод «удвоения медианы». Рассмотрим его на примере решения следующих задач.

Задача 1. Докажите, что медиана треугольника лежит ближе к большей стороне, т.е. если в треугольнике ABC $AC > BC$, то для медианы CC_1 выполняется неравенство $\angle ACC_1 < \angle BCC_1$.

Решение. Продолжим медиану CC_1 и отложим отрезок C_1D, равный CC_1. Треугольник AC_1D равен треугольнику BC_1C по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AD = BC$, $\angle ADC_1 = \angle BCC_1$. В треугольнике ACD $AC > AD$. Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то $\angle ADC > \angle ACD$. Следовательно, выполняется неравенство $\angle ACC_1 < \angle BCC_1$.

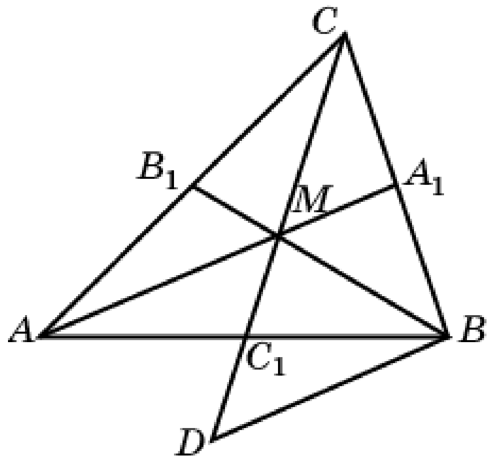
Задача 2. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, выходящих из той же вершины, т.е. для медианы CC_1 треугольника ABC выполняется неравенство $CC_1 < (AC + BC)/2$.

Решение. Продолжим медиану CC_1 и отложим отрезок C_1D, равный CC_1. Треугольник AC_1D равен треугольнику BC_1C по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AD = BC$. В силу неравенства треугольника имеем неравенство $CD < AC + AD$. Следовательно, выполняется неравенство $CC_1 < (AC + BC)/2$.



Задача 3. Площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника.

Решение. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC, пересекающиеся в точке M. Продолжим медиану CC_1 и отложим отрезок C_1D, равный MC_1.

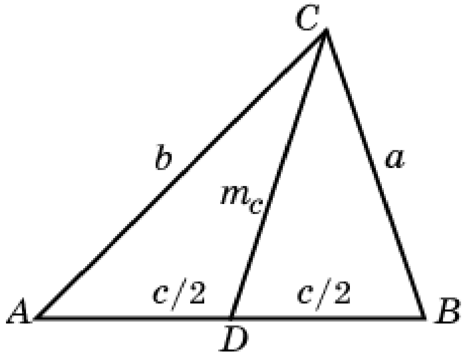


Площадь треугольника BMC равна 1/3, и его стороны равны 2/3 медиан исходного треугольника. Следовательно, площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника, равна 3/4.

Выведем формулу, выражающую медианы треугольника через его стороны. Пусть стороны треугольника ABC равны a, b, c. Искомую длину медианы CD обозначим m_c. По теореме косинусов имеем:

$$b^2 = m_c^2 + \frac{c^2}{4} - 2m_c \frac{c}{2}\cos\angle ADC,$$

$$a^2 = m_c^2 + \frac{c^2}{4} - 2m_c \frac{c}{2}\cos\angle BDC.$$



Складывая эти два равенства и учитывая, что $\cos\angle ADC = -\cos\angle BDC$, получаем равенство $a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$, из которого находим

$$m_c = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}.$$

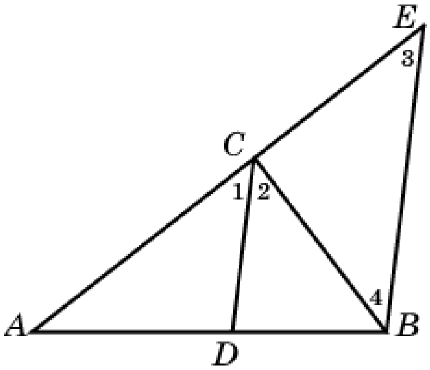
Перейдем к биссектрисам треугольника.

В школьном курсе геометрии доказывается, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной окружности.

Рассмотрим одну из наиболее важных теорем, относящихся к биссектрисам треугольника.

