АКСИОМЫ ГЕОМЕТРИИ

I. Энциклопедия элементарной математики, т. 4 Геометрия. М. 1963.

Пространство Евклида определяется как совокупность объектов трех видов, называемых точками, прямыми и плоскостями, и преобразованиями, переводящими совокупность всех точек в себя, называемые движениями. Между этими объектами определены отношения: точка принадлежит прямой (прямая проходит через точку), точка принадлежит плоскости (плоскость проходит через точку), прямая лежит на плоскости, точка лежит между двумя другими точками. Указанные объекты и отношения удовлетворяют следующим аксиомам.

1. Аксиомы принадлежности.

1.1. Через две различные точки проходит единственная прямая.

1.2. На каждой прямой имеются по крайней мере две точки, ей принадлежащие.

1.3. Существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

1.4. Через каждые три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.

1.5. На каждой плоскости имеется по крайней мере одна точка, ей принадлежащая.

1.6. Если две точки прямой принадлежат плоскости: то и вся прямая лежит на этой плоскости.

1.7. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют по крайней мере еще одну общую точку.

1.8. Существуют четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

2. Аксиомы порядка.

2.1. Из любых трех различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

2.2. Для любых двух точек прямой существует такая третья точка на этой прямой, что вторая лежит между первой и третьей.

2.3. Если прямая лежит на плоскости, определяемой тремя точками A, B, C , не проходит ни через одну из этих точек и пересекает отрезок AB, то она пересекает отрезок AC или отрезок BC.

3. Аксиомы движения.

3.1. Всякое движение является взаимно однозначным отображением пространства на себя.

3.2. Если точки A, B и C лежат на одной прямой, причем C лежит между A и B, то всякое движение f переводит их в точки $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, принадлежащие одной прямой, причем $f(C)$ лежит между $f(A)$ и $f(B)$.

3.3. Композиция двух движений является движением.

3.4. Для всяких двух реперов, взятых в определенном порядке, существует одно и только одно движение, переводящее первый репер во второй (Репером называется произвольная тройка (A, a, α), где A – точка, a - луч с вершиной в этой точке, α – одна из двух полуплоскостей, определяемых лучом a).

4. Аксиомы непрерывности.

4.1 (Аксиома Архимеда). Пусть A_0, A_1, B – три точки, принадлежащие одной прямой, причем точка A_1 лежит между A_0 и B. Пусть, далее, f – движение, переводящее точку A_0 в точку A_1 и луч A_0B в луч A_1B. Положим $f(A_1)=A_2$, $f(A_2)=A_3, \ldots$. Тогда существует такое натуральное число n, что точка B находится на отрезке $A_{n-1}A_n$.

4.2 (Аксиома Кантора). Пусть A_1, A_2, ... и B_1, B_2, ... такие две последовательности точек, расположенных на одной прямой, что для любого n точки A_n и B_n различны между собой и нахлдятся на отрезке $A_{n-1}B_{n-1}$. Тогда на этой прямой существует такая точка C, которая принадлежит всем отрезкам A_nB_n .

5. Аксиома параллельности.

5.1. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести в их плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

II. А.Д. Александров. Основания геометрии. М.: Наука, 1987.

Основными объектами планиметрии являются точки и отрезки, а основными отношениями: точка является концом отрезка, точка лежит на отрезке, равенство отрезков.

Аксиомы подразделяются на линейные и плоскостные.

Линейные аксиомы.

1. Аксиомы связи.

1.1 (аксиома существования). Существует хотя бы один отрезок. У каждого отрезка есть два и только два конца. Кроме того отрезок содержит другие точки: точки, лежащие на отрезке.

1.2 (аксиома проведения отрезка). Любые две точки можно соединить отрезком и притом только одним.

1.3 (аксиома деления отрезка). Всякая точка, лежащая на отрезке, делит его на два отрезка, т.е. если точка C лежит на отрезке AB, то она делит его на два отрезка AC и BC, которые не имеют общих внутренних точек.

1.4 (аксиома соединения отрезков). Если точка C лежит на отрезке AB, а B на CD, то отрезки AB и CD образуют отрезок AD.

