КЛАССИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ

Определение 1. Средним арифметическим двух чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$.

Определение 2. Средним геометрическим двух неотрицательных чисел a и b называется число $\sqrt{a \cdot b}$.

Определение 3. Средним квадратичным двух чисел a и b называется число $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Определение 4. Средним гармоническим двух положительных чисел a и b называется число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Теорема. Для любых двух положительных чисел a и b имеют место неравенства

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

причем равенства достигаются только в случае равенства чисел a и b.

Доказательство. Докажем, что имеет место неравенство

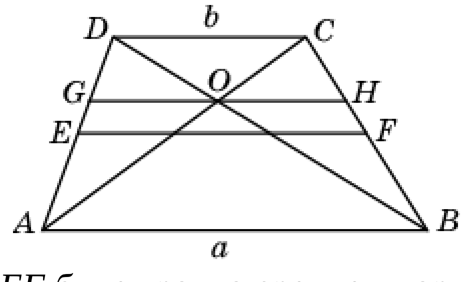
$$\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2},$$

означающее, что среднее геометрическое двух положительных чисел не превосходит их среднего арифметического. Действительно, данное неравенство равносильно неравенству $0 \le (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, которое очевидно выполняется для всех положительных чисел a и b, причем равенство имеет место только в случае $a = b$.

Аналогичным образом доказываются и другие неравенства.

Приведем геометрическую интерпретацию среднего арифметического и среднего гармонического.

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями $AB = a$, $CD = b$.

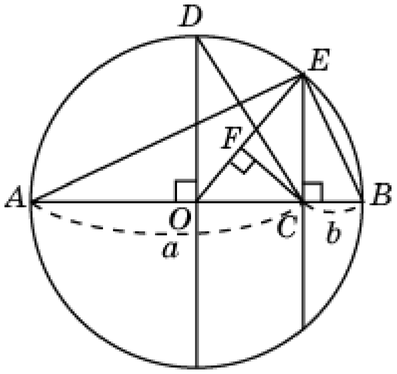


Ее средняя линия EF будет равна среднему арифметическому чисел a и b. Докажем, что отрезок GH, соединяющий точки на боковых сторонах этой трапеции, проходящий через точку O пересечения ее диагоналей и параллельный основаниям, равен среднему гармоническому.

Действительно, треугольники AOB и COD подобны, коэффициент подобия равен $\frac{a}{b}$. Треугольники AOG и ACD подобны, коэффициент подобия равен $\frac{a}{a+b}$. Следовательно, $OG = \frac{a \cdot b}{a+b}$. Аналогично доказывается, что $OH = \frac{a \cdot b}{a+b}$. Значит, $GH = \frac{2a \cdot b}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Приведем еще одну геометрическую интерпретацию классических средних и неравенств между ними.

Рассмотрим окружность с диаметром $a + b$ ($a > b$).



Для нее $OD = OE = \frac{a+b}{2}$, т.е. является средним арифметическим a и b.

Далее $OC = \frac{a-b}{2}$, $CD = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, т.е. является средним квадратичным a и b.

Из подобия прямоугольных треугольников ACE и ECB следует, что $CE = \sqrt{a \cdot b}$, т.е. является средним геометрическим a и b.

Из подобия прямоугольных треугольников OCE и EFC следует, что $EF = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, т.е. является средним гармоническим a и b.

Ясно, что из соотношения между перпендикуляром и наклонной следует, что для приведенных средних величин имеют место указанные выше неравенства.

Пример 1. Теплоход прошел по течению реки из пункта A в пункт B со скоростью V_1 км/ч. Обратно из пункта B в пункт A против течения реки он прошел со скоростью V_2 км/ч. Найдите среднюю скорость теплохода.

Решение. Пусть расстояние между пунктами A и B равно S. На прохождение теплохода из пункта A в пункт B будет затрачено S/V_1 часов, а на прохождение теплохода из пункта B в пункт A будет затрачено S/V_2 часов. Суммарное время составит $S/V_1 + S/V_2$ часов. Средняя скорость V будет равна

$\frac{2S}{\frac{S}{V_1}+\frac{S}{V_2}}=\frac{2}{\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}}$, т.е. средняя скорость теплохода равна среднему гармоническому скоростей V_1 и V_2.

Пример 2. Среди всех прямоугольников данного периметра P найдите прямоугольник наибольшей площади.

Решение. Пусть стороны прямоугольника равны a и b. Его площадь равна ab. Воспользуемся неравенством $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, которое следует из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. В правой части этого неравенства стоит число, равное площади квадрата с периметром P. Следовательно, из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

Средние величины могут быть обобщены на случай n чисел. А именно.

Определение 1'. Средним арифметическим n чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется число $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

Определение 2'. Средним геометрическим n неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется число $\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$.

Определение 3'. Средним квадратичным n чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется число $\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}$.

Определение 4'. Средним гармоническим n положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется число $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$.

Теорема'. Для любых n положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ имеют место неравенства

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\le\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}},$$

причем равенства достигаются только в случае равенства чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим было доказано ранее в пункте «Натуральные числа. Метод математической индукции».

Докажем левое неравенство. Перепишем его в виде

$$\frac{na_1\cdot\ldots\cdot a_n}{a_2\cdot\ldots\cdot a_n+\ldots+a_1\cdot\ldots\cdot a_{n-1}}\le\left(a_1\cdot\ldots\cdot a_n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq\left(\frac{1}{a_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

которое следует из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, примененным к числам $\frac{1}{a_1},\ldots,\frac{1}{a_n}$.

Упражнения

1. Что больше: а) 2^{300} или 3^{200}?
2. Какое число больше 31^{11} или 17^{14}?
3. Докажите, что $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$.
4. Докажите, что $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}<1$.
5. Докажите, что для положительных x выполняется неравенство $x+\frac{1}{x}\geq 2$.
6. Докажите неравенство $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$.
7. Докажите, что для положительных x выполняется неравенство $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$.
8. Докажите неравенство $(n-1)(x_1{}^2+\ldots+x_n{}^2)\geq 2\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$.
9. Докажите неравенство $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\leq\sqrt{\frac{x_1{}^2+\ldots+x_n{}^2}{n}}$.
10. Придумайте геометрический смысл среднего арифметического для трех положительных чисел.
11. Два путника вышли на рассвете из пунктов A и B навстречу друг другу с постоянными скоростями и встретились в полдень. Первый пришел в пункт B в 16 ч, а второй пришел в пункт A в 20 ч. В какое время был рассвет?
12. Первую половину пути всадник скакал со скоростью 18 км/ч, а вторую – 12 км/ч. Найдите среднюю скорость всадника.
13. Первая труба заполняет бассейн на 6 ч, а вторая – за 4 ч. За сколько времени заполнится бассейн, если одновременно открыть обе трубы?
14. Докажите, что из всех прямоугольных параллелепипедов данной площади поверхности наибольший объем имеет куб.

Литература

1. Блинков А.Д. Классические средние в арифметике и геометрии. – М.: МЦНМО, 2012.
2. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров, 1994.
3. Горбачев Н.Н. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004.
4. Иванов О.А. Элементарная математика. – М.: МЦНМО, 2009.

5. Скопец З.М. Сравнение различных средних двух положительных чисел. Квант, 1971, № 2.

6. Шень А.Х. Дюжина задач о среднем арифметическом. Квант, 2008, № 6.