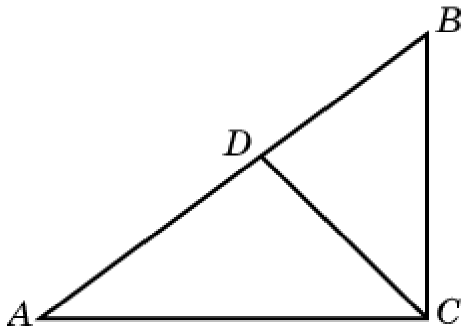
Теорема. Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам, т.е. если CD – биссектриса треугольника ABC, то $AD : DB = AC : BC$.

Доказательство. Через точку B проведем прямую, параллельную биссектрисе CD и ее точку пересечения с прямой AC обозначим E.



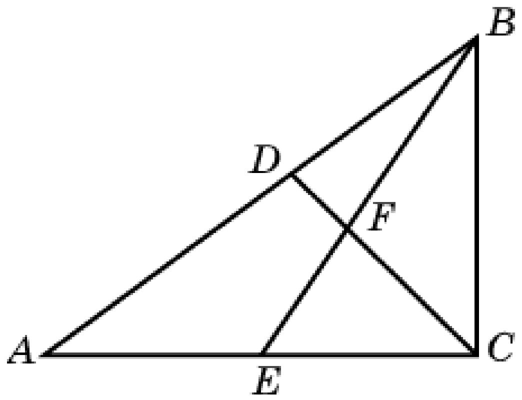
Углы 1 и 3 равны, как соответственные, углы 2 и 4 равны, как внутренние накрест лежащие. Следовательно, треугольник *BCE* равнобедренный, *BC* = *CE*. По теореме о пропорциональных отрезках *AD* : *DB* = *AC* : *CE*, следовательно, *AD* : *DB* = *AC* : *BC*.

Задача 1. В треугольнике *ABC* *AC* = 4, *BC* = 3, *AB* = 5, *CD* – биссектриса. Найдите площадь треугольника *ACD*.

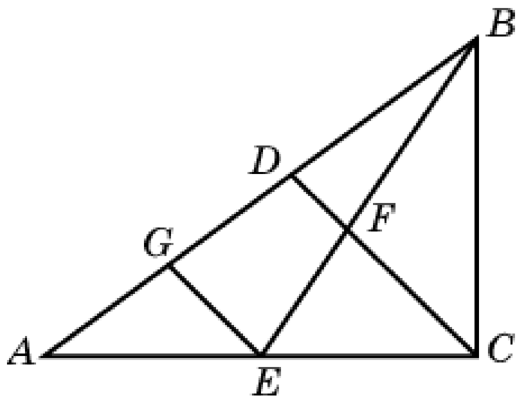


Решение. Площадь треугольника *ABC* равна 6. Сторона *AD* составляет 4/7 стороны *AB*. Следовательно, площадь треугольника *ACD* равна $3\frac{3}{7}$.

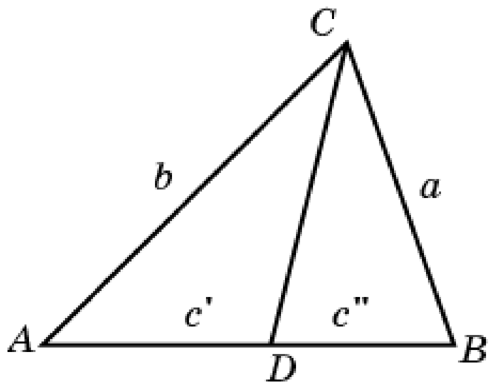
Задача 2. В треугольнике *ABC* *AC* = 4, *BC* = 3, *AB* = 5. *CD* – биссектриса, *BE* – медиана, *F* – их точка пересечения. Найдите площадь четырехугольника *ADFE*.



Решение. Площадь треугольника *ABE* равна 3. Проведем среднюю линию *EG* треугольника *ACD*. *BD* : *DA* = 3:4, *BD* : *DG* = 3:2. Следовательно, *BD* : *AB* = 3:7, *BF* : *BE* = 3:5. Следовательно, площадь треугольника *BDF* равна 27/35. Площадь четырехугольника *ADFE* равна $2\frac{8}{35}$.



Выведем формулу, выражающую биссектрисы треугольника через его стороны. Пусть стороны треугольника *ABC* равны *a, b, c*. Искомую длину биссектрисы *CD* обозначим l_c. Отрезки *AD* и *BD* обозначим *c'* и *c"* соответственно. Заметим, что $c' = \frac{bc}{a+b}, c'' = \frac{ac}{a+b}$.