2. Аксиомы равенства.

2.1 (аксиома откладывания отрезка). Для любых двух отрезков AB и MN существует и притом единственный отрезок AC, равный MN и налегающий на AB.

2.2 (аксиома сравнения). Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны друг другу.

2.3 (аксиома сложения). Если точка C принадлежит отрезку AB, точка C_1 принадлежит отрезку A_1B_1 и $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$.

2.4 (аксиома Архимеда) Для любых данных отрезков a, $b=AB$ существует содержащий AB отрезок AA_n, на котором есть такие точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что отрезки $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ равны a.

3. Аксиома непрерывности.

3.1. Для любой последовательности вложенных отрезков

$$A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \ldots$$

существует точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

4. Плоскостные аксиомы.

4.1 (аксиома деления плоскости). По отношению к каждому данному отрезку a все точки, не лежащие ни на каком отрезке, содержащем a, делятся на два класса: в один класс входят точки, лежащие с одной стороны от a, в другой – точки, лежащие с другой стороны от a, причем в каждом классе есть точки.

4.2 (аксиома откладывания угла). От каждого отрезка по данную сторону от него, от данного его конца можно отложить угол, равный данному углу. (Углы равны, если у них есть равные соответственные поперечины). При этом можно пользоваться любой поперечиной и угол будет всегда один и тот же.

4.3 (аксиома параллельных отрезков). Если отрезки AC, BD равны и идут в одну сторону от отрезка AB под прямым углом, то $CD=AB$.

5. Пространственные аксиомы.

5.1 (аксиома плоскости). В пространстве существуют плоскости (фигуры, на которых выполняется планиметрия). Через каждые три точки пространства проходит плоскость.

5.2 (аксиома пересечения плоскостей). Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть их общая прямая.

5.3 (аксиома принадлежности прямой плоскости). Если прямая проходит через две точки данной плоскости, то она лежит в этой плоскости.

5.4 (аксиома разбиения пространства плоскостью). Каждая плоскость разбивает пространство на два полупространства.

5.5. (аксиома расстояния). Расстояние между любыми двумя точками пространства не зависит от того, на какой плоскости, содержащей эти точки, оно измерено.

III. А.В. Погорелов. Геометрия. М.: Наука, 1983.

1. Аксиомы принадлежности.

1.1 Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

1.2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

2. Аксиомы порядка.

2.1. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

2.2. Прямая, лежащая в плоскости, разбивает эту плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую.

3. Аксиомы меры для отрезков и углов.

3.1. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

3.2. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180^0 . Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

3.3. Каково бы ни было вещественное число $d > 0$, существует отрезок длины d.

4. Аксиома существования треугольника, равного данному.

4.1. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в данной плоскости в заданном расположении относительно данной полупрямой в этой плоскости.

5. Аксиома параллельных

5.1. На плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

6. Аксиомы стереометрии

6.1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

6.2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

6.3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

IV. Л.С. Атанасян и др. Геометрия 10-11. Учебник для 10-11 классов средней школы. М.: Просвещение, 1992.

1. Аксиомы взаимного расположения точек, прямых и плоскостей.

1.1. На каждой прямой и в каждой плоскости имеются точки.

1.2. Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой, и по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

1.3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

1.4. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

1.5. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки прямой лежат в этой плоскости.

1.6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

1.7. Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

1.8. Каждая точка прямой разделяет ее на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от данной точки, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от данной точки.

1.9. Каждая прямая, лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от данной прямой, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от данной прямой.

1.10. Каждая плоскость разделяет пространство на две части (два полупространства) так, что две точки одного и того же полупространства лежат по одну сторону от данной плоскости, а любые две точки разных полупространств лежат по разные стороны от данной плоскости.

2. Аксиомы наложения и равенства.

Наложением называется отображение пространства на себя. Две фигуры называются равными если одна из них переходит в другую с помощью некоторого наложения.