По теореме косинусов имеем:

$b^2 = l_c^2 + c'^2 - 2l_c c' \cos\angle ADC,$

$a^2 = l_c^2 + c''^2 - 2l_c c'' \cos\angle BDC.$

Умножим первое равенство на *c"*, второе на *c'* и сложим. Получим $a^2c'' + b^2c' = l_c^2 c + c'^2 c'' + c''^2 c'$. Откуда $l_c^2 = \frac{a^2c'' + b^2c'}{c} - c'c''$.

Непосредственная проверка показывает, что $\frac{a^2c'' + b^2c'}{c} = ab.$ Окончательно получаем следующую формулу

$$l_c^2 = ab - c'c''.$$

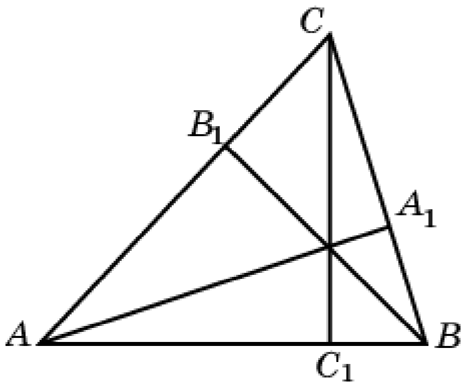
Задача. Докажите, что биссектриса CC_1 треугольника *ABC* делится точкой *O* пересечения биссектрис в отношении $(a+b) : c$, считая от вершины, где *a, b, c* – стороны треугольника, лежащие против соответствующих вершин *A, B, C*.

Рассмотрим высоты треугольника.

В школьном курсе геометрии доказывается, что высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке – ортоцентре.

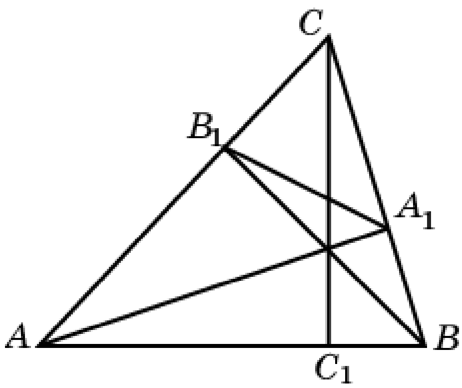
Рассмотрим некоторые свойства, связанные с высотами треугольника.

Свойство 1. Если AA_1, BB_1, CC_1 – высоты треугольника ABC, то угол A_1AC равен углу B_1BC.



Доказательство. Прямоугольные треугольники A_1AC и B_1BC имеют общий острый угол. Следовательно, равны и два других их острых угла A_1AC и B_1BC.

Свойство 2. Если AA_1, BB_1, CC_1 – высоты треугольника ABC, то треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C.



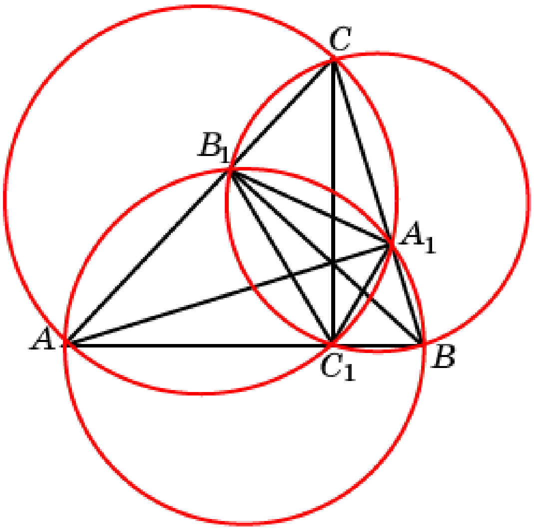
Доказательство. Из подобия треугольников A_1AC и B_1BC (предыдущее свойство) следует, что $AC : A_1C = BC : B_1C$. Следовательно, треугольники ABC и A_1B_1C подобны, как треугольники имеющие общий угол и соответственно пропорциональные стороны, прилежащие к этому углу.

Свойство 3. Если AA_1, BB_1, CC_1 – высоты треугольника ABC, то угол A_1C_1C равен углу B_1C_1C.

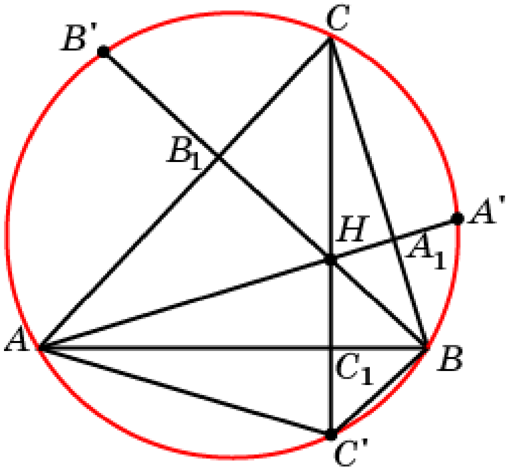
Доказательство. На сторонах треугольника ABC, как на диаметрах, опишем окружности.

Они пройдут через точки A_1, B_1, C_1. Угол A_1C_1C равен углу A_1AC как углы, опирающиеся на одну дугу A_1C. Угол A_1AC равен углу B_1BC по свойству 1. Угол B_1BC равен углу B_1C_1C, как углы, опирающиеся на одну дугу B_1C. Следовательно, угол A_1C_1C равен углу B_1C_1C.

Свойство 4. Точки A', B', C', симметричные точке H пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC относительно его сторон, принадлежат окружности, описанной около этого треугольника.



Доказательство. Покажем, что точка C' принадлежит описанной окружности. Для этого достаточно показать, что сумма углов $AC'B$ и ACB равна 180°. Действительно, углы $AC'B$ и AHB равны, как симметричные. Углы AHB и A_1HB_1 равны, как вертикальные. Углы A_1HB_1 и A_1CB_1 в сумме составляют 180°. Следовательно, сумма углов $AC'B$ и ACB равна 180°.



Задача 1. Докажите, что для высот h_a, h_b, h_c треугольника и радиуса r окружности, вписанной в этот треугольник, имеет место равенство

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Задача 2. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1, $AB = c$, $\angle C = \varphi$. Найдите A_1B_1.

Задача 3. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1, $BC = 24$, $B_1C_1 = 12$, O – центр вписанной окружности. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

Рассмотрим некоторые другие замечательные точки и линии в треугольнике.

Точка Торричелли

Путь дан треугольник ABC. Точкой Торричелли этого треугольника называется такая точка O, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120° (рис. 1, а), т.е. углы AOB, AOC и BOC равны 120°.

Докажем, что в случае, если все углы треугольника меньше 120° , то точка Торричелли существует.

На стороне AB треугольника ABC построим равносторонний треугольник ABC' (рис. 1, а), и опишем около него окружность. Отрезок AB стягивает дугу этой окружности величиной 120° . Следовательно, точки этой дуги, отличные от A и B, обладают тем свойством, что отрезок AB виден из них под углом 120° . Аналогичным образом, на стороне AC треугольника ABC построим равносторонний треугольник ACB' (рис. 1, а), и опишем около него окружность. Точки соответствующей дуги, отличные A и C, обладают тем свойством, что отрезок AC виден из них под углом 120° . В случае, когда углы треугольника меньше 120° , эти дуги пересекаются в некоторой внутренней точке O. В этом случае $\angle AOB = 120°$, $\angle AOC = 120°$. Следовательно, и $\angle BOC = 120°$. Поэтому точка O является искомой.