2.1. Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

2.2. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

2.3. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

2.4. Два равных угла hk и h_1k_1 , лежащие в плоскостях, являющихся границами полупространств P и P_1 можно совместить наложением так, что при этом совместятся полупространства P и P_1, причем это можно сделать двумя способами: 1) так, что луч h совместится с лучом h_1 , а луч k – с лучом k_1 ; 2) так, что луч h совместится с лучом k_1 , а луч k – с лучом h_1 .

2.5. Любая фигура равна самой себе.

2.6. Если фигура Φ равна фигуре Φ_1, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ.

2.7. Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3.

3. Аксиомы измерения отрезков.

3.1. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.

3.2. При выбранной единице измерения отрезков для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

4. Аксиома параллельных.

4.1. В любой плоскости через точку, не лежащую на данной прямой этой плоскости, проходит только одна прямая, параллельная данной.

V. Д.И. Перепелкин. Курс элементарной геометрии, ч II. М.: 1949.

1. Аксиомы соединения.

1.1. Через любые две данные точки проходит одна и только одна прямая.

1.2. На каждой прямой имеется бесчисленное множество точек.

1.3. Существуют точки, не лежащие на одной прямой.

1.4. Через любые три данные точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.

1.5. На каждой плоскости имеется бесчисленное множество точек.

1.6. Если две точки данной прямой лежат на некоторой плоскости, то и все точки этой прямой лежат на той же плоскости.

1.7. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют и вторую общую точку.

1.8. Существуют точки, не лежащие на одной плоскости.

2. Аксиомы порядка.

2.1. Из трех точек одной прямой всегда одна и только одна лежит между двумя другими.

2.2. Если A и B – две данные точки, то на прямой AB существует как бесчисленное множество точек, лежащих между A и B, так и бесчисленное множество точек, для которых точка B лежит между точкой A и каждой из этих точек.

2.3. Всякая точка O, лежащая на прямой, разделяет остальные точки этой прямой на два класса так, что точка O лежит между любыми двумя точками различных классов, но не лежит между двумя точками одного класса.

2.4. Всякая прямая, лежащая в некоторой плоскости, делит эту плоскость на две выпуклые области.

3. Аксиомы конгруэнтности.

3.1. Равенство отрезков и углов обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

3.2. Пусть точка C лежит на прямой AB между точками A и B, а точка C' на прямой $A'B'$ между точками A' и B'. Если при этом $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, то $AB=A'B'$. Если при этом же условии $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, то $BC=B'C'$.

3.3. Пусть луч l лежит между сторонами h, k угла hk, а луч l' – между сторонами h', k' угла $h'k'$. Если при этом $\angle hl = \angle h'l'$ и $\angle lk = \angle l'k'$, то и $\angle hk = \angle h'k'$. Если при этом же условии $\angle hk = \angle h'k'$ и $\angle hl = \angle h'l'$, то и $\angle kl = \angle k'l'$.

3.4. Пусть AB – некоторый отрезок и h' – луч, выходящий из точки A'; на луче h' существует одна и только одна такая точка B', что отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$.

3.5. Пусть hk – некоторый угол, h' – луч, выходящий из точки O' и α – полуплоскость, выходящая из луча h'; в полуплоскости α существует один и только один такой луч k', выходящий из точки O', что $\angle hk = \angle h'k'$.

3.6. Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и углы обоих треугольников, заключенные между этими сторонами, равны, то и остальные углы этих треугольников равны.

4. Аксиомы окружности.

4.1. Если один конец отрезка лежит внутри окружности, а другой – вне окружности, то отрезок имеет с окружностью общую точку.

4.2. Если один конец некоторой дуги окружности лежит внутри другой окружности, а другой конец – вне окружности, то дуга окружности и вторая окружность имеют общую точку.

5. Аксиома параллельности.

5.1. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

6. Аксиома Архимеда.

6.1. Каковы бы ни были два данных отрезка, всегда найдется такое кратное меньшего отрезка, которое превосходит больший.

7. Аксиома Кантора.

7.1. Если дана безгранично убывающая последовательность вложенных отрезков, то существует такая точка, которая будет внутренней или конечной точкой каждого из этих отрезков.