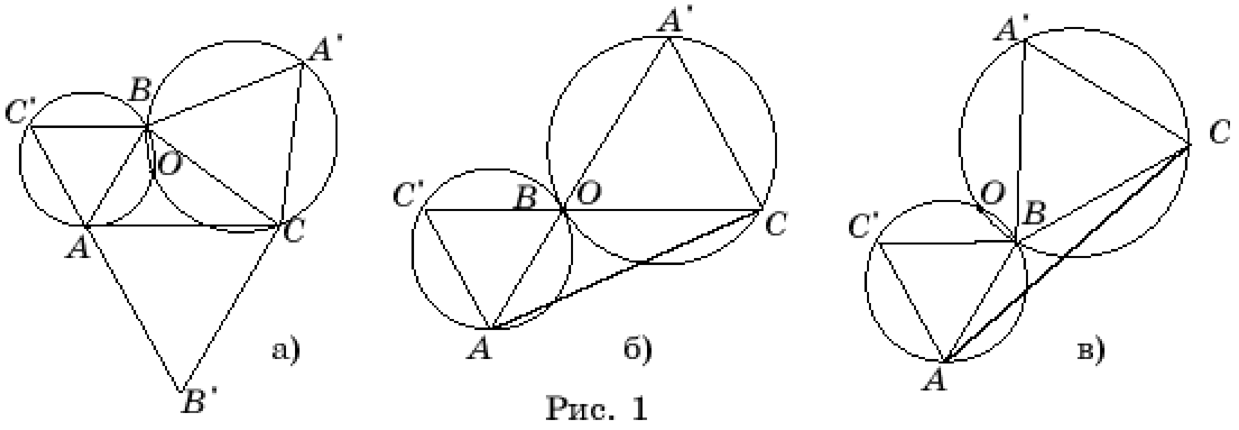


Рис. 1

В случае, когда один из углов треугольника, например ABC, равен 120° , точкой пересечения дуг окружностей будет точка B (рис. 1, б). В этом случае точки Торричелли не существует, так как нельзя говорить об углах, под которыми видны из этой точки стороны AB и BC.

В случае, когда один из углов треугольника, например ABC, больше 120° (рис. 1, в), соответствующие дуги окружностей не пересекаются. Сами окружности пересекаются в некоторой точке O, из которой стороны AB и BC видны под углом 60°. В этом случае точки Торричелли также не существует.

Таким образом, во всех трех случаях окружности, описанные около равносторонних треугольников, построенных на сторонах данного треугольника, пересекаются в одной точке. Если углы треугольника меньше 120° , то эта точка лежит внутри треугольника и является точкой Торричелли.

Задача. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с соответствующими вершинами правильных треугольников, построенных на сторонах данного треугольника в его внешней области, пересекаются в одной точке.

Окружность девяти точек

Теорема. Пусть в треугольнике ABC (рис. 2), H – точка пересечения высот треугольника; точки A_1, B_1, C_1 обозначают основания высот; A_2, B_2, C_2 – середины соответствующих сторон; A_3, B_3, C_3 – середины отрезков AH, BH и CH. Тогда точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности, называемой окружностью девяти точек.

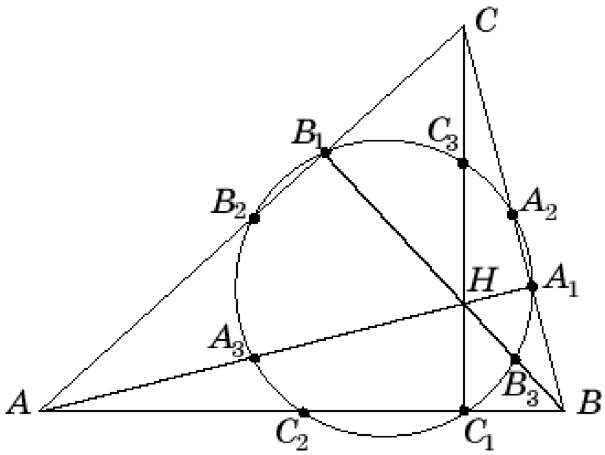


Рис. 2

Действительно, A_3B_2 – средняя линия треугольника AHC и, следовательно, $A_3B_2 \parallel CC_1$. B_2A_2 – средняя линия треугольника ABC и, следовательно, $B_2A_2 \parallel AB$. Так как $CC_1 \perp AB$, то $\angle A_3B_2A_2 = 90°$. Аналогично, $\angle A_3C_2A_2 = 90°$. Поэтому точки A_2, B_2, C_2, A_3 лежат на одной окружности с диаметром A_2A_3. Так как $AA_1 \perp BC$, то точка A_1 также принадлежит этой окружности. Таким образом, точки A_1 и A_3 лежат на окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$. Аналогичным образом показывается, что точки B_1 и B_3, C_1 и C_3 лежат на этой окружности. Значит, все девять точек лежат на одной окружности. Что и требовалось доказать.

Прямая Эйлера

Теорема. В треугольнике центр описанной окружности, точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр окружности девяти точек лежат на одной прямой, называемой прямой Эйлера. При этом центр окружности девяти точек лежит посередине между центром пересечения высот и центром описанной окружности.

Действительно, пусть в треугольнике ABC (рис. 3), точка O – центр описанной окружности; G – точка пересечения медиан, H – точка пересечения высот. Рассмотрим гомотетию с центром в точке G и коэффициентом -0,5. Она переводит вершины A, B, C треугольника ABC соответственно в точки A_2, B_2, C_2. Высоты треугольника ABC перейдут в серединные перпендикуляры к сторонам этого треугольника и, следовательно, точка пересечения высот H перейдет в точку пересечения серединных перпендикуляров O. Значит, точки O, G, H лежат на одной прямой.

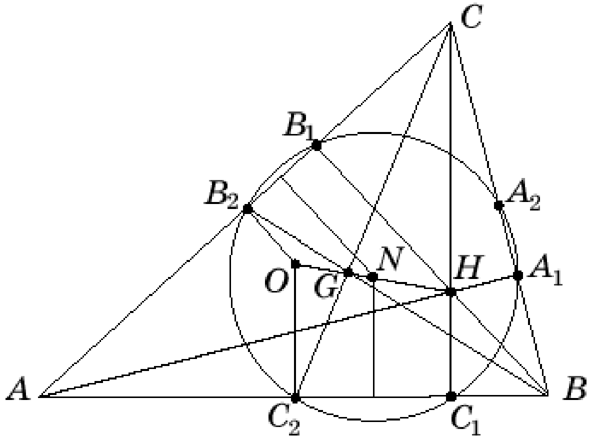


Рис. 3

Покажем, что середина N отрезка OH является центром окружности девяти точек. Действительно, C_1C_2– хорда окружности девяти точек. Поэтому серединный перпендикуляр к этой хорде является диаметром и пересекает OH в середине N. Аналогично, серединный перпендикуляр к хорде B_1B_2 является диаметром и пересекает OH в той же точке N. Значит N– центр окружности девяти точек. Что и требовалось доказать.

Задача. Докажите, что радиус окружности Эйлера в два раза меньше радиуса окружности, описанной около исходного треугольника.

Прямая Симсона

Теорема. Для произвольного треугольника основания перпендикуляров, опущенных из любой точки описанной окружности на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой, называемой прямой Симсона.

Действительно, пусть P – произвольная точка, лежащая на окружности, описанной около треугольника ABC; D, E, F – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника (рис. 4). Требуется доказать, что точки D, E, F лежат на одной прямой.

Заметим, что в случае, если AP проходит через центр окружности, то точки D и E совпадают с вершинами B и C. В противном случае, один из углов ABP или ACP острый, а другой – тупой. Из этого следует, что точки D и F будут расположены по разные стороны от прямой BC и для того, чтобы доказать, что точки D, E и F лежат на одной прямой, достаточно проверить, что $\angle CEF=\angle BED$.

Опишем окружность с диаметром CP. Так как $\angle CFP = \angle CEP = 90^{\circ}$, то точки E и F лежат на этой окружности. Поэтому $\angle CEF = \angle CPF$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. Далее, $\angle CPF = 90^{\circ} - \angle PCF = 90^{\circ}$-

$\angle DBP = \angle BPD$. Опишем окружность с диаметром BP. Так как $\angle BEP = \angle BDP = 90^{\circ}$, то точки F и D лежат на этой окружности. Поэтому $\angle BPD = \angle BED$. Следовательно, окончательно получаем, что $\angle CEF = \angle BED$. Значит точки D, E, F лежат на одной прямой.

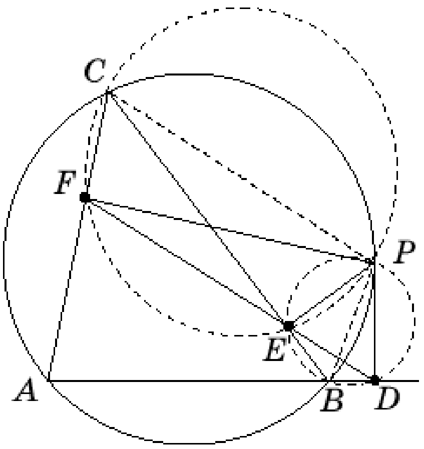


Рис. 4

Литература

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть I. Учпедгиз, Москва, 1948.
2. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии. Часть I. ОГИЗ, Гостехиздат. Москва, Ленинград, 1948.
3. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962.
4. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.
5. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.
6. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – Части I, II. – М.: Наука, 1986.
7. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 2. Геометрия (Планиметрия). – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952.